Tesis Doctoral

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Filosofía y Letras

Departamento de Filosofía

Concepto y Realidad del cociente diferencial en la *Wissenschaft der Logik* de Hegel

Director: Dr. Félix Duque Pajuelo

Catedrático del Departamento de Filosofía

Facultad de Filosofía y Letras

Doctorando: Josu Zabaleta Imaz

Abril 2009

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer la implicación de los que directa o indirectamente han contribuido al proceso de corrección de esta tesis: Rafael, Sara, Petra, Paco, Ingo, Holden y Sandra. A ellos les debo que el trabajo es ahora más presentable de lo que era antes de pasar por sus manos. Obviamente, si el resultado no es mejor de lo que podría ser, algo tendrán que ver también con ello. Querría también agradecer a Maria José y a Juan Jesús por haberme introducido en Kant. A Ralf, por orientarme en terrenos relacionados con la física y la matemática. Al profesor Marco Panza por la correspondencia mantenida sobre la obra de Newton y por su apoyo en las cuestiones académicas. Al profesor Pirmin Stekeler-Weithofer por haber dirigido este trabajo a lo largo de un año. Al profesor Eberhard Knobloch por haber dirigido este trabajo a lo largo de otro año. Por último, quiero agradecer también al profesor Félix Duque por la confianza depositada al aceptar dirigir esta tesis. En relación al sustento material, no se muy bien cómo habría concluido esta investigación si no hubiese contado con la subvención, directa e indirecta, de los centros de distribución y/o producción de plusvalía D.A.A.D.-La Caixa y Orkli.

ÍNDICE

Introducción 13

Einleitung 27

1.PARTE: Concepto

1. Capítulo: La Categoria de la *cantidad* en la *Wissenschaft der Logik* 43

1.1 La Cualidad. 49

1.1.1 El Ser 49

1.1.2 El Ser-ahí 50

1.1.3 El Ser-para-sí 54

1.2 La Cantidad 55

1.2.1 La Cantidad 55

1.2.2. La segunda Antinomia Kantiana en Hegel 57

1.2.2.1. Exposición de la segunda Antinomia 57

1.2.2.2. La segunda Antinomia vista desde Hegel 60

1.2.2.3. Algunas observaciones sobre la lectura de Hegel de la segunda Aninómia 62

1.2.3. El Yo como cantidad pura y el estado de derecho 66

2. Capítulo: El carácter antinómico de lo continuo y lo discreto: las *aporías* de Zenón. .71

2.1 Lectura de las Aporías 72

2.1.1 Las aporias del movimiento 72

2.1.1.1 Las *aporias* del contiuo 75
2.1.1.1.1 La *aporía* del continuo para el movimiento en tanto que movimiento. 76
2.1.1.1.2 La *aporía* del continuo para el movimiento relativo 81
2.1.1.2 Las *aporias* de lo discreto 83
2.1.1.2.1 La aporía del movimiento discreto en general 84
2.1.1.2.2 La aporía de lo discreto para el movimiento relativo 87

2.1.2 Las Aporias de lo uno y lo múltiple 91

2.2. La Respuesta de Aristóteles 93

3. Capítulo: El lugar del diferencial en la *Wissenschaft der Logik* 105

3.1. La limitación de la Cantidad: el Cuanto 106

3.1.1 El Número 108
3.1.1.1 Sobre la diferencia entre el concepto de Número en Hegel y Kant 109
3.1.2 La Magnitud extensiva e intensiva 115
3.1.2.1 El diferencial como Magnitud intensiva en Kant 119
3.1.3 La Infinitud Cuantitativa 128

3.2 La Relación Cuantitativa 132

3.2.1 La Relación directa [y/x=a] 133
3.2.2 La Relación inversa o negativa [y+x=a] 135
3.2.3 La Relación de Potencias [y/x=x] 136
3.2.4 Recapitulación 138
3.2.5 Lo cuantitativo y lo cualitativo de la relación de potencias en Leibniz . . . . .139.

3.3 La importancia de la relación de potencias 144

3.3.1 Abusos del formalismo: la derivación de las funciones lineales . . . 144
3.3.2 La substitución de las variables por los incrementos: el complejo de elementos 147
3.3.3 La relación de potencias y la serie de potencias 148
3.3.4 Dentro de los límites de la serie de potencias 155

3.4 El Cociente de diferenciales y la noción de estructura 159

4. Capítulo: El concepto del cociente diferencial en Hegel 165

4.1 Preliminares 167

4.1.1 La relación y el cociente 167
4.1.2 La incógnita, la variable y la variación de la variable 170

4.2 Hegel ante los fundadores del cálculo 172

4.2.1. Euler 172
4.2.2. Euler frente a Leibniz 180
4.2.3 Newton 182
4.2.3.1 La eliminación de los infinitesimales 183
4.2.3.1.1 Un error de Newton 183
4.2.3.1.2 Una artilugio de Newton 190
4.2.3.2 Problemas con los evanescentes 191
4.2.3.3 Las primeras y últimas razones 194
4.2.3.4 Abusos de lectura 201
4.2.4 Lazare Carnot 206
4.2.4.1 El cálculo infinitesimal como compensación de errores 207
4.2.4.2 La ley de la continuidad 213
4.2.5 Lagrange 221
4.2.5.1 La expansión de una función 222
4.2.5.2 Los límites del error de Lagrange 229
4.2.5.3 El significado del formalismo 234
4.2.5.3.1 El significado del formalismo en la geometría 235
4.2.5.3.2 El significado del formalismo en la física 241

4.3 Hegel después de Hegel 243

4.3.1 El retorno de la noción de límite: Cauchy 243
4.3.2 Weierstraß 250
4.3.3 Russell: ¿crítico de Hegel? 252

5. Capítulo: Más allá de los diferenciales: La Medida 257

5.1 La Cantidad específica 261

5.2 La Medida Real 266

5.2.1 La relación entre Medidas autosuficientes 266
5.2.1.1 La Unión de dos Medidas 266
5.2.1.2 La Medida como serie de relaciones entre Medidas 268
5.2.1.3 La afinidad electiva (*Wahlvewandschaft*) 274
5.2.2 Los puntos nodales de las relaciones entre Medidas 276
5.2.3 Lo carente de Medida 278

5.3 El devenir de la esencia 279

5.3.1 La indiferencia 279

5.3.2 La indiferencia como relación inversa de sus factores 280
5.3.3 Traspaso a la esencia 282

5.4 Recapitulación 283

2.PARTE: Realidad

6. Capítulo: Origen del Cociente Diferencial en Newton 287

6.1. La *arithmetica infinitorum* de Wallis 287

6.1.1. El Método de Cuadraturas 288

6.2 La lectura de Newton de la Arithmetica infinitorum 293

6.2.1. Dos Lemmas como condición de la cuadratura 293
6.2.2. La cuadratura de la parábola por Newton 294
6.2.3. La ley de homogeneidad 297
6.2.4. El segmento Unidad 302
6.2.5. En busca de una razón con cocientes variables: la cuadratura del circulo 306

6.3. Hacia el cálculo de fluxiones: los manuscritos de Newton entre 1664-1666 311

6.3.1 El Método de los coeficientes indeterminados de Descartes 312
6.3.2 La lectura de Newton del método de normales de Descartes 314
6.3.3 El triángulo diferencial 318
6.3.4 Cuadrando superficies con recurso a velocidades instantáneas 321
6.3.5 El tiempo como variable independiente: Las *Lectiones* de Barrow . . .325
6.3.6 Los orígenes de la fluxión 328
6.3.7 La tangente como la dirección inercial 332
6.3.8 El algoritmo de velocidades y la inseparabilidad del cociente de diferenciales 337
6.3.9 El tratado de Octubre 1666 sobre las fluxiones: un nuevo significado para *o* 339

6.4 *De Analysi per Æquationes Infinitas*: algunas observaciones 341

6.4.1 ¿Infinitamente pequeño o indefinidamente pequeño?: Newton sobre Newton 344

6.5. El nacimiento de una fluxión 347

7. Capítulo: Dialéctica del *Principio de desplazamiento virtual* 357

7.1 Una falta que es presencia. 361
7.2. La definición del equilibrio en Galileo 367
7.3 El Principio de desplazamiento virtual en Lagrange 370
7.4 La ecuación fundamental de la dinámica: el Principio de d'Alembert 379

8. Capítulo: La relatividad de la fuerza y el cociente diferencial en Hegel 389

8.1 Los mundos posibles de Huygens 389
8.2 La revolución newtoniana 393

8.2.1 Consideraciones previas 393
8.2.2 La ley del paralelogramo de fuerzas 396
8.2.3 La fuerza centrífuga en Newton 399

8.3. La realidad de las fuerzas y de los sistemas de referencia 400

8.3.1 Introducción 400
8.3.2 El Principio de d'Alembert 400
8.3.3 Deducción de las fuerzas centrípeta, centrífuga y de coriolis 403
8.3.4 Interpretación de las fuerzas derivadas en el apartado anterior 405
8.3.5 El Principio de equivalencia y la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria 410

8.4. La igualdad entre la fuerza centrífuga y la fuerza centrípeta en Hegel . . .413

8.4.1 Introducción 413
8.4.2 Sobre la disolución de las fuerzas en el paralelogramo 414
8.4.3 La intercambiabilidad entre la fuerza centrífuga y la fuerza centrípeta 418

9. Capítulo: Espacio, Tiempo, Materia y movimiento en la *Enzyklopädie* de Hegel . . . 423

9.1 El Espacio 425
9.2 El Tiempo 428
9.3 La Materia y el Movimiento 429

Conclusiones y Recapitulación 433

Zusammenfassung und Schluss 443

Bibliografía 453

INTRODUCCIÓN

1 No es algo casual que, allá por el siglo XVII, el surgimiento del Cálculo matemático basado en los infinitesimales coincida temporalmente con el surgimiento de la mecánica clásica. Tampoco es producto del azar que la aproximación *infinitesimalista* de las magnitudes haya estado históricamente precedida por la aproximación *indivisibilista*. La distinción entre estas dos aproximaciones es ilustrada por el cambio que sufre el método de comparación de superficies de Cavalieri[1] a manos de Torricelli. Como se sabe[2], el primero hace uso de una regla (*regula*) o línea que, partiendo de un extremo de la superficie se mueve paralelamente hasta llegar a la *tangens opposita* de esta figura. Si las reglas y tangentes opuestas en las que dos figuras se inscriben están localizadas, respectivamente, sobre la misma recta, entonces, la proporcionalidad que haya entre las reglas de las figuras la habrá también entre las superficies de las figuras mismas. Cavalieri no dirá, ni puede decir, que una superficie es la superposición de sus partes indivisibles. Lo que afirma es meramente la igualdad de proporción entre dos proporciones que son homogéneas[3] entre sí pero que resultan heterogéneas con respecto a la otra proporción. Será Torricelli quien comience a hablar del grosor de las líneas haciendo homogénea la regla y la superficie a reglar, siendo con ello posible decir que la totalidad de las líneas compone la superficie en cuestión. Torricelli se ve obligado a hablar de entidades para la geometría clásica perfectamente irrepresentables como el de "grosor de las líneas" o "altura de los planos" a raíz de la incapacidad del método de Cavalieri de llegar a resultados que resultaban obvios desde otros sistemas de representación más habituales.

En efecto, cuando se buscaba demostrar la igualdad de las dos mitades de un rectángulo dividido por su diagonal, era preciso substituir la *regula* de Cavalieri por una regla que tendrá distinto grosor dependiendo de la relación en la que se encuentre con la diagonal. Ahora, con Torricelli, las dos reglas que barren las figuras no serán paralelas entre sí, sino que serán perpendiculares. El método *indivisibilista* de Cavalieri, al hacer uso del mismo átomo de tiempo en la traslación de la regla[4] –el mismo átomo dentro de cada figura y entre las dos figuras–, permitía eliminar de la proporción este indivisible[5] y representar así el movimiento sucesivo de translación como algo que tiene lugar de un golpe o simultáneamente. La proporcionalidad entre las *regula* de las dos figuras garantizaba que en ambas la velocidad de llenado de las superficies fuese la misma. Si a eso le añadimos el hecho de que los llenados se realizan al mismo tiempo –algo que queda garantizado por la igualdad atómica temporal–,

---

[1] No es relevante para nuestra exposición el que, de hecho, las comparaciones de Cavalieri se hagan también entre volúmenes.

[2] Seguimos en la siguiente digresión algunos trabajos inéditos del Profesor J.J. Rodríguez Fraile.

[3] Longitudes o superficies en cada caso.

[4] Igualdad de tiempo que es lo mismo que igualdad del grosor de la regla. Nótese que esta igualdad sólo es posible afirmarla desde una posición en la que se cuenta con la posibilidad de que haya distintos grosores, es decir, desde Torricelli. Nótese también que la prescripción de Cavalieri que hacía que los átomos de tiempo –de barrido de la figura– fuesen iguales era aquella en la que se exigía que las dos figuras tenían que ser inscritas entre reglas y tangentes opuestas situadas, respectivamente, sobre las mismas rectas.

[5] Al ser el átomo dentro de cada figura el mismo, puede sacarse como factor común. Al ser el mismo átomo en las dos figuras aparece el mismo átomo en el denominador y en el numerador y puede eliminarse.

entonces resulta que el espacio rellenado –en nuestro ejemplo, la superficie– ha de ser igual en las dos figuras. En Torricelli, como en Cavalieri, habrá un tiempo común de barrido para las dos figuras. Este tiempo será representado por los cortes de igual longitud a lo largo de la diagonal del rectángulo. En relación a este tiempo –en relación a la diagonal– tendremos distintas proporciones a ambos lados de la diagonal. Si estas proporciones[6] son iguales –del mismo modo a que, en el caso de Cavalieri, si las longitudes de las reglas son iguales– entonces las superficies tendrán también una proporción de igualdad. Lo que en Cavalieri ocurría en dos dimensiones es ampliado por Torricelli a tres[7]. Lo que ocurre es que este cambio de actitud no supone únicamente una mayor complejidad. La distinción entre Cavalieri y Torricelli no es meramente una distinción de grado, como tampoco la distinción entre la aceleración y la velocidad es meramente una cuestión de más o menos.

Al igual que no podemos saber si dos velocidades son mayores o menores sin presuponer que el tiempo en el que se miden tiene la misma cadencia[8], tampoco podría Cavalieri afirmar que las superfices de las dos figuras barridas son iguales si no llegara a suponer que el tiempo o los átomos de sus reglas son también iguales. Y del mismo modo que Cavalieri era capaz de eliminar este tiempo para comparar simultáneamente las dos superficies, podemos comparar dos velocidades reduciéndolas a un denominador común[9] eliminando, por así decir, el denominador de ambas proporciones y, borrando con ello, su caracter de proporción[10]. En esta comparación, tanto las velocidades como las superficies se podrán abarcar de un vistazo con lo que la comparación será inmediata.

En el caso de Torricelli, como decíamos, el fondo común o tiempo con la misma cadencia está representado por los segmentos de igual longitud de la diagonal. Sobre este fondo se comparan las relaciones o líneas con distinto grosor. Esto significa que en Torricelli aquello que llene el tiempo en mayor o menor grado no será –como en Cavalieri– la longitud, sino la superficie[11]. De este modo, lo que se compara bajo el fondo de un mismo tiempo en Torricelli no es algo, digamos, unidimensional, sino algo propiamente relacional. Ahora, este carácter relacional no desaparecerá –como ocurría en Cavalieri cuando se eliminaba los átomos de tiempo comunes a las dos figuras–, debido a que ya no hay un grosor de tiempo común en las dos líneas[12].

Esto que, contado así, podría parecer algo aparatoso, no es más que el procedimiento con el que se consigue expresar una relación como, por ejemplo, la aceleración, mediante un

---

[6] Expresadas por los paralepípedos de distinto grosor.
[7] Los elementos unidimensionales –las longitudes– que se referían en Cavalieri a un tiempo atomizado son en Torricelli elementos bidimensionales.
[8] Lo que, en el caso del tiempo, exige que se haga uso de la misma unidad de medida.
[9] A saber, el tiempo con la misma cadencia.
[10] Del mismo modo a que el carácter relacional implícito en todo número –p.e., en el caso de los naturales, 3=3/1, 2=2/1, etc. – no indica otra cosa que el hecho de que todos ellos se refieren al mismo uno –en el caso de Cavalieri o de las velocidades, el mismo tiempo–.
[11] Nótese que la superficie con la que se cuadra la figura es ahora homogénea a la superficie a cuadrar.
[12] Es cierto que si suponemos que el distinto grosor de las líneas representa el tiempo, podríamos llegar a reducir los dos grosores a una misma unidad respetando, a su vez, las superficies de las líneas aplicando, para ello, la regla de tres. Con ello conseguiríamos reducir la relación a una misma unidad que, como hacía Cavalieri, podría ser eliminada de la relación. No tendríamos ya una relación de relaciones, sino una relación que se compara bajo la mediación de un tiempo común representado por los atomos iguales de la diagonal.

escalar[13]. Del mismo modo que sobre la base del mismo tiempo podemos llegar a comparar velocidades mayores o menores –o, en el caso de Cavalieri, sobre el mismo tiempo podemos hablar de igualdad o no igualdad de las velocidades de llenado–, en el caso de la aceleración la comunidad del tiempo de la variación de la velocidad nos permite hablar de la mayor o menor variación en la velocidad[14] –o, en el caso de Torricelli, el mismo tiempo[15] de las relaciones le permitirá hablar, no ya, de la misma velocidad de llenado, sino de la misma aceleración de llenado, cosa que le permitía afirmar, a su vez, la igualdad entre las dos superficies–.

Este carácter relacional cuyo máximo exponente es la aceleración –es decir, el que dos relaciones son puestas en relación bajo el fondo de un mismo tiempo– será el que caracterizará propiamente la revolución científica que comenzará con Newton. La mecánica pasará con ella de hablar de pesos y de espacios regionalizados[16] a hablar también de fuerzas y de tiempos orientados[17]. La estática de los antiguos se transformará en la dinámica de los modernos. El equivalente de esta estructura esencialmente relacionl en el Cálculo será el cociente diferencial. La empresa de demostrar su carácter irreductiblemente relacional será completada por Hegel en su principal obra: *die Wissenschaft der Logik*. En él, el cociente diferencial será la figura con la que comience el retorno de la Cantidad a la Cualidad[18]. Este viaje de retorno o la posición de lo que en la relación cuantitativa era meramente inmediato tendrá lugar bajo la categoría de la Medida.

2 La primera vez que le presentan a alguien el Cálculo diferencial e integral –allá por el bachillerato– suele ir acompañado de una mezcla de extrañeza y sospecha. Un Cálculo en el que el *profe* se hace un lío cuando se pone a explicar el significado de uno de sus conceptos claves –a saber, el del diferencial *dx*– y que es, además de ello, tan admirablemente potente como para calcular sin el menor esfuerzo los problemas más enrevesados de maximización, de rectificación de curvas, de cuadratura del círculo o de obtención de la velocidad de un cuerpo en un instante de tiempo y espacio, un Cálculo así, decíamos, no suele dejar impasible. La curiosidad así despertada suele incluso aumentar cuando se descubre que la dificultad que surge a la hora de aceptar los fundamentos del Cálculo no se debe a la finitud de uno ni a la incompetencia de otro, sino que es algo que tiene su origen en la cosa misma. Así, uno va descubriendo que el carácter mismo de ciencia de este Cálculo será objeto de discusión en los albores del siglo XVIII en la Academia de las Ciencias de Paris[19], que la de Berlín convocará concursos con la finalidad de premiar al que consiga exponer de una manera clara los principios del Cálculo o que matemáticos como Leibniz o Newton dedicarán una extensa correspondencia a hacer frente a toda clase de objeciones contra el Calculo dirigidas desde distintos matemáticos. Visto retrospectivamente, resulta sorprendente que aquello que

[13] Sólo mediante esta comunidad de unidades –es decir, sólo gracias a que el tiempo de la velocidad y el tiempo de la variación de la velocidad únicamente se distinguen entre sí como se distinguen x y x^2– podemos justificar la igualdad $\frac{d(v)}{dt} = \frac{d\left(\frac{s}{t}\right)}{t} = \frac{d^2 s}{d^2 t} = \frac{d^2 s}{dt^2}$ tan común en física.
[14] Es decir, de la mayor o menor aceleración.
[15] Representado por la diagonal.
[16] No es lo mismo, por ejemplo, estar más o menos cerca del fulcro de una palanca.
[17] Tampoco es lo mismo que la bola que chocará contra la mesa de marmol haya empezado a caer antes o después.
[18] Algo que se suele querer también expresar cuando se dice que “el cociente diferencial es la unidad de la Cantidad y la Cualidad”.
[19] Cf. Mancosu [1989].

permitirá la matematización de las distintas fuerzas físicas[20] –aquello que haga de la física una ciencia– sea objeto de tales discusiones.

Podríamos decir que estas dificultades tienen su origen en la introducción en el formalismo matemático de una entidad –e.d., de algo que por el hecho mismo de ser tiene que estar delimitado, debe ser finito– que es, al mismo tiempo, infinita –en particular, infinitesimal–. Frente al uso *heurístico* de los indivisibles –uso remontable a Arquímedes–, la introducción con fines demostrativos de los infinitesimales puede encontrarse por primera vez en la obra de Kepler. Ya desde sus primeras formulaciones[21], los infinitesimales serán definidos de una manera, por lo menos, paradójica. En efecto, mientras que a lo largo de la resolución de un problema el infinitesimal que se había introducido debía de ser algo, debía tomar un valor no nulo, la condición para obtener al final el resultado del problema exigía hacer de este mismo algo una nada, exigía igualar a cero el infinitesimal. Es decir, si por un lado se tenía que el infinitesimal era una variable que, en cuanto que tal, podía tomar valores distintos a cero, por el otro, ese mismo infinitesimal debía de ser cero si es que se quería mantener la esperanza de ofrecer un resultado exacto. Esto que, contado así, puede parecer un procedimiento poco riguroso, era sin embargo aceptado en base a los resultados que proporcionaba[22]. Como veremos en el apartado 4.2.4, con el fin de eliminar este aura de contradicción, resultará muy iluminador trazar una analogía entre la forma de proceder de los matemáticos y la que tiene lugar cuando un físico hace uso del principio de desplazamiento virtual. Para ello, bastará con considerar la resolución del problema matemático como si de la descripción del estado de equilibrio de un sistema se tratara. Encontrar la solución equivaldrá así a encontrar el primer o último momento de las relaciones que describen el estado de equilibrio. Con ello conseguiremos evitar el uso de los infinitesimales por si mismos, es decir, fuera de su relación con otros infinitesimales. La tarea que se se propondrá Hegel en la *Wissenschaft der Logik* es la de mostrar la necesaria insuficiencia de este uso ilegítimo –uso hecho posible por el formalismo matemático– del infinitesimal. El infinitesimal, expresión de la contradicción, debe de ser superado en una figura especulativa superior. Esta figura es el cociente diferencial.

El problema del infinitesimal, traducido en los términos del proyecto consistente en *entizar* el infinito, adquiere la forma que ahora pasamos a describir. El infinitesimal, aquello que es menor que cualquier cantidad, tiene, por un lado, el carácter procesual propio de un algoritmo cuya incompletitud[23] hace que podamos decir que es infinito según la capacidad[24]. Pero, por otro lado, la resolución de los problemas exige la negación del caracter inacabado del infinitesimal. De este modo, el proceso tiene que terminarse, el algoritmo concluir sin resto y la infinitud según la capacidad hacerse infinitud en acto. Este paso, por así decir, del infinito potencial al actual, es lo que subyace en todos los procesos al límite y es aquello cuyo origen podríamos situar en los procesos de exhaustión de Euclides. Por todo ello, podría definirse el infinitesimal como la variable o progresión que tiene como su valor límite el cero[25].

---

[20] Piensese en los trabajos de Ampere o en Maxwell, por poner dos ejemplos de la electroestática y la electrodinámica. El trabajo de este último estará basado en la hidrodinámica que, a su vez, sería impensable sin el cálculo.
[21] Pensamos, por ejemplo, en Fermat o Descartes.
[22] Es decir, aquellos resultados que ya habían sido obtenidos por los clásicos sin el recurso a los infinitesimales.
[23] Incompletitud que se expresaba de muy distintas formas. Por ejemplo diciendo que siempre es posible encontrar una cantidad menor que una cantidad dada, que ningún número racional o real tiene un próximo, que no hay una diferencia real última etc.
[24] Sobre el papel de la distinción entre el denominado “infinito potencial” y el “actual” en Aristóteles véase el apartado 2.2.
[25] Esto es algo que hará explícitamente Cauchy. Cf. el apartado 4.3.1.

Resulta conveniente reflexionar brevemente sobre una especie de equivalencia[26] entre el método de exhaustión de los antiguos y el uso de los infinitesimales modernos. Con ello resultará más evidente lo que quiere decir Hegel cuando afirma que los infinitesimales son la expresión de una contradicción. Como se sabe, el método de exhaustión consiste en obtener la superficie *S* o el volumen *V* de una figura geométrica haciendo que todas las desviaciones[27] con respecto al valor que proponemos como cierto resulten contradictorias. De ahí que el método de exhaustión sea un método de obtener la igualdad entre dos magnitudes –la buscada y la propuesta– reduciendo la desigualdad –por exceso o por defecto– al absurdo. Es decir, se demuestra que dos cosas –superficies o volúmenes– son iguales en base a que cualquier diferencia entre ellas es contradictoria. El paso al límite del que hablábamos en el párrafo anterior consiste precisamente en pasar de demostrar el absurdo para cada diferencia a pasar a hacerlo para toda diferencia. Pues bien, al igual que el método de exhaustión, los infinitesimales hacen también uso de la contradicción o, para ser exactos, son la expresión misma de la contradicción. De este modo, podríamos expresar la idea que subyace en el método de exhaustión haciendo uso de los infinitesimales diciendo que, en el límite, la razón entre la superficie con exceso y la superficie con defecto es una razón de igualdad.

El infinitesimal, fuera de su relación, considerado por sí mismo, es algo contradictorio y podría parecer que sólo se puede escapar a esta contradicción anulandose a sí mismo, haciendose igual a cero. La anulación de la contradicción es una negación vacía que no obtiene nada como resultado. El intento de escapar a la contradicción mediante la negación inmediata es resultado de haber considerado a los infinitesimales como entidades subsistentes fuera del cociente diferencial, es decir, es resultado de haber considerado a los infinitesimales como si de unos incrementos (*Zuwachs*) se tratara. Partir de una interpretación así está destinada al fracaso. Si el infinitesimal es el aumento asignado a una variable, entonces no se entiende cómo puede dar el Cálculo resultados exactos. Y no vale decir, como Carnot[28], que los errores se compensan en el transcurso de las operaciones porque esto introduciría una nota de incertidumbre en el Cálculo. Y, es que, no se ve por qué razón la compensación de los errores tendría que ser necesaria, es decir, no se entiende por qué razón los resultados del Cálculo son algo con cuya certeza siempre se puede contar[29].

Frente a esta eliminación de la contradicción del infinitesimal en el que se parte de considerarlo como un incremento, la negación de la contradicción que considera Hegel es una negación determinada, una negación que supera (*Aufheben*) –y no meramente elimina– la contradicción del infinitesimal. La superación de la figura anterior en una posterior es una negación en la que la segunda figura no le es exterior a la primera, es una figura en la que la negación no es algo que se pone desde fuera. Esta superación o negación determinada del infinitesimal es el cociente diferencial[30]. De este modo, como decíamos, si el infinitesimal representaba el momento dialéctico de la infinitud cuantitativa, el cociente diferencial representará su momento especulativo. La diferencia con respecto a la postura anterior consiste en que, en ésta, los diferenciales –lo que antes estábamos denominando "infinitesimales"– no tienen consistencia independientemente o fuera de la relación en la que se encuentran con otro infinitesimal. Y con consistencia no queremos decir otra cosa que

[26] Cf. sobre este punto la introducción del capítulo 7.
[27] Desviaciones que serán, claro está, por exceso o por defecto.
[28] Cf. el apartado 4.2.4.
[29] De hecho, veremos en el apartado dedicado a Carnot que su interpretación de la compensación de errores no es más que otra versión de la lectura hegeliana del cociente de diferenciales en el que el error y su compensación son los dos lados de dicho cociente.
[30] Dedicaremos el apartado 3.1. a seguir esta deducción en Hegel.

"verdad". En efecto, esta misma idea lo expresábamos también cuando decíamos que el infinitesimal representa el momento dialéctico de la infinitud cuantitativa. Y ello debido a que, en Hegel, decir que algo es dialéctico es lo mismo que decir que es unilateral, que es meramente momento, que es la regla de la verdad pero que no es verdad o decir que no es consistente.

Ciertamente, esta consideración relacional del cociente diferencial no es algo que debamos, en su forma más externa, a Hegel. Antes que él, los matemáticos L'Huilier[31], Euler o el mismo Newton habían defendido una interpretación de las magnitudes evanescentes en la que se afirmaba la importancia de considerarlos dentro de una relación. Hegel sabe que Newton había defendido esta tesis en los *Principia* y elogiará al físico inglés por ello. Lo que ocurre es que Newton, del mismo modo que Euler o L'Huilier, aceptan el cociente de magnitudes evanescentes como algo dado, mientras que para Hegel se trata precisamente de demostrarlo, es decir, de generarlo[32]. Si no fuera por ello, si lo único importante fuese descubrir quien fue el primero que, con más o menos acierto y fundamento, expresó la importancia de considerar a las magnitudes evanescentes en una expresión relacional, entonces, decíamos, nuestra tarea sería mucho más facil. Demasiado fácil.

Pero, afortunadamente, no se trata de eso. No se trata de subrayar la importancia, incluso si queremos, la extraordinaria importancia, de algo con lo que nos hemos encontrado. La parte propiamente científica de un discurso no es aquella en la que el contenido tiene la forma de algo dado, sino aquella en la que se muestra la necesidad de ese contenido. Pero, demostrar la necesidad del contenido de algo equivale, en el conocimiento por principios, a demostrar la necesidad de ese mismo algo[33]. De ahí que la tarea emprendida por Hegel de demostrar –esta vez de acuerdo a mediaciones internas al concepto– un concepto matemático como el cociente diferencial sea algo propio del discurso científico. Una demostración de esta clase no tiene como objetivo mostrar la importancia de tal herramienta matemática, sino que trata, más bien, de mostrar su necesidad haciendo que su concepto llegue a estar puesto (*setzen*)[34]. Lo que ocurre es que con ello se muestra también, aunque sea colateralmente, la importancia de respetar el contenido del concepto cuya necesidad ha sido demostrado. En última instancia, esta importancia consiste en que se ha de tomar el concepto en su figura verdadera. El no hacerlo así, es decir, el no respetar el contenido del cociente diferencial que ha sido generado en la *Wissenschaft der Logik* llevará al entendimiento a las tinieblas de la contradicción. La manifestación histórica de estas contradicciones adquiere una forma privilegiada en las denominadas paradojas de Zenón[35].

Las paradojas del movimiento de Zenón no consisten en mostrar la imposibilidad lógica del movimiento, sino que, más bien, demuestran las contradicciones en las que se enmaraña el entendimiento al proponer una aproximación unilateral del movimiento. El problema es que la aproximación unilateral no es, en la filosofía de Hegel[36], algo que el entendimiento pueda o no hacer, la unilateralidad no es algo que el entendimiento elija, sino que es algo que hace del entendimiento lo que él es. En el caso del movimiento, la unilateralidad del entendimiento consiste en considerar por un lado la continuidad y por el otro la discreción, por un lado el

[31] Aquél que ganará el premio de la academia de Berlin en 1784.
[32] Y no por que en Hegel el todo o el ente haya que generarlo, digamos, del ser –Hegel no es un filósofo-que-se-saca-todo-de-la-cabeza, no– sino por que el cociente diferencial es algo muy particular en Hegel, a saber, un concepto, y porque el concepto sí es algo que exige y permite la generación. De este modo, el centro de gravedad de las indagaciones pasa a preguntar por el significado del concepto "concepto" (*Begriff*) en Hegel.
[33] Sea este algo el "oxígeno", el "planeta venus", el "positrón", la "plusvalía" o la "libido".
[34] Sobre el concepto de *setzen* en Hegel véase la nota 154.
[35] Hemos intentado ofrecer una reconstrucción sistemática de las paradojas en el apartado 2.1.
[36] Del mismo modo a que la razón era, en Kant, esencialmente dialéctica.

tiempo y por el otro lado el espacio[37]. Del mismo modo que considerar los lados del cociente diferencial unilateralmente terminaba por generar contradicciones, el hecho de tomar el tiempo por un lado y el espacio por el otro, sea bajo la forma de los indivisibles –aspecto discreto– sea bajo la forma de los infinitesimales –aspecto continuo[38]–, dará también lugar a las contradicciones expresadas por Zenón. Es por ello necesario considerar, en primer lugar, tanto el tiempo como el espacio –el numerador y el denominador del cociente– sin que se unilateralice su carácter de continuidad o de discreción y que, en segundo lugar, tampoco se unilateralicen el tiempo y el espacio mismos. Tanto el tiempo como el espacio han de ser considerados haciendo uso de aquella figura en la que queden inevitablemente remitidos el uno al otro. El primer cometido tiene lugar bajo la figura del Cuanto o Cantidad determinada en la que se supera la contradicción entre la continuidad y la discreción[39]. Por su parte, la figura cuya forma misma es la relación de dos Cuantos en su estado de devenir, la figura que consigue remitir el tiempo al espacio y el espacio al tiempo es la figura denominada "cociente diferencial". Esta forma, aplicada sobre los cuantos "tiempo" y "espacio" da así lugar al cociente diferencial denominado "velocidad"[40]. Con ello, las paradojas de Zenón o, cabría decir mejor, las contradicciones que ellas expresan[41], quedan superadas mediante el calculo diferencial. Resulta por ello importante subrayar que Hegel, alguien que tiene en más estima las paradojas de Zenón que las antinomias de Kant, verá necesario ir más allá de estas paradojas del movimiento que no son, al fin y al cabo, otra cosa que meros productos del entendimiento.

3 En este punto resultará importante realizar una observación sobre el significado de "superar" cuando se hace uso de este término en el contexto del cociente diferencial. Al decir que el cociente diferencial supera un momento o figura anterior, queremos decir, entre otras cosas, que este cociente viene *después* de una figura lógica previa en la *Wissenschaft der Logik*. En este sentido, la "superación" de algo en y por otro algo pertenece al ámbito de lo que es, en el sentido de Hegel, la lógica. Pero podemos también utilizar "superar" en relación al cociente diferencial para expresar el fenómeno consistente en que una teoría forma parte o es absorbida por otra teoría. No se trata aquí de que, a efectos experimentales, una teoría sea reemplazable por otra más sencilla[42], sino de que una teoría puede estar incluida en un nivel infinitesimal en otra. Dos ejemplos servirán para aclarar esto. El primero de ellos nos ocupará

---

[37] Las cuatro unilateralidades son: 1) movimiento sobre el fondo de la discreción del tiempo y del espacio 2) movimiento sobre el fondo de la continuidad del tiempo y del espacio 3) aceleración sobre el fondo de la discreción del tiempo y del espacio 4) acelareción sobre el fondo de la continuidad del tiempo y del espacio. Veremos en el segundo capítulo que cada una de estas figuras corresponde a cada una de las cuatro paradojas de Zenón sobre el movimiento.

[38] De hecho, al menos en el caso del infinitesimal, no resulta tan fácil unilateralizar lo que esta lógicamente unido. Es por ello que el momento de la discreción siempre tiene que aparecer, sea por acción o por omisión, en la definición del infinitesimal. En un todo conceptual que podríamos denominar continuo-discreto, el indivisible acentuaría el segundo aspecto, mientras que el infinitesimal acentuaría el primer aspecto, a saber, que siempre se puede seguir cortando la recta en fragmentos menores, que siempre se puede encontrar un número menor que otro dado, etc.

[39] Cf. el apartado 3.1.

[40] Veremos en el apartado 3.3.1 que esta remisión resulta frustrada cuando la función que expresa la velocidad del cuerpo es una función lineal y que la presunta derivación de estas funciones no es más que una ilusión que se debe al formalismo matemático.

[41] Entendemos aquí por contradicción el conjunto de dos paradojas complementarias y por paradoja la refutación lógica de una tesis que es de sentido común. Dos paradojas son complementarias si los predicados utilizados para refutar el argumento determinan un campo dado unívoca y exhaustivamente.

[42] Del mismo modo a que no se puede decir que la Teoría de la Relatividad Especial es reemplazable por la mecánica de Newton para velocidades del sistema relativamente pequeñas. El término "relativamente" se refiere aquí a los instrumentos de medida que en cada caso se dispongan. Por esta razón, este reemplazo no afirma algo que sea propio de la cosa misma, e.d., perteneciente a la teoría.

en este mismo trabajo[43] y por ello no nos extenderemos demasiado en él ahora. Se trata de la forma en la que los movimientos uniformes y los estados de equilibrio son asumidos –a un nivel infinitesimal– por los movimientos acelerados y los estados de desequilibrio. Si el principio de desplazamientos virtuales permitía considerar el estado de equilibrio como el estado último o primero de desequilibrio[44], podemos considera los estados de continuo no equilibrio como estados de desequilibrio continuo. Un estado dinámico se caracterizaría así por ser una sucesión de estados de equilibrio sucesiva o continuamente interrumpidos. De ahí que podamos decir que, en virtud del cociente diferencial[45], el estado estático está superado –es decir, asumido– en la dinámica.

De una manera análoga, este último sentido de la expresión “superar” es el que nos permite decir que la Teoría Especial de la Relatividad está superada en y por la Teoría General. Del mismo modo que el estado dinámico es una sucesión de estados de equilibrio, la Teoría General es una sucesión[46] de estados en los que rige la Teoría Especial[47]. Es decir, en la Teoría General es válida la Teoría Especial a nivel infinitesimal[48]. Esto se expresa en el hecho de que, en la Teoría General, dentro de una región infinitesimal no actúa el campo gravitatorio[49]. Y contra esta tesis no vale argumentar que en la estructura que subyace a la asunción de la Teoría Especial por la General no aparece un cociente diferencial sino, más bien, una relación entre diferenciales[50]. Este argumento olvida que lo importante no reside en si la relación se da entre dos, tres o más *relata*, sino en si se trata efectivamente de una relación o no. Veremos en nuestra exposición del Principio de desplazamiento virtual[51] que las relaciones infinitesimales de más de dos *relata* se reducen, en última instancia, a las de dos[52].

Vemos que, en definitiva, un término que se remonta a Hegel –la *Aufhebung*– consigue explicar la relación de un marco teórico con respecto a otro que, a primera vista, podría pensarse que era de “refutación”. Es verdad que el mismo Hegel no hace uso –ni puede hacer uso, en el segundo ejemplo propuesto– de este término en los ejemplos que hemos introducido en los dos párrafos previos. Al menos materialmente, Hegel podría haber conocido la versión del principio de desplazamiento virtual ofrecida por Lagrange en su *Méchanique Analitique*[53]. En contra de lo que cabría esperar, lo cierto es que en el conjunto de la obra de Hegel no hay rastros de tal principio, y es por ello que, dedicaremos el capítulo 7 a intentar llenar esta laguna, ofreciendo una interpretación *hegeliana* de este principio[54]. Este capítulo constituirá además el preludio del capítulo 8 en el que intentaremos esclarecer

---

[43] Véase el capítulo 7.
[44] Algo que, como veremos, remite a las “primeras y últimas razones” de Newton.
[45] Para ver el papel que tiene el cociente diferencial en todo este asunto remitimos al lector al apartado 7.3.
[46] Sucesión cuya regla está determinada por las Ecuaciones del campo gravitatorio.
[47] Cuando decimos “Teoría Especial” incluímos también la física de Newton ya que la primera no es más que la segunda bajo la condición de la constancia de la velocidad de la luz.
[48] De ahí que podamos también decir que la denominada geometría euclídea es superada –y no, en contra de lo que se dice por ahí, refutada– por la Teoría General. La geometría euclídea es válida a nivel infinitesimal en la Teoría General de la Relatividad. Cf. Lanczos [1986] p. 21.
[49] Sobre este tema cf. Einstein [1996] p. 76 y p. 292, Einstein [1916] p. 788 y 789 así como Einstein [1969] p. 64 y 65.
[50] A saber, la relación entre el elemento de linea *ds* (*Linienelement*), el diferencial del tiempo y los diferenciales de las tres coordenadas espaciales cartesianas: $ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$.
[51] Cf. el apartado 7.3.
[52] Es decir, las relaciones entre más de dos infinitesimales se reducen, en última instancia, al cociente diferencial.
[53] Téngase en cuenta que la primera edición de esta obra es de 1788.
[54] Una interpretación a su vez *hegeliana* de algo que tampoco está en Hegel es la que en el capítulo 2 ofrecemos de las paradojas de Zenón. La interpretación irá en esta ocasión, al menos en parte, en contra del propio Hegel. Sobre este punto véanse las notas 1669 y 1709 del capítulo 9.

los fundamentos de una falsa afirmación de Hegel que se remontan a su trabajo de habilitación y que permitirá esclarecer ciertos conceptos físicos que, aún hoy, permanecen en oscuridad.

4 Hemos dividido el trabajo en dos partes principales. La primera de ellas, la que lleva el título de “Concepto”, es fundamentalmente un comentario del primer libro de la primera parte de la *Wissenschaft der Logik*. Hemos utilizado para ello las dos ediciones –la primera de 1812, la segunda de 1832– que publicó Hegel de esta libro. Hacer un estudio sobre las divergencias entre estas dos ediciones quedaba fuera del alcance del tema de esta tesis y de ahí que, a lo largo de la exposición, hemos hecho uso casi indiscriminadamente de las dos ediciones. En los casos en los que la división de las categorías de la *Logik* difiere en ambas ediciones o en aquellos casos en los que el texto principal presenta serias diferencias, hemos priorizado la versión de la segunda edición. Consideramos que la exposición que ofrecemos es lo suficientemente detallado como para que se pueda seguir el hilo de la argumentación sin que haya mayores dificultades que aquellas derivadas de la cosa misma.

Esta exposición del primer libro está acompañado de observaciones que, a veces, tienen la relevancia suficiente como para formar un apartado propio, otras veces tienen la forma de notas al pie, y una vez ha terminado incluso por segregarse del texto principal hasta llegar a formar un capítulo independiente. Este es el caso del segundo capítulo en donde nos hemos ocupado de las denominadas “paradojas de Zenón”. Estas paradojas constituyen algo así como la ilustración de una parte de las contradicciones de la categoría de la Cantidad. Esto significa que el cociente diferencial, figura que aparecerá al final de esta categoría, será la superación de las contradicciones expresadas por estas paradojas. Además de este capítulo, hemos provisto el texto principal de apartados en los que poníamos a dialogar a Hegel con otros filósofos cuya aportación hemos considerado relevante para nuestra exposición. A excepción de la segunda antinómia kantiana, este diálogo no está explícitamente formulado por Hegel en el texto de la *Logik*. De este modo, la distinción entre el concepto de número en Kant y en Hegel es algo que nostros, no Hegel, formulamos. Lo mismo sucede con cuestiones relativas al estado de derecho –en el primer capítulo– o las que –dentro del tercer capítulo– nos llevarán a ocuparnos de la proximidad del concepto de magnitud intensiva en Kant y en Hegel[55]. Esta última cuestión nos llevará además a enfrentarnos con una tesis ya consagrada entre los comentadores de Kant y que consiste en identificar, por así decir, las magnitudes intensivas *kantianas* con la noción de diferencial.

Además de este diálogo con Kant, hemos mostrado la solidaridad entre el concepto de relación de potencias en Hegel y en Leibniz. Para ello tendremos que ver que tanto el uno como el otro consideran esta relación como la unión de lo cualitativo y lo cuantitativo. De un modo análogo a lo que ocurre en Kant, aquello que alejará a Hegel de Leibniz consisitirá en el carácter generativo en el que se suceden los momentos de lo lógico para Hegel. Es por ello que, la unidad de lo cantidad y la cualidad expresada en la relación de potencias no será en Hegel, a diferencia de en Leibniz, algo inmediato, sino que será, más bien, un resultado. Por último, cerraremos la ronda de conversaciones intentando realizar un acercamiento entre la noción de estructura que rige desde el nacimiento de la lingüística moderna y el cociente

[55] Para evitar malentendidos, digamos ya que no se trata de que un autor tenga, por ejemplo, un concepto de Cantidad y otro autor otro, sino de que los presupuestos sobre los que cada uno construye tal concepto son distintos. Así, siendo el espacio y el tiempo las grandes ausentes de la *Wissenschaft der Logik*, el concepto de número en Hegel será algo tan *kantianamente* absurdo como una unidad sin pluralidad. A su vez, la distinción entre la cantidad intensiva en Hegel y en Kant consistirá, principalmente, en la necesaria relación en la que se encuentra la cantidad intensiva con la extensiva en Hegel. Veremos en el apartado 3.1.2.1 que en Kant hay también trazas de esta relación, si bien es verdad que no adquiere, como en Hegel, la forma de “generación”.

diferencial. Con esto concluiremos la parte de nuestro trabajo centrada en obtener el concepto de cociente diferencial. La tarea con la que nos ocuparemos en el capítulo 4 consistirá en poner a prueba el concepto de diferencial utilizado por las principales figuras matemáticas de los últimos cuatro siglos con el concepto obtenido en el capítulo 3. Esto significa que no vamos a limitar nuestra investigación a aquellos autores con los que, de hecho, se enfrenta Hegel, sino que, además de ello, haremos una incursión en los trabajos de fundamentación del Cálculo realizados por Cauchy y Weierstraß[56], viendo qué es lo que tienen que decir sobre el diferencial hegeliano.

Concluir nuestro comentario de la *Wissenschaft der Logik* con la figura que constituye el tema de nuestro trabajo –a saber, concluir con el cociente diferencial– no sería sólo demasiado abrupto, sino que iría además en contra de una correcta comprensión de esta figura. Para concebir una figura lógica *hegeliana* no sólo hay que entender cómo ha sido concebida, sino que, a su vez, resulta necesario considerar el fondo sobre el que tal figura se proyecta. Este fondo es, en última instancia, el todo en el que consiste el retorno del Absoluto a sí. Es decir, el fondo es –para qué negarlo– la entera *Wissenschaft der Logik*. Obviamente, exponer y comentar toda la historia lógica sería descompensado y iría bastante más allá del marco de este trabajo. Es por ello que, aun siendo conscientes de que nuestra decisión tendrá siempre algo de arbitrario, hemos decidido seguir el despliegue lógico hasta conseguir abarcar la tercera y última división fundamental de la *Lehre vom Sein*: a saber, la Medida (*Maß*)[57]. La arbitrariedad de cortar por ahí es menor que el hacerlo por otro momento posterior si tenemos en cuenta que la Medida constituye la categoría en la que el Ser retorna a sí o, lo que es lo mismo, pasa a la Esencia. Es decir, la Medidad forma un momento de retorno –el del Ser– en el proceso de retorno general formado por la serie: Ser-Esencia-Concepto. El desglose del capítulo de la Medida nos permitirá comprender mejor en qué consiste eso de la unidad de la Cantidad y la Cualidad –unidad cuya expresión matemática es el cociente diferencial– y nos brindará además la oportunidad de trazar algún que otro paralelo entre esta categoría y el *Filebo* de Platón así como el primer tomo del *das Kapital* de Marx.

La segunda parte de esta tesis lleva el título de “Realidad”. Con esta palabra no hemos querido hacer referencia al término hegeliano *Wirklichekeit*[58] –lo que se traduce habitualmente por “realidad efectiva”– ni a la *Realität* en el sentido en el que esta palabra tiene, por ejemplo, en Kant[59]. El término “Realidad”, con el significado que aquí le damos, es menos pretencioso que todo esto. De este modo, en esta segunda parte tendrá cabida todo aquello que no forma parte de la exposición lógica de la categoría, ni tampoco es parte del comentario de esta exposición, pero que, sin embargo, forma parte del discurso hegeliano sobre el cociente diferencial. Es decir, de un modo análogo a que la *Théorie des Fonctions Analytiques* de Lagrange constaba de dos partes fundamentales –una, la sintáctica, en la que se derivaban los algorítmos del Cálculo y otra, la semántica, en la que se aplicaban estos algoritmos sobre la física y la geometría– hemos dividido también nuestra tesis en una parte conceptual y otra, por así decir, más aplicada[60] e, incluso, histórica.

[56] Esto tendrá lugar en el apartado 4.3.

[57] Parece que todos los intérpretes sobre el tema “Hegel y el cálculo” se han puesto de acuerdo a la hora de no ocuparse de este momento de la *Logik*.

[58] Si fuese así, la primera y la segunda parte de este trabajo se solaparían necesariamente por entero.

[59] Es decir, en el sentido de tener un contenido *quiditativo*, tener unas notas o ser un qué determinado.

[60] Somos conscientes de que la distinción entre sintaxis y semántica tampoco se ajusta del todo a lo que tiene lugar en la *Wissenschaft der Logik* en donde, más bien, cabría hablar de una sintaxis que genera su propia semántica. Somos también conscientes de los asuntos enormemente concretos –piénsese, por ejemplo, en la sección 4.2.3.1.1– que se han trabajado en la primera parte y que no constituyen algo exclusivo de esta segunda parte. Lo que ocurre es que los ejemplos o alusiones que ahí –en la primera parte– se discutían formaban parte del texto de las observaciones de la *Wissenschaft der Logik* y era necesario, por ello, desplegarlos en esa parte.

Comenzaremos esta segunda parte con la exposición del origen del concepto del cociente diferencial en el matemático al que más debe Hegel el suyo. Nos referimos a Newton. Confiamos en que nuestra tarea de reconstrucción[61] ayudará a comprender conceptos clave para el Cálculo como el de función o magnitud. Veremos también el papel que juega la noción de tiempo en los inicios del surgimiento del Cálculo. El objetivo último del capítulo consistirá en mostrar los orígenes de la inseparabilidad de las magnitudes evanescentes en Newton. Con ello pretendemos rastrear el origen matemático de un concepto clave en la *Wissenschaft der Logik* en la obra de un autor clave en la concepción del cociente de Hegel.

Los capítulos 7 y 8 forman una unidad propia. Siempre dentro de esta segunda parte en la que se trata de la “semántica” del cociente, estos dos capítulos se dedican a mostrar el modo en el que el cociente diferencial permite el surgimiento del caso paradigmático de la ciencia moderna; la ciencia física. Con esto no queremos decir que el carácter científico de las demás ciencas no se deba al Cálculo[62], sino que la primera vez que el Cálculo se pone a fundamentar matemáticamente una ciencia lo hace con una ciencia que habla de fuerzas y acelareciones. En gran medida, la matematización de las restantes ciencias *exactas* ha sido posible, o bien porque han sido reducidas a física, o bien, porque hacen uso de representaciones geometrizadas que permiten el uso del Cálculo en él[63].

El contenido teórico de estos dos capitulos estará formado por dos principios fundamentales. El primero es el denominado Principio de desplazamiento virtual. Veremos que este principio será expresado por primera vez por Galileo aunque será Lagrange el autor con el que adquirirá un papel central en la física y el que le conferirá la formulación matemática moderna. El segundo de los principios es el denominado “principio de d’Alembert”. Presentaremos este principio de tal forma que vaya a servir de puente entre este capítulo 7 y el capítulo 8. Para ello, veremos que este Principio expresa la misma idea que aquella que es expresada por el denominado “pensamiento más feliz” de Einstein[64]. El objetivo de este capítulo octavo será el de comprender las razones por las que Hegel defenderá erróneamente la reemplazabilidad entre la fuerza centrífuga y la centrípeta[65]. Para ello, será necesario aclarar algunas cuestiones sobre el concepto de sistema de referencia, masa inercial y masa gravitatoria.

El último capítulo de esta tesis, el más corto, es la exposición de la generación de los conceptos de tiempo, espacio, materia y movimiento en Hegel. Hemos recurrido para este fin a las distintas ediciones de la *Enzyklopädie*[66] en las que, con más o menos cambios, Hegel expone esta deducción. Con ello pretendemos hacer frente a las críticas de aquellos que ven

[61] Este trabajo de reconstrucción sería dificilmente realizable en el tiempo del que se dispone para escribir un capítulo de una tesis si no fuese por la memorable edición de los escritos matemáticos de Newton a cargo de D. T. Whiteside.
[62] Bien al contrario, el tratamiento matemático tanto de la *res extensa* como de la *res intensa* necesita del cálculo infinitesimal.
[63] Piénsese, por ejemplo, en la economía con sus funciones de utilidad y sus elasticidades en los que se hace uso de las derivadas segundas. Habría que ver si por el mero hecho de hacer uso del cálculo –de las matemáticas– un conjunto de saberes se constituye necesariamente en ciencia o si, más bien, puede darse el caso en el que los conceptos son representados de una manera exacta –ser incluso sometidos al cálculo– aunque los mismos tengan un origen, digamos, fetichista.
[64] Cf. Einstein [2002] p. 265. Recordemos que en este pensamiento se formularán las cuestiones de cuya solución surgirá, en última instancia, la Teoría General.
[65] Veremos que no se trata de que estas dos fuerzas sean irreemplazables, sino de que su reemplazabilidad tiene que tener en cuenta los sistemas de referencia.
[66] Haremos tambíen uso de los apuntes de algunos de los alumnos que asistieron a las clases de Filosofía de la Naturaleza que impartió Hegel.

en la lectura del infinitesimal hegeliano un resto de dinamicismo que habría quedado obsoleto desde, al menos, Cauchy. Veremos que el concepto de movimiento en Hegel poco tiene que ver con el concepto de aquellos que se basan en él para fundamentar sus críticas. Esta es la razón de que el mismo Hegel no llegará a admitir el concepto vulgar de movimiento en el Cálculo[67].

5 Va a ser Aristóteles el primero en destacar expresamente la solidaridad entre lo continuo (συνεχὲς) y lo ilimitado (ἄπειρον). Lo continuo es, en él, aquello donde primeramente se manifiesta lo ilimitado, aunque ya Platón, en el *Parménides*, reflexiona sobre la inevitable ilimitud del número una vez que se haya negado la discretitud o el ser del Uno. En efecto, en este diálogo[68] Platón nos habla del retorno de la ilimitud en una pluralidad en la que no hay un Uno que contenga la caída en la continuidad[69]. Lo que Aristóteles afirma explícitamente es, de este modo, razonado también por su maestro Platón. Tal y como se habrá vislumbrado, esta última lectura que estamos presentado tiene como presupuesto la subsunción de las posiciones del "Uno es" y del "Uno no es" del *Parménides*, bajo los momentos de lo discreto y de lo continuo respectivamente.

En todo caso, la matemática no cuenta –ni tampoco la filosofía– con el fácil recurso de las ciencias empíricas en las cuales es suficiente un movimiento deíctico para asignar el valor del vacío, del hueco llamado προτεθεῖσα εὐθεῖα o *vnité* del que hablaran tanto Euclides como Descartes. Este simple llenado no está, sin embargo, lo suficientemente definido por esos otros deícticos que son las fracciones como para evitar que se nos presente un topólogo maligno con la firme intención de convertir toda figura izquierda en su incongruente derecha en cuanto se encuentre con una agujero irracional. Ni la matemática, ni la filosofía, pueden verse satisfechas con la ridícula ayuda de los discipulos del viejo Diógenes quienes nos intentaban convencer de la imposibilidad de que, se haga lo que se haga, se gire por donde se gire, una mano derecha pueda pasar a ser una mano izquierda, recurriendo para ello a mostrarnos las dos manos en los dos sitios distintos. Antes de que se llegue a las manos, en algún lugar[70] que es, para decirlo con Kant, *a priori*, se juega la imposibilidad/posibilidad de la citada rotación impropia, así como la posibilidad/imposibilidad del movimiento local.

Un ejemplo del mencionado llenado puro o no empírico lo constituyen los principios de conservación de magnitudes. Por hacer uso del ejemplo que nos es más cercano, el principio de conservación del movimiento es definido por Newton de la siguiente forma: "todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme excepto cuando es obligado a cambiar de estado por fuerzas impresas". El verbo "perseverar" refleja la idea de que en *todo* tiempo en el que no actúen fuerzas el cuerpo no cambia de estado. Esto significa que en cada momento en el que el cuerpo haya cambiado de estado es necesario buscar una fuerza como causa de tal cambio de estado. En definitiva, el que en la formulación del principio de inercia se hable de perseverar introduce una alusión a un "en todo momento" que no va a resultar de ningún modo inocente en la posterior aplicación del cálculo infinitesimal en la estimación de las fuerzas motrices. Ello se debe a que la otra cara del "en todo momento", del "perseverar" de la primera ley es la posibilidad de pasar a hablar de fuerzas

[67] Piénsese, por ejemplo, en Spehr. Cf. sobre esto el apartado 4.3.1.
[68] Cf. 164d.
[69] Podría decirse con Hegel, "la caídad en la mala infinitud".
[70] En un lugar desde el que, 1) quedan definidos los números reales y 2) se afirme el hecho de encontrarse tal espacio lleno con el fin de evitar que la figura derecha consiga convertirse en su contrarparte izquierda desapareciendo, en una continua transformación, por tal punto. Sobre la necesidad de este "desaparecer" cf. Gauss [1900] p. 248.

que actúan constantemente[71]. Así, la fuerza que actúa en un cambio que cambia constantemente, tal y como ocurre, por ejemplo en una fuerza *aceleradora*, será una fuerza que actúa asimismo constantemente o “en todo momento”. Con el fin de remarcar el paralelismo, podríamos renombrar a tal fuerza de “perseverante”. A su vez, el hecho de que el llenado del tiempo del que más arriba se ha hablado puede darse en un tiempo infinitesimal, es decir, el hecho de que la fuerza actúa en un tiempo que, por definición, es infinitamente divisible, hace que la solución al problema que se nos está presentando, el de los infinitesimales de fuerzas como condición de posibilidad de las fuerzas constantes, sea resuelto por el mismo cálculo que resolverá el problema del movimiento instantáneo. Este cálculo es el Cálculo infinitesimal.

Es otra vez Platón el que presentará en el *Parménides* (*156c-d*) los antecedentes de este razonamiento definiendo el instante (ἐξαίφνης) como el lugar del cambiar o devenir (μεταβάλλω). La única diferencia con respecto al razonamiento que hemos reproducido en el párrafo anterior es que, para Platón, el problema es el del surgimiento del movimiento desde el reposo y no el del cambio de movimiento en cuanto tal. La aceleración resultante de que algo que estaba en reposo pase a estar en movimiento deja aturdido al que pretende responder a la pregunta por el “dónde se da ese pasar”. El recurso de Platón al instante de insólita naturaleza (φύσις ἄτοπός) no puede dejar de recordar los paradójicos “momentos” de Newton donde las razones entre las magnitudes cesaban o comenzaban a ser. Del mismo modo que Platón recurre al instante cuando, unas líneas antes, habla de los fenómenos del “llegar a ser” (γίγνομαι) y del “perecer” (ἀπολλύω), Hegel nos hablará de los diferenciales como resultado concreto de la dialéctica del Ser y de la Nada.

6 El material bibliográfico ha sido dividido en dos categorías: por una lado las fuentes –bibliografía primaria– por el otro los estudios –bibliografía secundaria–[72]. Aunque los estudios sobre el tema de nuestra tesis puedan contarse con los dedos de una mano[73], los artículos y trabajos monográficos sobre el desarrollo del Cálculo son lo suficientemente numerosos como para hacer olvidar que en un trabajo de investigación hay que priorizar trabajar con las fuentes[74]. Esto es algo que hemos intentado cumplir en esta tesis. La bibliografia fuente constituirá el centro sobre el que gira nuestra investigación. En los casos en los que el trabajo de reconstrucción textual era especialmente complicado, hemos recurrido

[71] “nach und nach” como decía Kant.

[72] Reconocemos que no siempre resulta claro si una obra pertenece al conjunto de las fuentes o al de los estudios. Lo importante para nosotros es, sin embargo, que el conjunto de los libros indecidibles sea lo suficientemente despreciable.

[73] Los libros –no artículos– dedicados al tema “Hegel y el cálculo” son: Gómez Pin [1984], Moretto [1984], Moretto [1988] y Rehm [1963]. El primer libro de Moretto se limita a la nota de la primera edición mientras que el segundo amplia el campo de estudio a las tres notas de la segunda edición. El trabajo de Gómez Pin es un comentario línea por línea de las notas de la segunda edición. El estudio de Rehm es un trabajo de doctorado breve y no demasiado interesante. Mención aparte merece el trabajo de doctorado de Francisco Xavier Miranda publicado hace pocos años: *La interpretación filosófica del Cálculo Infinitesimal en el Sistema de Hegel*, Pamplona, 2003. Durante la lectura de este libro nos hemos encontrado con pasajes cuyo contenido nos era sospechosamente conocido. Como queda muy feo lanzar tal acusación sin presentar las pruebas de ello, he aquí el resumen de las correspondencias: páginas 154-161 de Miranda son traducción de las páginas 173, 174, 186-190 de Stekeler [1992a], páginas 207-215 de Miranda son traducción de las páginas 224-230 de Stekeler [1992], páginas 257-260 de Miranda son traducción de las páginas 205-207 de Wolff [1986], páginas 275-280 de Miranda son traducción de las páginas 233-238 de Stekeler [1992] y la nota 353 de la página 302 de Miranda es –¡esta vez sin traducir!– la nota 7 de la página 201 de Wolff [1986]. Bajo estas condiciones, no reconoceremos como interlocutor válido de nuestra tesis a este trabajo, si bien es verdad que tomamos esta decisión sabiendo que no perdemos nada por ello.

[74] Algo que se olvida también en la carrera de filosofía en donde la *manualitis* terminará –si no lo ha hecho ya– por destruir la carrera desde dentro.

también a estudios monográficos[75]. Suponiendo en el lector la competencia para ello, no hemos traducido las citas de las obras escritas en lenguas distintas al griego y al latín[76]. Con ello nos hemos visto liberados de un considerable trabajo de exégesis que, o bien no resultaba relevante en nuestra investigación, o bien formaba ya parte de nuestra exposición.

[75] Pensamos, por ejemplo, en el monumental trabajo de Panza [2005] que ha sido clave en la redacción del capítulo 6. En relación a la *Wissenschaft der Logik*, nos hemos servido, en mayor o menor medida, de Duque [1998], Carlson [2007] y Marzoa [1973].

[76] En los casos en los que no existe una traducción al castellano del texto en latín hemos provisto, siempre que tal cosa era posible, la traducción en un idioma moderno.

EINLEITUNG

1 Es kein Zufall, dass im 17. Jahrhundert die Entstehung der auf die Unendlichkleinen begründeten Rechnung zeitlich mit der Entstehung der klassischen Mechanik zusammenfiel. Es ist auch kein Produkt des blinden Zufalls, dass der infinitesimalistischen Auffassung der Größen historisch der Vorstellung der Indivisibilien vorangegangen ist. Den Unterschied zwischen diesen beiden Auffassungen kann man anhand des Wandels erläutern, den die Cavalieris[77] Kalkül der Flächenvergleichung durch Torricelli erfuhr. Wie allgemein bekannt[78], benutzte Cavalieri eine gewisse Regel (*regula*) genannte Gerade, die sich, aus der Ecke einer Figur ausgehend, parallel mit sich bewegte, bis sie den *tangens opposita* dieser Figur traf. Wenn sowohl die Regeln als auch die entgegengesetzten Tangenten, zwischen denen die beiden Figuren einbeschrieben sind, jeweils auf einer Linie liegen, dann ist die Proportion zwischen den Regeln der Figuren auf die Flächen der Figuren übertragbar. Cavalieri behauptete nicht – dies könnte er auch überhaupt nicht –, dass eine Fläche aus unteilbaren Teilen besteht. Was er lediglich behauptet, ist, dass zwei zueinander heterogene und in sich homogene[79] Proportionen gleich sind. Erst Torricelli hat begonnen, über die Dicke der Linien zu sprechen und die *Regula* und die Flächen als homogene Größen zu betrachten. Auf diese Weise war es nun möglich, zu behaupten, dass die jeweilige Fläche aus der Gesamtheit der Linien besteht. Aufgrund der Unfähigkeit der Methode Cavalieris, zu Ergebnissen zu gelangen, die für andere Darstellungsweisen offensichtlich waren, sah sich Torricelli gezwungen, über die für die klassische Geometrie nicht darstellbaren Begriffe, wie etwa die „Dicke einer Linie“, oder die „Höhe einer Fläche“, zu sprechen.

So war Torricelli, wenn er die Gleichheit von zwei aus der Diagonalen geteilten Rechteckstücke zu beweisen versuchte, dazu gezwungen, Cavalieris *regula* durch eine Gerade zu ersetzen, die in Abhängigkeit von der Diagonalen verschiedene Dicken annehmen kann. Nur so sind die zwei Regeln, also die beiden Geraden, die die Figuren durchlaufen, nicht mehr parallel, sondern stehen senkrecht aufeinander. Die auf die Indivisibilien beruhende Methode Cavalieris benutzte dasselbe Zeitatom in der Verschiebung der Regel[80], nämlich dasselbe Atom innerhalb jeder Figur und zwischen den beiden Figuren. Dies es ermöglichte es ihm, dieses unteilbare[81] Element aus der Proportion zu entfernen und die sukzessive Verschiebungsbewegung auf einen Blick, das heißt. simultan zu erfassen. Die Proportionalität

---

[77] Es spielt für unser Thema keine Rolle, dass Cavalieri eigentlich auch die Volumina miteinander verglich.

[78] In meinen nachfolgenden Überlegungen wende ich mich einigen nicht veröffentlichten Arbeiten von J.J. Rodriguez Fraile zu.

[79] Längen auf der einen Seite, Flächen auf der anderen.

[80] Die Identität der Zeit wird durch die Identität der Dicke der Gerade dargestellt. Es ist zu beachten, dass die Bedeutung dieser Gleichheit erst in einem System erscheinen kann, in dem es auch möglich ist, mit verschiedenen Dicken zu rechnen; und dies wird erst bei Torricelli der Fall sein. Es ist interessant zu bemerken, dass die Vorschrift Cavalieris, wonach die beiden Figuren der auf denselben Geraden liegenden Regel und der entgegengesetzten Tangenten einbeschrieben werden sollen, die Gleichheit der Zeitatome –der Zeit, nämlich, der Verschiebung nämlich– ermöglichte.

[81] Da das Atom innerhalb jeder Figur dasselbe ist, kann man es herausziehen. Da dasselbe Atom in beiden Figuren operiert, taucht es auch im Nenner und im Zähler auf, und man kann es daher kürzen.

zwischen den Regeln beider Figuren gewährleistete, dass die Nachfüllgeschwindigkeit in beiden Figuren die gleiche war. Wenn man außerdem bedenkt, dass die beiden Nachfüllungen gleichzeitig geschehen –was durch die Gleichheit der Zeitatome gewährleistet war– dann folgt daraus, dass der gefüllte Raum –in unserem Fall die Fläche– in beiden Figuren gleich sein soll. Sowohl bei Torricelli als auch bei Cavalieri wird eine gemeinsame Zeit der Verschiebung impliziert. Bei Torricelli wird diese Zeit durch die Gleichheit der Abschnitte der Diagonale dargestellt. Diese Zeit bzw. diese Diagonale betreffend, werden wir auf beiden Seiten der Diagonalen verschiedene Proportionen haben. Wenn diese Proportionen[82] gleich sind –oder wenn, wie bei Cavalieri, die Längen der Regeln gleich sind– dann werden auch die Flächen eine Gleichheitsproportion besitzen. Was bei Cavalieri in zwei Dimensionen geschah, wird sich bei Torricelli auf drei[83] Dimensionen erweitern. Das Problem dabei ist jedoch, dass diese Änderung auf mehr als eine bloße Komplexitätssteigerung hindeutet. Mit anderen Worten: Der Unterschied zwischen Cavalieri und Torricelli ist ebenso wie der Unterschied zwischen der Beschleunigung und der Geschwindigkeit nicht in quantitativer Hinsicht zu verstehen.

So wie wir nicht wissen können, welche von zwei gegebenen Geschwindigkeiten größer oder kleiner ist, ohne die Gleichheit der Kadenz[84] der Zeit, auf welcher sie gemessen sind, vorauszusetzen, so konnte Cavalieri auch nicht behaupten, dass die Flächen der durchlaufenen Figuren gleich sind, ohne die Gleichheit der Zeitatome seiner Regeln vorauszusetzen. Und so wie Cavalieri, um die beiden Flächen auf einen Blick miteinander vergleichen zu können, diese Zeit zu entfernen vermag, so können auch wir zwei Geschwindigkeiten miteinander vergleichen, indem wir sie auf einen gemeinsamen Nenner[85] zurückführen und als Folge davon die Nenner beider Proportionen herauskürzen und demzufolge das Merkmal der Proportion[86], so zu sagen, daraus entfernen. Durch den Vergleich verschiedener Geschwindigkeiten beziehungsweise Flächen, konnte man nun sowohl die Geschwindigkeiten als auch die Flächen auf einen Blick erfassen. Auf diese Weise war ein unmittelbarer Vergleich zwischen zwei verschiedenen Größen möglich.

Im Falle Torricellis wurde, wie gesagt, die allgemeine Basis beziehungsweise die gleiche Kadenz habende Zeit durch gleichgroße Abschnitte auf der Diagonalen dargestellt. Auf dieser Grundlage verglich er die Verhältnisse bzw. die unterschiedlich dicken Linien miteinander. Dies bedeutete jedoch, dass bei Torricelli das, was die Zeit mehr oder weniger ausfüllt nicht wie bei Cavalieri die Länge, sondern die Fläche[87] ist. Auf diese Weise war das, was man bei Torricelli auf der Grundlage derselben Zeit vergleicht, nicht etwas quasi Eindimensionales, sondern etwas, was einen Verhältnischarakter hat. Dieser Verhältnischarakter verschwindet bei Torricelli nicht –ganz im Gegensatz zu Cavalieris Methode, die es ermöglichte, die Zeitatome beider Figuren zu eliminieren– da die Linien unterschiedlich dick sind[88].

[82] Proportionen, die durch die verschiedenen Parallelepipede ausgedrückt sind.

[83] Die eindimensionalen Elemente Cavalieris, die Längen, die auf die atomisierte Zeit bezogen sind, sind bei Torricelli zweidimensionale Elemente.

[84] Was im Falle der Zeit die Anwendung gleicher Einheiten erfordert.

[85] Nämlich dieselbe Kadenz habende Zeit.

[86] Analog dazu drückt der in jeder Zahl vorausgesetzte Verhältnischarakter –beispielsweise bei den natürlichen Zahlen, 3=3/1, 2=2/1, usw.– nichts anderes aus, als dass alle sich auf dieselbe Einheit beziehen. Im Falle Cavalieris beziehen sich alle Geschwindigkeiten auf dieselbe Zeit.

[87] Es ist zu beachten, dass die Fläche, mit welcher die Figur quadriert wird und die Fläche welche man quadriert homogen sein sollen.

[88] Es ist wahr, dass wir mit Hilfe der Regeldetri Parallelepipede mit gleicher Einheitsdicke bauen können, wenn wir unterstellen, dass die verschiedenen Größen der Linien unterschiedliche Zeiten darstellen. Damit können wir die Relation auf die gleiche Einheit zurückführen, welche, wie bei Cavalieri, aus der Relation entfernt werden kann. Wir haben also jetzt kein Verhältnis der Verhältnisse mehr, sondern ein Verhältnis, das mittels einer

Was hier zunächst etwas spitzfindig wirkt, ist nicht anderes, als die Beschreibung des Verfahrens mit dessen Hilfe es möglich ist, ein Verhältnis wie das der Beschleunigung durch eine Zahl[89], auszudrücken. Ähnlich wie man auf der Grundlage der gleichen Zeit verschiedene Geschwindigkeiten miteinander vergleichen kann –oder, wie bei Cavalieri, auf der Basis der gleichen Zeit über unterschiedliche oder gleiche Nachfüllgeschwindigkeiten sprechen kann–, so kann man dank der gemeinsamen Zeit –auf deren Grundlage die Änderung der Geschwindigkeit[90] gemessen werden kann– auch über eine größere oder kleinere Beschleunigung sprechen. In ähnlicher Weise war es für Torricelli auf Grund der Tatsache, dass die Zeiten[91] der Verhältnisse gleich sind, möglich, über die Gleichheit der Nachfüllbeschleunigungen und nicht mehr die der Nachfüllgeschwindigkeiten zu sprechen, was die Gleichheit der Flächen bewies.

Dieser Verhältnischarakter[92], welcher voraussetzt, dass zwei Verhältnisse auf der Basis einer gemeinsamen Zeit in Beziehung zueinander gesetzt werden, ist das Merkmal, welches die mit Newton begonnene wissenschaftliche Revolution am besten zum Ausdruck bringt. Im Rahmen der Mechanik wird man dann nicht nur über die Gewichte und den Lageraum[93] sprechen, sondern auch über die Kräfte und die orientierte Zeit[94]. Die Statik der Antike wird abgelöst durch die Dynamik der Moderne. In der Infinitesimalrechnung ist das Äquivalent dieser Verhältnisstruktur der Differentialquotient. Hegel gelang es in seinem Hauptwerk, der *Wissenschaft der Logik,* den nicht reduzierbaren Verhältnischarakter des Differentialquotienten zu beweisen. In diesem Werk, wird der Differentialquotient diejenige Figur sein, mit der die Rückkehr der Quantität in der Qualität anfängt[95]. Diese Rückkehr zu dem –oder Setzen von dem–, was in dem quantitativen Verhältnis nur unmittelbar war, findet im Kapitel „Maß“ statt.

2 Wenn man in der Schule zum ersten Mal mit der Infinitesimalrechnung in Berührung kommt, regen sich Zweifel und ein Gefühl von Erstaunen. Eine Rechnung, die den Lehrer in Erklärungsschwierigkeiten bringt, sobald er die Bedeutung ihres wichtigsten Begriffs eläutern will –nämlich den des Differentials *dx*–, und die außerdem so leistungsfähig ist, dass mit ihrer Hilfe die verwickeltsten Maximierungs- oder Rektifikationsprobleme, die Quadratur des Kreises, oder die augenblickliche Geschwindigkeit eines Körpers mühelos berechnet werden können, lässt niemanden gleichgültig. Die auf diese Weise geweckte Neugier wird sogar noch größer, wenn man entdeckt, dass die Schwierigkeiten, die mit der Aneignung der Grundlagen dieses Kalkuls verbunden sind, die nicht auf die Endlichkeit des Einen oder die Unfähigkeit des Anderen zurückzuführen sind, sondern in der Sache selbst zu suchen sind.

gemeinsamen Zeit, dargestellt durch Atome der Diagonale, mit einem anderen Verhältnis verglichen werden kann.

[89] Es ist nur unter dieser gemeinschaftlichen Einheit möglich –das heißt, auf Grund der Tatsache, dass die Zeit der Geschwindigkeit und die Zeit der Änderung der Geschwindigkeit sich voneinander wie x von x^2 unterscheiden– dass die folgende übliche Gleichung richtig ist: $\frac{d(v)}{dt} = \frac{d\left(\frac{s}{t}\right)}{t} = \frac{d^2s}{d^2t} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

[90] Das heißt, über eine größere oder kleinere Beschleunigung.

[91] Diese Zeit wird durch die Diagonale dargestellt.

[92] Ein Charakter, dessen Paradigma die Beschleunigung ist.

[93] Die Entfernung –der Raum– der Gewichte vom der Unterstützungspunkt des Hebels ist physikalisch durchhaus nicht irrelevant.

[94] Ist auch keineswegs gleichgültig ob der Fall der Kugel, die gegen den Marmorstisch stößt, vorher oder nachher angefangen hat.

[95] Etwas, was auch mit dem folgenden Satz auszudrücken versucht wird: „Der Differentialquotient ist die Einheit der Qualität und der Quantität“.

Dementsprechend entdeckt man später, dass der wissenschaftliche Charakter dieser Rechnung zu Beginn des 18. Jahrhunderts Gegenstand hitziger Diskussionen in der Pariser Akademie der Wissenschaften[96] war, oder dass die Akademie der Wissenschaften von Berlin Preise ausschrieb, um denjenigen, die die Grundlagen der Rechnung am besten darzustellen vermochte, auszuzeichnen, oder dass Mathematiker wie Leibniz oder Newton in zahlreichen Briefen die verschiedenen Kritiker dieses Calculus zu widerlegen suchten. Blickt man zurück, so wundert man sich, dass das, was die verschiedenen physischen Kräfte[97] in einen mathematischen Ausdruck zu bringen vermag –nämlich, das was der Physik ihre wissenschaftliche Form verleiht– solchen Diskussionen unterworfen worden war.

Man könnte zusammenfassend sagen, dass der Ursprung dieser Schwierigkeiten darin liegt, dass im mathematischen Formalismus eine Entität eingeführt wird, das heißt, etwas, das einfach weil es ist, etwas Bestimmtes, Endliches sein soll– das mit Attributen der Unendlichkeit –insbesondere mit Zügen des Unendlichkleinen – verhaftet ist. Im Gegensatz zur heuristischen Anwendung des Unteilbaren –eine Anwendung, die auf Archimedes zurückgeht– ist die Einführung des Unendlichkleinen zu Beweiszwecken schon bei Kepler zu finden. Das Unendlichkleine wird schon seit seinen ersten Formulierungen[98] auf eine paradoxe Weise definiert. Einerseits sollte in dem Lösungsprozess eines Problems das eingeführte Unendlichkleine etwas sein, das heißt, es sollte einen von Null verschiedenen Wert annehmen, andererseits aber erforderte die Bedingung der Lösung des Problems zum Schluss die Gleichsetzung dieses Etwas mit Null, das heißt, das Verwandeln vom dem Sein in Nichts. Das heißt, einerseits war das Unendlichkleine eine Veränderliche, die, als solche, von Null verschiedene Werte nehmen sollte, andererseits, dasselbe Unendlichkleine sollte auch Null sein, falls genaue Ergebnisse zu erwarten waren. Das, was, so beschrieben, den Eleven der Infinitesimalrechnung einen Anschein von unstrengen Verfahren erweckt war trotzdem, kraft den von dieser Rechnung verschafften[99] Ergebnissen, akzeptiert. Wir werden im Abschnitt 4.2.4 dieser Arbeit sehen, dass es, um diesen Widerspruchsaspekt wegzuräumen, hilfreich sein wird, eine Analogie zwischen der Verfahrensweise der Mathematiker und dem Gebrauch des Prinzips der virtuellen Verrückung von einem Physikern, hervorzukehren. Dafür genügt es, das mathematische Problem so zu verstehen, als hätte es die Beschreibung eines Gleichgewichtszustandes eines Systems als Ziel. Dieses Problem zu lösen ist dann mit dem Ermitteln der ersten oder letzten Verhältnisse des Gleichgewichtszustands gleichbedeutend. Auf diese Weise können wir den vereinzelten Gebrauch des Unendlichkleinen –das heißt, den Gebrauch außerhalb seiner Verhältnisse mit einem anderen Unendlichkleinen– vermeiden. Die Aufgabe, die sich Hegel in der *Wissenschaft der Logik* sich stellt, ist gerade die notwendige Unzulänglichkeit jenes ungerechtfertigen Gebrauchs –eines Gebrauchs, der durch den mathematischen Formalismus ermöglicht wird– des Unendlichkleines zu zeigen.

Das Problem des Unendlichkleinen, wenn man es als ein Projekt für die *Ontologisierung* der Unendlichkeit betrachtet, nimmt die folgende Form an. Das Unendlichkleine, nämlich, das was kleiner als jede gegebene Größe sein kann, besitzt einerseits den Prozesscharakter eines Algorithmus, dessen unvollendete Eigenschaft[100] es uns erlaubt, über sie zu behaupten,

---

[96] Vgl. Mancosu [1989].

[97] Man denke zum Beispiel an die Arbeiten von Ampere oder Maxwell –zwei Beispiele respektive, aus der Elektrostatik und der Elektrodynamik. Die Arbeit diesem Physikern beruht auf die Hydrodynamik, die ohne der Calculus, unvorstellbar gewesen wäre.

[98] Wir denken zum Beispiel an Fermat oder an Descartes.

[99] Das heißt diejenigen Ergebnisse die, ohne die Anwendung der Unendlichkleine, schon von der Alten ermittelt wurden.

[100] Unvollendete Eigenschaft, die sich auf verschiedene Weise ausdrücken lässt. Zum Beispiel, indem man sagt, dass es immer möglich ist eine Größe zu finden die kleiner als eine gegebene Größe ist, oder indem man sagt,

dass sie das Vermögen nach[101] Unendlich sei. Andererseits aber, die Lösung der verschiedenen Probleme erfordert die Negation des unvollendeten Charakters des Unendlichkleinen. Auf diese Weise muss der Prozess schließlich zum Ende kommen, der Algorithmus ohne Rest schließen und die Unendlichkeit nach Vermögen Unendlichkeit *in actu* werden. Dieser Übergang aus der Unendlichkeit *in potentia* zur Unendlichkeit *in actu*, wird in jedem Grenzprozess unterstellt und zum ersten Mal in der Exhaustionsmethode von Euklid vollgezogen. Dementsprechend wird das Unendlichkleine als dasjenige Veränderliche oder diejenige Folge definiert, deren Grenzwert Null ist[102].

Es ist jetzt angemessen, kurz über eine gewisse Äquivalenz[103] zwischen der Exhaustionsmethode der Alten und dem modernen Gebrauch des Unendlichkleinen nachzudenken. Mit diesem Vergleich wird klarer werden was Hegel mit der Behauptung sagen wollte, dass das Unendlichkleinen der Ausdruck eines Widerspruchs sind. Wie jeder weiß, ermöglicht es die Exhaustionsmethode, eine Fläche *S* oder ein Volumen *V* einer geometrischen Figur zu ermitteln, indem sie den Widerspruch aller möglichen Wertabweichungen[104] von dem vorgeschlagenen Wert beweist. Mit Hilfe der Exhaustionsmethode kann man die Gleichheit von zwei Größen –die gesuchte und die vorgeschlagene– beweisen, indem die Ungleichheit als solche –sei es wegen Überschuss oder Unterschuss– sich als widersprüchlich erweist. Das heißt, es wird bewiesen, dass zwei Dinge –die Fläche oder das Volumen– gleich sind auf Grund der Tatsache, dass jeder Unterschied zwischen beiden Dingen zu einem Widerspruch führen würde. Der Grenzübergang, worüber im vorherigen Absatz die Rede war, besteht gerade darin, dass das *Absurdum* nicht nur für jeden Unterschied, sondern auch für alle Unterschiede beweisen wird. Ebenso wie die Exhaustionsmethode, macht nun auch das Unendlichkleine Gebrauch von dem Widerspruch, oder, besser gesagt, es ist der Ausdruck des Widerspruchs. Der Widerspruch ist im Unendlichkleinen miteinbegriffen. Auf dieser Weise könnte man die der Exhaustionsmethode unterstellte Idee auch durch das Unendlichkleine ausdrücken, indem man sagt, dass in der Grenze das Verhältnis zwischen der Fläche mit Überschuss und der Flache mit Unterschuss ein Verhältnis der Gleichheit ist.

Die Infinitesimalien, außerhalb ihrer Verhältnisse, das heißt, für sich allein betrachtet, sind etwas Widerspruchsvolles, und man könnte den Eindruck gewinnen, dass sie diesem Widerspruch entrinnen könnten wenn sie sich annullierten, das heißt, sich der Null gleichsetzten. Die Annullierung des Widerspruchs ist eine leere Negation, die das Nichts als Ergebnis erhält. Der Versuch, dem Widerspruch durch die unmittelbare Negation zu entkommen, ist eine Folge davon, dass die Infinitesimalien als außerhalb von Quotienten bestehende Wesen gefasst worden sind, als handelte sich um Zuwächse. Eine solche Interpretation ist aber zum Scheitern verurteilt. Wenn das Unendlichkleine der zu einer Größe mitgeteilte Zuwachs ist, dann versteht man nicht, wie die Rechnung notwendigerweise genaue Ergebnisse ermitteln kann. Und es gilt nicht zu sagen, wie Carnot[105] sagen wird, dass die verschiedenen Fehler während sich der Operationen gegenseitig ausgleichen, weil diese Interpretation ein Ungewissheitsmerkmal in die Rechnung einführen würde, die der Mathematik nicht eigen ist. Man sieht nicht, aus welchem Grund die Ausgleichung der Fehler

dass keine rationale oder reale Zahl ein Nachbarzahl besitzt, oder indem man sagt, dass es keine letzte reale Differenz gibt, usw.

[101] Über die Rolle der Unterscheidung zwischen der so genanten „potentielle Unendlichkeit“ und der „aktualen Unendlichkeit“ bei Aristoteles siehe Abschnitt 2.2.

[102] Das wird ausdrücklich von Cauchy verwirklicht. Vgl. den Abschnitt 4.3.1.

[103] Vgl. zu diesem Punkt die Einführung zu Kapitel 7.

[104] Wertabweichungen, die die Form eines Überschusses oder eines Unterschusses annehmen werden.

[105] Vgl. Abschnitt 4.2.4.

etwas Notwendiges sein sollte, das heißt, man versteht nicht, wieso die Ergebnisse des Calculus eine Gewissheit besitzen könnten[106].

Gegenüber einer solchen Beseitigung des Widerspruchs des Unendlichkleinen, wo es als ein Zuwachs betrachtet wird, ist die Negation des Widerspruchs, die Hegel entwickelt, eine bestimmte Negation, das heißt, eine Negation, die den Widerspruch des Unendlichkleinen aufhebt und nicht bloß eliminiert. In der *Wissenschaft der Logik*, ist die Aufhebung einer Figur in und durch die folgende eine Negation, in welcher die zweite Figur der ersten Figur nicht fremd ist, und zwar weil die Negation nicht von außen her gesetzt ist. Diese Aufhebung oder bestimmte Negation des Unendlichkleines ist der Differentialquotient[107]. Wenn also das Unendlichkleine den dialektischen Moment der Unendlichkeit des Quantums darstellt, wird sich der Differentialquotient als ihr spekulativer Moment erweisen. Der Unterschied zu der vorigen Stellungnahme besteht darin, dass jetzt die Differentiale, also die Infinitesimalien, unabhängig oder außerhalb des Verhältnisses mit anderen Differentialen keine Selbständigkeit besitzen. Und mit mangelnder „Selbständigkeit“ wollten wir nichts anderes ausdrücken als „Wahrheit“. Wir haben tatsächlich dieselbe Idee geäußert, wenn wir sagen, dass das Unendlichkleine den dialektischen Moment der Unendlichkeit des Quantums darstellt. Und das deswegen, weil bei Hegel die Behauptung, dass etwas widersprüchlich sei, dasselbe ist wie die Behauptung, dass dieses etwas einseitig sei oder Momentcharakter hat. Kurz, der Widerspruch ist die Regel der Wahrheit, nicht aber die Wahrheit selbst und er ist insofern nicht selbständig.

Gewiss, die Betrachtung dieses Verhältnischarakters des Differentialquotienten ist, in seiner oberflächlichsten Form, nicht Hegels Verdienst. So hatten die Mathematikern L’Huilier[108], Euler oder Newton schon vor Hegel eine Deutung der verschwindenden Größen vertreten, die die Wichtigkeit betont, diese in einem Verhältnis zueinander zu betrachten. Hegel wusste, dass Newton in seiner *Principia* diese These vertrat und pries den englischen Physiker dafür. Das Problem ist jedoch, dass Newton, so wie Euler oder L’Huilier, den Quotienten der verschwindenden Größen als etwas Gegebenes akzeptiert, während es Hegel gerade darum geht, dass dieser bewiesen –das heißt bei Hegel erzeugen[109]– werden muss. Wenn die Sachlage anders aussähe, wenn es nur darum ginge, die erste Person zu finden die mit mehr oder weniger Erfolg und Motivation, die Wichtigkeit davon ausdrückte, dass die verschwindende Größen innerhalb eines Verhältnissausdrucks betrachtet werden sollen, dann wäre unsere Aufgabe zu einfach, viel zu einfach.

Doch darum soll es in der vorliegenden Arbeit nicht gehen. Es geht nicht darum, die Wichtigkeit, die, wenn man so will, außerordentliche Wichtigkeit dessen zu betonen was wir vorgefunden haben. Der eigentlich wissenschaftliche Teil eines Diskurses ist nicht der, in dem der Inhalt die Form der Gegebenheit annimmt, sondern der, in dem die Notwendigkeit des Inhalts bewiesen wird. In der Erkenntnis nach Prinzipien ist der Beweis der Notwendigkeit des Inhalts von Etwas aber dasselbe wie der Beweis der Notwendigkeit dieses Etwas. [110]. Die

---

[106] In der Tat, wir werden in dem Abschnitt über Carnot sehen, dass seine Interpretation Fehlerausgleichsrechnung nichts anderes ist als eine andere Fassung der hegelsche Interpretation des Differentialquotienten, wo die Irrtum und ihre Ausgleichung die zwei Seiten der Quotienten sind.

[107] Wir werden Abschnitt 3.1 dieser Deduktion von Hegel widmen.

[108] Derselbe, der im Jahr 1784 den Preis der Akademie von Berlin gewann.

[109] Und nicht darum, weil es in Hegel das ganze Seiende –so zu sagen, aus dem Sein– generiert werden soll –Hegel ist kein Philosoph-der-sich-alles-aus-den-Finger-saugt, nein– sondern, weil der Differentialquotient etwas ganz Bestimmtes ist bei Hegel, nämlich, ein Begriff, und weil der Begriff doch etwas ist was die Generation verlangt und sogar erlaubt. Auf dieser Weise, der Schwerpunkt der Forschungen verschiebt sich auf die Frage nach der Bedeutung des „Begriff“ Begriffs bei Hegel.

[110] Sei es dieses Etwas der „Sauerstoff“, der „Planet Venus“, das „Positron“, die „Mehrwert“ oder die „Libido“.

von Hegel unternommene Aufgabe, die darin besteht, einen mathematischen Begriff wie den Differentialquotienten zu beweisen –und zwar durch die interne Vermittlung des Begriffs–, gehört daher eigentlich zum wissenschaftlichen Diskurs. Ein solcher Beweis bezweckt nicht, die Wichtigkeit dieses mathematischen Werkzeugs zu belegen, sondern versucht, vielmehr seine Notwendigkeit zu beweisen, indem sein vorausgesetzter Begriff gesetzt wird[111]. Damit wird auch gleichzeitig bewiesen, dass man den Inhalt des deduzierten Begriffs in Rücksicht nehmen müsste. Letztendlich besteht diese Wichtigkeit einfach darin, dass der Begriff in seiner wahren Figur betrachtet werden sollte. Wer dies alles vergisst, nämlich, wer keine Rücksicht auf den Inhalt des in der *Wissenschaft der Logik* generierten Differentialquotienten nimmt, wird zur Finsternis der Widersprüche geführt. Die philosophiegeschichtliche Äußerung dieser Widersprüche findet in den so genannten Paradoxien von Zenon[112] eine ausgezeichnete Erscheinungsform.

Die Bewegungsparadoxien von Zenon beabsichtigen nicht, die logische Unmöglichkeit der Bewegung zu zeigen, sondern beweisen vielmehr die Widerspruche, in welche der Verstand sich verwickelt, wenn er einen einseitigen Zugang zur Bewegung wählt. Das Problem liegt nach nach Hegel[113] jedoch darin, dass dieser einseitige Zugang keine freie Wahl des Verstandes ist, sondern, seine Eigentümlichkeit darstellt. Im Fall der Bewegung, besteht die Einseitigkeit des Verstands darin, dass er auf einer Seite die Kontinuität –bzw. die Zeit– und auf der anderen Seite die Diskretion –bzw. den Raum– setzt[114]. Gleich wie eine einseitige Betrachtung der Seiten des Differentialquotienten zu Widersprüchen führt, so führt auch die einseitige Betrachtung der Zeit und des Raums, sei es in Form der Unteilbaren –diskreter Aspekt– sei es in die Form der Unendlichkleinen –kontinuierlicher Aspekt[115]–, zu den von Zenon ausgedrückten Widersprüchen. Es ist deswegen wichtig, erstens, sowohl die Zeit als auch den Raum –der Nenner und Zähler des Quotienten– *gleichzeitig* als diskret und als kontinuierlich zu fassen, und, zweitens, sowohl die Zeit als auch den Raum nicht auf einseitige Weise zu betrachten. Man musste sowohl die Zeit als auch den Raum mit einer Figur begreifen, die sie notwendigerweise miteinander in Verbindung zu setzen vermag. Die erste Aufgabe löst man mit der Figur des Quantums oder der bestimmten Quantität. In dieser letzten Figur wird der Widerspruch zwischen der Kontinuität und der Diskretion aufgehoben[116]. Diejenige Figur, deren Form selbst das Verhältnis zweier Quanta in ihrem werdenden Zustand ist und die es ermöglicht die Zeit auf den Raum und den Raum auf die Zeit zu beziehen, diese Figur ist der so genannte Differentialquotient. Diese Form, wenn sie auf die Quanta „Zeit“ und „Raum“ angewendet wird, ergibt als „Geschwindigkeit“[117] benannten Differentialquotient. Auf diese Weise sind die Paradoxien von Zenon, oder besser

---

[111] Über den Begriff „das Setzen“ bei Hegel siehe die Fußnote 154.
[112] Wir haben im Abschnitt 2.1 versucht, eine systematische Auffassung der Paradoxien zu geben.
[113] Gleichwie bei Kant die Vernunft wesentlich dialektische ist.
[114] Die vier Einseitigkeiten sind: 1) Diskretion der Zeit, Kontinuität des Raums, 2) Kontinuität der Zeit, Diskretion des Raums, 3) Diskretion der Zeit, Diskretion des Raums und 4) Kontinuität der Zeit und des Raums. Wir werden in dem zweiten Kapitel sehen, dass sich zwischen diesen Figuren und den vier Paradoxien von Zenon eine Entsprechung bauen lässt.
[115] Zumindest hinsichtlich des Unendlichkleinen ist nicht ganz einfach das was in der Logik Eins ist auseinanderzuhalten. Das ist der Grund dafür, warum das Moment der Diskretion immer –sei es aus Tat oder aus Unterlassung– in der Definition des Unendlichkleinen auftaucht. In einem begrifflichen Ganzen, das wir Kontinuierlich-Diskret nennen können, markiert das Unteilbare den zweiten Aspekt, während das Unendlichkleine den ersten Aspekt hervorhebt (nämlich, die Möglichkeit, eine Gerade stets erneut in kleinere Strecken zu teilen, oder, stets erneut eine Zahl zu finden, die kleiner ist als eine gegebene Zahl ist, usw.)
[116] Vgl. Abschnitt 3.1.
[117] Im Abschnitt 3.3.1 werden wir sehen, dass diese Behauptung nicht mehr gültig ist, wenn die Funktion, die die Geschwindigkeit eines Körpers darstellt, linear ist, und dass die angebliche Ableitung dieser Funktionen ein durch den Formalismus ermöglichter Schein ist.

gesagt, die Widersprüche, die durch sie ausgedrückt[118] sind, mittels der Infinitesimalrechnung aufzuheben. Es ist deswegen wichtig zu betonen, dass Hegel –der die Paradoxien von Zenon in größerem Maß schätzt, als die Antinomien von Kant–, die Notwendigkeit einsieht, diese Widerspruche –Widerspruche, die nichts anderes als reine Verstandesprodukte sind– zu überwinden.

3 An diesem Punkt erscheint es mir wichtig zu sein, näher auf die Bedeutung des Wortes „Aufheben" im Zusammenhang mit dem Differentialquotienten einzugehen. Wenn man sagt, dass der Differentialquotient eine vorherige Figur oder ein Moment aufhebt, wollen wir nichts anderes sagen, als dass dieser Quotient *nach* einer vorhergehenden Figur erscheint (in der *Wissenschat der Logik*). In diesem Sinn gehört die Aufhebung von Etwas in und durch Etwas zu dem Bereich dessen, was nach Hegel Logik genannt werden könnte. Man kann aber im Bezug auf den Differentialquotienten das Wort „Aufheben" auch benutzen, um die Tatsache auszudrücken, dass eine Theorie Teil einer anderen Theorie ist oder in einer anderen absorbiert ist. Es handelt sich hier nicht darum, dass eine Theorie, experimentell gemessen, durch eine einfachere ersetzt werden kann[119], sondern darum, dass auf einer unendlichkleinen Ebene eine Theorie in einer anderen Theorie inbegriffen sein kann. Zwei Beispiele werden uns helfen das vorherige zu verstehen. Das erste Beispiel wird uns in dieser Arbeit beschäftigen[120] und wir werden uns demgemäß mit ihm jetzt nicht lange befassen. Es handelt sich um die Form, in welcher gleichförmige Bewegungen und Gleichgewichtszustände –auf einer infinitesimalen Ebene– durch beschleunigte Bewegungen und Ungleichgewichtszustände aufgehoben werden. Wenn das Prinzip der virtuellen Verrückungen den Gleichgewichtszustand als den letzten oder ersten Zustand des Ungleichgewichtszustands[121] zu betrachten erlaubt, können wir die Zustände von stetiger nicht-Gleichgewichte als Zustände von stetiger Ungleichgewichte betrachten. Auf dieser Art, ein dynamischer Zustand wird als eine Folge von sukzessiv oder stetig aufgebrochenen Gleichgewichtszuständen charakterisiert sein. Wir könnten daher sagen, dass –kraft des Differentialquotienten[122]– der statische Zustand in dem dynamischen aufgehoben, das heißt, aufgenommen worden ist.

Dieser letzte Sinn von „Aufhegen" erlaubt uns demsprechend zu behaupten, dass die spezielle Relativitätstheorie (SRT) in der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) aufgehoben sei. Auf die gleiche Weise wie der dynamische Zustand eine Folge[123] von Gleichgewichtszuständen ist, ist die ART eine Folge von Zuständen in welchen die SRT obwaltet[124]. Das bedeutet wiederum, dass in der ART die SRT auf einer infinitesimalen Ebene gültig ist[125]. Und dies wird sich in der Tatsache ausdrücken, dass in der ART, innerhalb einer

---

[118] Wir verstehen hier unter Widerspruch das Komplex von zwei komplementäre Paradoxien, und unter Paradoxon, die logische Widerlegung einer gemeinverständlichen These. Zwei Paradoxien sind komplementär, wenn die Prädikate, die benutzt worden sind um das Argument zu widerlegen, ein Diskursfeld auf eindeutige und vollständige Weise bestimmen.

[119] Man kann daher, genau genommen, nicht behaupten, dass für verhältnismäßig kleine Geschwindigkeiten des Systems, die SRT durch die Mechanik von Newton ersetzt werden kann. Die „Verhältnismäßigkeit" bezieht sich hier auf die Messgeräte über die man jeweils verfügt. Aus diesem Grund behauptet diese Ersetzung nicht etwas was der Sache selbst eigen ist, d. h., etwas, das Teil der Theorie ist.

[120] Siehe das Kapitel 7.

[121] Etwas das, wie wir es sehen werden, sich auf „letzte und erste Verhältnisse" von Newton bezieht.

[122] Um die Rolle des Differentialquotienten in diesem Zusammenhang zu verstehen, siehe den Abschnitt 7.3.

[123] Eine Folge, deren Regel durch den Feldgleichungen der Gravitation bestimmt wird.

[124] Es wird hier mit SRT auch die newtonsche Mechanik einbegriffen, da die erstere nichts anderes ist als die letztere, unter der Voraussetzung, dass die Lichtgeschwindigkeit für alle Bezugsysteme konstant sein muss.

[125] Daher könnte man sagen, dass die euklidische Geometrie in der allgemeinen relativistischen Geometrie aufgehoben –und nicht, wie man oft hört, durch sie widerlegt– worden ist. Das heißt, die euklidische Geometrie ist auf einer infinitesimalen Ebene in der ART gültig. Vgl. Lanczos [1986] p. 21.

infinitesimalen Region, das Gravitationsfeld nicht wirkt[126]. Gegen diese These kann nicht behauptet werden, dass die Struktur, mit deren Hilfe die SRT in der ART aufgehoben wird, kein Differentialquotient ist, sondern aus einem Verhältnis von Differentialen besteht[127]. Dieses Gegenargument vergisst, dass der Kernpunkt nicht in der Anzahl der *relata* liegt, sondern darin, ob es sich um ein Verhältnis handelt oder nicht. Außerdem werden wir in unserer Darstellung des Prinzips der virtuellen Verrückung[128] sehen, dass infinitesimale Verhältnisse von mehr als zwei *relata* sich in letzter Instanz auf die Verhältnisse von zwei *relata* zurückführen lassen[129].

Wir sehen also, dass ein Begriff –die Aufhebung–, der auf Hegel zurückgeht, imstande ist, die Beziehung einer Theorie mit einer anderen Theorie zu erklären, die auf den ersten Blick eine „Widerlegung" zu sein schien. Es ist wahr, dass Hegel selbst den Begriff „Aufhebung" in dem oben angegebenen Sinn und in den Beispielen nicht benutzt –und, im zweiten Beispiel, nicht benutzen kann. Hegel hätte von der Darstellung der analytischen Mechanik, die Lagrange in seinem *Méchanique Analitique*[130] gibt, Bescheid wissen können. Die Sache ist aber die, dass in dem gesamten Werk von Hegel keine Spur dieses Prinzips zu finden ist. Aus diesem Grund werden wir im siebten Kapitel versuchen, diese Lücke zu füllen, indem wir eine *hegelianische* Interpretation dieses Prinzips anbieten werden[131]. Dieses Kapitel ist außerdem das Vorspiel des achten Kapitels, wo wir die Gründe einer –auf die Habilitationsschrift zurückgeführten– falschen Behauptung Hegels untersuchen werden, die uns Anlass dazu geben wird, auf einige physische Begriffe, die noch immer unklar sind, ein neues Licht zu werfen.

4 Wir haben unsere Arbeit in zwei Hauptteile geteilt. Der erste davon, der den Titel „Begriff" trägt, ist im Grunde genommen ein Kommentar des ersten Buches des ersten Teils der *Wissenschaft der Logik*. Wir haben in diesem Kommentar die von Hegel veröffentlichten zwei Ausgaben benutzt –die erste von 1812 und die zweite von 1832. Eine Studie über die Abweichungen dieser beiden Ausgaben voneinander lag außerhalb des Rahmens dieser Arbeit. Daher habe wir während der Darstellung auf beide Ausgaben zurückgegriffen. In den Fällen, wo die Unterteilung der Kategorien beider Ausgaben unterschiedlich ist, oder wo die inhaltlichen Unterschiede nicht zu übersehen sind, haben wir die zweite Ausgabe bevorzugt. Wir sind der Meinung, dass die dargebotene Darstellung konkret genug ist um dem Leser das Verständnis derselben nicht durch unnötige Probleme verstellt zu haben, außer den Problemen, die aus der Sache selbst entstanden sind.

Die Darstellung des ersten Buches ist mit Anmerkungen versehen, die manchmal wichtig genug sind, um einen gesonderten Abschnitt zu Bilden: manchmal sind es aber nur bloße Fußnoten. Einmal ist eine Anmerkung aus dem Haupttext ausgeschieden und zu einem getrennten Kapitel geworden. Das ist der Fall beim Kapitel, wo wir uns mit den so genannten „Zenonischen Paradoxien" beschäftigt haben. Diese Paradoxien bilden so etwas wie die Veranschaulichung eines Teils der Widersprüche der Quantität. Das bedeutet, dass der

---

126 Siehe über dieses Thema Einstein [1996] S. 76 und S. 292, Einstein [1916] S. 788 und 789 sowie Einstein [1969] S. 64 und 65.

127 Nämlich, das Verhältnis zwischen dem Linienelement *ds*, dem Differential der Zeit und den Differentialen der drei räumlich-kartesische Koordinaten: $ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$.

128 Vgl. Abschnitt 7.3.

129 Die Verhältnisse zwischen mehr als zwei Unendlichkleinen führen sich letzten Endes auf den Differentialquotienten zurück.

130 Es ist zu beachten, dass die erste Ausgabe dieses Werkes 1788 erschien.

131 Eine *hegelianische* Deutung dessen, was auch nicht bei Hegel zu finden ist, sind die im zweiten Abschnitt gegebenen Paradoxien von Zenon. Diese Deutung wird sich –zumindest teilweise– gegen Hegels eigene Deutung richten. Über diesem Punkt vgl. die Fußnoten 1669 und 1709 des neunten Kapitels.

Differentialquotient –nämlich jene Figur, die am Ende dieser Kategorie auftaucht– die Aufhebung der von diesen Paradoxien ausgedrückten Widersprüchen ist. Außer diesem Kapitel haben wir den Haupttext mit verschiedenen Abschnitten versehen, in denen wir Hegel in einen Dialog mit anderen, für unseren Thema relevanten, Philosophen gesetzt haben. Eine Ausnahme bilden hierbei die zweite kantische Antinomie: dieser Dialog ist nicht explizit bei Hegel zu finden. So ist zum Beispiel der Unterschied zwischen dem Zahlbegriff bei Kant und bei Hegel etwas, was wir, nicht Hegel selbst, formulieren. Dasselbe gilt auch für die Frage nach dem Rechtszustand –im ersten Kapitel– oder nach der Verwandtschaft der intensiven Größe bei Kant und bei Hegel[132] –innerhalb des ersten Kapitels. Diese letzte Frage wird uns Veranlassung dazu geben, uns mit einer sanktionierten These auseinanderzusetzen, wonach die kantischen intensiven Größen mit dem Begriff des Differentials gleichzusetzen seien.

Außer diesem Dialog mit Kant haben wir auch versucht, den Zusammenklang der hegelschen und der leibnizschen Begriffe des Potenzenverhältnisses für den Leser hörbar zu machen. Zu diesem Behuf haben wir uns bemüht zu zeigen, dass dieses Verhältnis für beide Philosophen die Einheit der Qualität und der Quantität ausdrückt. Ähnlich wie im Verhältnis zu Kant, ist das, was Hegel von Leibniz unterscheidet, nichts anderes als der generative Charakter in welchem die logischen Momente bei Hegel nacheinander folgen. Das ist der Grund dafür, dass bei Hegel die in dem Potenzenverhältnis ausgedrückte Einheit der Quantität und der Qualität–im Unterschied zu Leibniz– nicht etwas Unmittelbares, sondern vielmehr ein Resultat ist. Schließlich werden wir die Diskussionsrunde mit einem Vergleich zwischen dem Strukturbegriff der modernen Linguistik und dem Differentialquotienten schließen. Hiermit werden wir den Teil abschließen, dessen Aufgabe es war, den Begriff des Differentialquotienten zu ermitteln. Die Aufgabe, mit der wir uns im vierten Kapitel beschäftigen werden, besteht darin, den durch die Hauptfiguren der Mathematik in den letzten vier Jahrhunderten benutzten Begriff des Differentials mit dem im Kapitel 3 erschaffenen zu vergleichen. Das bedeutet aber, dass unsere Untersuchung sich nicht auf diejenige Autoren beschränken wird, mit denen sich Hegel tatsächlich auseinandersetzt hat, sondern, dass wir außerdem eine Exkursion in die Begründungsarbeiten der Analysis von Cauchy und Weierstraß[133] machen werden, um zu sehen, was die beiden Mathematikern zum hegelschen Differentialquotienten zu sagen haben.

Unseren Kommentar der *Wissenschaft der Logik* mit der Figur zu beenden, die der Zweck unserer Arbeit ist –nämlich, unsere Arbeit mit dem Differentialquotient zu schließen–, wäre nicht nur zu abrupt, sondern ginge auch gegen ein richtiges Verständnis dieser Figur. Um eine logische Figur im Sinne Hegels zu verstehen, muss man nicht nur begreifen, wie sie entstanden ist, sondern auch erkennen, worauf diese Figur sich projiziert. Dieser Hintergrund ist, in letzter Instanz das Ganze des Rückkehrprozesses des Absoluten zu sich selbst. Das heißt, der Hintergrund –warum sollen wir es leugnen– ist die ganze *Wissenschaft der Logik*. Offensichtlich wäre es übertrieben, die ganze *Logik* darzustellen und zu kommentieren, es läge auch jenseits des Rahmens dieser Arbeit. Das ist der Grund dafür, dass wir –obwohl wir uns der Willkürlichkeit solcher Entscheidungen bewusst sind– uns dazu entschlossen haben, die Entwicklung der Logik bis zum dritten und letzten Hauptabschnitt der *Lehre vom Sein* zu

[132] Um Missverständnisse zu vermeiden, sei es schon jetzt gesagt, dass es sich nicht darum handelt, dass ein Autor einen Begriff der Quantität besitzt und der andere einen anderen, sondern dass die Voraussetzungen, unter denen jeder seinen eigenen Begriff aufbaut, verschieden sind. So, dass die Zeit und der Raum, die wichtigsten Abwesenden der *Wissenschaft der Logik* sind, der Zahlbegriff bei Hegel wird etwas für Kant so Sinnloses sein wie eine Einheit ohne Mannigfaltigkeit. Gleichermaßen bestehen die verschiedenen Auffassungen der intensiven Größe bei Hegel und Kant, hauptsachlich in der notwendigen Beziehung, die bei Hegel zwischen der intensiven Größe und der extensiven Größe bestehen wird. Wir sahen im Abschnitt 3.1.2.1, dass es auch bei Kant Reste solcher Beziehungen gibt, obwohl sie nicht, wie bei Hegel, die Form der „Generation" annimmt.

[133] Vgl. Abschnitt 4.3.

verfolgen: nämlich bis zum Maß[134]. Die Willkürlichkeit dieser Entscheidung erweist sich geringer als die von anderen Entscheidungen wenn wir daran denken, dass das Maß diejenige Kategorie ist, in welcher das Sein sich zu sich selbst kehrt oder, was dasselbe hieße, zum Wesen übergeht. Das heißt, dass das Maß ein Rückkehrmoment –das vom Sein– innerhalb des gesamten Ruckkehrprozesses bildet: Sein-Wesen-Begriff. Die Darlegung des Maß-Kapitels wird es uns ermöglichen, die Einheit der Quantität und der Qualität besser zu verstehen –eine Einheit, deren mathematischer Ausdruck der Differentialquotient ist– und wird uns außerdem Veranlassung dazu geben, eine Parallele zwischen diesem Kapitel und dem *Philebos* von Platon einerseits, und dem ersten Band des *Kapitals* andererseits, zu ziehen.

Der zweite Teil unserer Promotionsarbeit trägt den Titel „Realität". Mit diesem Wort wollten wir uns nicht auf den hegelschen Begriff *Wirklichkeit*[135] oder auf den kantianischen Begriff *Realität*[136] beziehen. Der Ausdruck „Realität", in dem von uns gegebenen Sinn, ist weniger anspruchsvoll. Das bedeutet, dass in diesem zweiten Teil alles das einbezogen wird, was nicht ein Teil des Kommentar oder der Darstellung ist, jedoch innerhalb des hegelschen Diskurses über den Differentialquotient liegt. Das heißt, ähnlich wie die *Théorie des Fonctions Analytiques* von Lagrange aus zwei Grundteilen bestand –der erste der syntaktische, in welchem er die Algorithmen der Rechnung bewies, und der zweite, der semantische, in welchem er diese Algorithmen auf die Physik und auf die Geometrie anwandte– haben wir auch unsere Arbeit in zwei Teile geteilt: der erste ist mehr begrifflich, der zweite mehr konkret[137] und sogar geschichtlich.

Wir werden diesen Teil mit der Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des Begriffs des Differentials bei dem Autor beginnen, der den hegelschen Differentialbegriff im höchsten Grad geprägt hat. Ich beziehe mich hierbei auf Newton. Wir sind davon überzeugt, dass unser Wiederaufbau-Programm[138] für den Gedankengang Newtons hilfreich sein wird, um die Kernbegriffe für die Rechnung –wie den der Funktion oder den der Größe– zu verstehen. Wir werden auch sehen, welche Rolle die Zeit am Anfang der Entstehung der Rechnung spielen wird. Der Endzweck des Kapitels besteht darin, dem Ursprung der Untrennbarkeit der verschwindenden Größen bei Newton nachzuspüren. Hiermit wollten wir den mathematikgeschichtlichen Ursprung eines Kernbegriffs der *Wissenschaft der Logik* an einem Autor erforschen, der den Schlüssel für den hegelschen Differentialquotienten darstellt.

Die Kapitel 7 und 8 bilden eine gesonderte Einheit. Innerhalb des zweiten Teils, in welchen es um die Semantik des Quotienten geht, beschäftigten sich diese beiden Kapitel mit der Frage, wie der Differentialquotient die Entstehung des Paradigmas der modernen Wissenschaft ermöglicht hat: die Physik. Damit wollten wir nicht behaupten, dass andere

---

[134] Es sieht so aus, als ob all die Interpreten des Differentialbegriffs von Hegel sich darüber geeinigt hätten, dieses Moment der *Logik* nicht zu behandeln. Der bedeutendste Fall ist, vielleicht, der von Gómez Pin (siehe Gómez Pin [1984]). Das Einzige was er es darüber sagt –man muss aber gestehen, wiederholt– ist in etwa Folgendes: „das Maß ist die nächste Treppenstufe nach der Einheit der Quantität und Qualität".
[135] Wenn das so wäre, würden sich der erste und der zweite Teil dieser Arbeit notwendigerweise überlappen.
[136] Das heißt, Realität im Sinn von *quiditativer* Inhalt.
[137] Wir sind uns darüber bewusst, dass der Unterschied zwischen der Syntax und der Semantik nicht ganz zu dem was in der *Wissenschaft der Logik* geschieht, passt, wo man vielmehr über eine Syntax sprechen könnte, die ihre eigene Semantik erzeugt. Wir sind uns auch darüber bewusst, dass der Verfasser in dem ersten Teil ganz konkrete Themen behandelt hat, und dass diese nicht ausschließlich dem zweiten Teil zugehören. Die Sache ist aber die, dass die Beispiele und Probleme die im ersten Teil behandelt wurden, Teil der Anmerkungen Hegels über den Differentialquotienten sind, und weshalb es sich notwendig zeigte, sie zu erklären.
[138] Diese Arbeit würde schwer verwirklichbar sein wenn man nicht über die denkwürdige Ausgabe der mathematische Arbeiten Newtons von D.T. Whiteside verfügte.

Wissenschaften ihren wissenschaftlichen Charakter nicht dieser Rechnung verdanken[139], sondern dass die Wissenschaft, die zum ersten Mal eine mathematische Umformung erfährt, eine Wissenschaft ist, die über Kräfte und Beschleunigungen spricht. In großem Maß ist die Mathematisierung anderer exakten Wissenschaften erst dadurch möglich geworden, dass sie auf die Physik zurückgeführt worden sind oder, weil sie geometrisierte Darstellungen benutzen, die die Anwendung der Rechnung möglich machen[140].

Der theoretische Inhalt dieser beiden Kapitel handelt von zwei Grundprinzipien der Physik. Das erste Prinzip ist das so genannte Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Wir werden sehen, dass dieses Prinzip erst von Galileo formuliert wurde, und dass mit Lagrange dieses Prinzip eine Hauptrolle in der Physik einnimmt, nachdem er ihm eine moderne mathematische Formulierung gab. Das zweite Prinzip ist das so genannte „Prinzip von d'Alembert". Wir werden dieses Prinzip so darstellen, dass es als Übergang von dem siebten zum achten Kapitel fungiert. Zu diesem Zweck werden wir hervorheben, dass dieses Prinzip dasselbe ausdrückt, wie der „glücklichste Gedanke" Einsteins[141]. Der Zweck dieses achten Kapitels ist es, die Gründe zu verstehen, weshalb Hegel fälschlicherweise die Austauschbarkeit der Zentrifugal- und der Zentripetalkraft[142] behauptet hat. Dafür wird es nötig sein, einige Fragen über das Bezugsystem, die träge und schwere Masse, klar zu stellen und zu beantworten.

Das letzte Kapitel dieser Arbeit, das kürzeste, ist die Darstellung der Generation der Begriffe der Zeit, des Raum, der Materie und der Bewegung bei Hegel. Wir haben zu diesem Zweck die verschiedenen Ausgaben der *Enzyklopädie*[143] benutzt, in welchen Hegel, mit mehr oder weniger vielen Änderungen, diese Deduktion darstellt. Mit diesem Kapitel wollten wir den Kritikern die Stirn bieten die behaupten, dass die angeblich dynamische Auffassung von Hegel –spätestens seit Cauchy– widerlegt worden sei. Wir werden sehen, dass der Bewegungsbegriff bei Hegel nichts zu schaffen hat mit dem Begriff seiner Kritiker. Dass ist der Grund dafür, dass Hegel selbst den vulgären Bewegungsbegriff im Calculus nicht akzeptieren wird[144].

5 Aristoteles hebt zum ersten Mal den Zusammenhang zwischen dem Kontinuum (συνεχὲς) und der Unendlichkeit (ἄπειρον) hervor. Das Kontinuum ist für Aristoteles das, worin die Unendlichkeit zuerst erscheint. Es ist aber interessant zu sehen, dass Platon in seinem Dialog *Parmenides* die Unendlichkeit aus der Voraussetzung des Nichtseins der Diskretion oder des Eins ableitet. Der Fall in die Kontinuität[145] ist also nicht zu vermeiden, wenn man das Eins nicht zur Verfügung hat. Was Aristoteles in einer Definition ausdrückt, ist also schon von seinem Lehrer Platon angedeutet worden. In dieser Lektüre unterstellen wir

---

[139] Gerade das Gegenteil, die mathematische Auffassung der *res extensa* sowie der *res intensa*, erheischt die Infinitesimalrechnung.

[140] Zum Beispiel, in den Wirtschaftwissenschaften, wo in den Nutzungsfunktionen und in der Berechnung der Elastizität die zweite Ableitung benutzt wird. Es bleibt offen, ob nur deswegen weil eine Wissenssammlung diese Rechnung benutzt, sie sich notwendigerweise in eine Wissenschaft verwandelt, oder ob es auch vorkommen kann, dass die Begriffe eines Wissens exakt definiert sind –dass sie sich sogar mit dem Calculus berechnen lassen–, obwohl ihr Ursprung bloß fetischistisch sei.

[141] Vgl. Einstein [2002] p. 265. Die Problemstellung dieses Gedankens führt, letzten Endes, zu der ART.

[142] Wir werden sehen, dass es sich nicht darum handelt, ob diese Kräfte vertauschbar sind oder nicht, sondern darum, dass ihre Vertauschbarkeit das jeweilige Bezugsysteme in Betracht ziehen sollte.

[143] Wir werden auch dazu die Notizen gebrauchen, die verschiedene Teilnehmer der *Naturphilosophie*-Vorlesungen von Hegel aufgenommene hatten.

[144] Wir denken, zum Beispiel, in Spehr. Vgl. dazu den Abschnitt 4.3.1.

[145] Man könnte dies mit Hegel „der Fall in der schlechte Unendlichkeit" nennen.

gewiss, dass die Aussagen „das Eins ist" und „das Eins ist nicht" gleichbedeutend sind mit „die Diskretion ist" und „die Kontinuität ist".

Die Mathematik –und auch die Philosophie– verfügt *leider* nicht über die in den empirischen Wissenschaften üblichen Hilfsmittel, mit deren Hilfe eine einfache Hindeutungsbewegung genügt, um dem Leeren, dem von Euklid und Descartes προτεθεῖσα εὐθεῖα oder *vnité* genannten Lücken, einen Wert zuzuschreiben. Die bloße Erfüllung durch die rationelle Zahlen –sozusagen theoretischem *Pointern*– reicht leider nicht hin, um die Begegnung mit einem boshaften Topologen zu vermeiden, der jede linkseitige Figur in seine inkongruente rechtsseitige Figur transformiert, sobald er eine irrationale Lücke gefunden hat. Weder die Mathematik noch die Philosophie können sich nicht mit der lächerlichen Hilfe der Schüler von Diogenes zufrieden geben. Diese versuchten uns davon zu überzeugen, dass es unabhängig von der den Händen mitgeteilten Bewegung, unmöglich sei, eine linke Hand in eine rechten zu transformieren, indem sie uns als Beweis die beiden Hände an den verschiedenen Armen zeigten. Bevor es zu einem Handgemenge kommt, in einem Ort[146], der, mit Kant auszudrücken, *a priori* ist, entscheidet sich die Unmöglichkeit oder Möglichkeit solcher uneigentlichen Drehungen.

Ein Beispiel der oben genannten reinen oder nicht empirischen Erfüllung sind die Prinzipien der Erhaltung der Größen. Das gewöhnlichste Beispiel, das Prinzip der Erhaltung der Bewegung, wurde von Newton folgenderweise definiert: „Jeder Körper verharrt in seinem Zustand des Ruhens oder des Sich-geradlinig-gleichförmig-Bewegens, außer insoweit wie jener von eingeprägten Kräften gezwungen wird, seinen Zustand zu verändern". Das Zeitwort „verharren" drückt die Tatsache aus, dass in jeder Zeit, in der keine Kräfte wirken, der Körper keine Zustandänderung erleiden wird. Das bedeutet aber, dass in jedem Augenblick, in dem eine Zustandänderung stattgefunden hat, nach einer Kraft gesucht werden muss, die sich als Ursache dieser Änderung erweisen wird. Schließlich deutet die Tatsache, dass in der Formulierung des Trägheitsprinzips von "Verharrung" gesprochen wird die Rede ist, auf ein "in aller Zeit" hin, das in der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die bewegende Kräfte nicht harmlos sein wird. Der Grund dafür liegt darin, dass dieses „in aller Zeit", nämlich die „Verharrung" im ersten Gesetz von Newton, die Bedingung der Möglichkeit der Existenz einer allmählich wirkenden Kraft ist. Auf dieser Weise, ist die Kraft, die eine allmählich ändernde Änderung bewirkt –was, zum Beispiel, die Beschleunigung hervorbringt–, eine beschleunigende Kraft, die selbst allmählich oder „in aller Zeit" wirkt. Um die Analogie zu betonen, wir könnten diese Kraft „verharrende" Kraft nennen. Zudem bezieht sich oben genannte Erfüllung auf eine unendlich kleine Zeit, d.h. die Kraft wirkt in einer *per definitionem* unendlich teilbaren Zeit. Aus diesem Grund lässt sich das Problem, dass so etwas wie in einem Augenblick wirkende konstante Kräfte möglich sind, mit derselben Rechnung lösen wie das Problem der augenblicklichen Bewegung: mit der Infinitesimalrechnung.

Platon ist wiederum der Vorläufer dieser Argumentation[147], indem er den Augenblick (ἐξαίφνης) als den *Ort* der Änderung (μεταβάλλω) definiert. Der einzige Unterschied besteht darin, dass für Platon das zu lösende Problem in der Entstehung der Bewegung aus der Ruhe, nicht in der Bewegungsänderung liegt. Die Beschleunigung die daraus folgt, dass etwas was in Ruhe sich fand in Bewegung gesetzt hat, erstaunt derjenige der über das "wo" dieses

[146] Für diesen Ort muss gelten, dass alle Punkte –und in diesem „alle" sind die reellen Zahlen einbegriffen– erfüllt sind, so dass die linke Figur nicht durch Verschwinden in einem Punkt in die rechte Figur übergehen kann. Über die Notwendigkeit dieses „Verschwindens" siehe Gauß [1900] p. 248.
[147] Siehe *Parmenides* 156c-d.

Setzens fragt. Das Mittel von Platon zur Lösung dieses Problem, nämlich der so genannte Augenblick von ungewöhnlichen Natur (φύσις ἄτοπός), erinnert wohl an jene Momente von Newton, in welchen die Größen entstanden oder vergangen sind. Gleich wie Platon, der beim Augenblick Zuflucht nimmt, wenn er über das "Werden" (γίγνομαι) oder das "Vergehen" (ἀπολλύω) sprechen muss, wird Hegel über die Differentiale als eine Konkretisierung der Dialektik des Seins und des Nichts sprechen.

6 Die Literaturangabe wurde in zwei Gruppen geteilt: einerseits die Quellen –die Primärbibliographie– und andererseits die Studien –die Sekundarbibliographie[148]. Obwohl man die Arbeiten über das Thema unserer Forschung mit einer Hand abzählen kann[149], sind die Aufsätze und monographischen Arbeiten über die Entstehung und die Entwicklung der Analysis zahlreich genug, um in Vergessenheit zu bringen, dass man in einer Forschungsarbeit die Auseinandersetzung mit den Quellen bevorzugen sollte[150]. Wir haben in unserer Arbeit versucht, auf diesen Rat Rücksicht zu nehmen. Das ist der Grund dafür, dass unsere Forschungsarbeit sich um die Primärliteratur dreht. In den Fällen, in welchen sich die Wiederherstellungsarbeit eines Textes als besonders schwer erwies, haben wir auch zu den monographischen Arbeiten Zuflucht genommen[151]. Wir haben außerdem beim Leser die dazu benötigte Bekanntschaft vorausgesetzt und dementsprechend nur diejenigen fremdsprachigen Texte übersetzt, die entweder auf Griechisch oder auf Latein geschrieben worden sind. Mit dieser Entscheidung haben wir uns von einer Exegesearbeit befreit, die entweder für unsere Forschung irrelevant oder zum Teil schon in den Kommentar mit einbegriffen war.

[148] Wir geben zu, dass es nicht immer klar sein wird, ob ein Werk zu der Sekundär- oder der Primärliteratur gehört. Das für uns Wichtige aber ist, dass die Menge dieser uneindeutigen Bücher verhältnismäßig klein wird.

[149] Die Arbeiten –die Aufsätze ausgeschlossen– die sich ausschließlich mit dem Thema „Hegel und das Calculus" sich beschäftigen sind folgende: Gómez Pin [1984], Moretto [1984], Moretto [1988] und Rehm [1963]. Das erste Buch von Moretto ist auf die erste Ausgabe der *Logik* beschränkt, während das zweite das Untersuchungsgebiet auf die zweite Auflage erweitert. Die Arbeit von Gómez Pin ist eine Kommentar, Zeile für Zeile, der Anmerkungen der zweiten Ausgabe der *Logik*. Die Untersuchung von Rehm ist eine kurze und nicht besonders prächtige Promotionsarbeit. Die vor wenigen Jahren erschienene Arbeit von Francisco Xavier Miranda, *La interpretación filosófica del Cálculo Infinitesimal en el Sistema de Hegel*, Pamplona, 2003, verdient eine besondere Erwähnung. Während der Lektüre dieses Buches haben wir Stellen gefunden, deren Innhalt uns verdächtigerweise bekannt vorkam. Da es nicht schön ist, jemanden zu beschuldigen, ohne die Beweise dafür zu ermitteln, bieten wir hier das Verzeichnis dessen, was wir gefunden haben: Seiten 154-161 von Miranda sind spanische Übersetzung der Seiten 173, 174, 186-190 von Stekeler [1992a], Seiten 207-215 von Miranda sind spanische Übersetzung der Seiten 224-230 von Stekeler [1992], Seiten 257-260 von Miranda sind spanische Übersetzung der Seiten 205-207 von Wolff [1986], Seiten 275-280 von Miranda sind die spanische Übersetzung der Seiten 233-238 von Stekeler [1992] und die Fußnote 353 der Seite 302 ist –dieses Mal ohne zu übersetzen! –die Fußnote 7 der Seite 201 von Wolff [1986]. Es ist wahr, dass für Miranda das, was er da macht keine Originalitätsmängel an ihm zeigt, da, wie der Autor in der Einleitung sagt: „in dieser Welt „Gibt es nichts Originales. Nur Gott ist das Original". Das heißt, wir sind alle ursprünglich Plagiatoren –Sünder–, und daher macht es keinen Sinn, gut zu Handeln –oder sogar das Gute zu tun. Unter diesen Umständen, haben wir diese Arbeit nicht als gültigen Gesprächspartner anerkannt, obwohl wir diese Entscheidung erst dann getroffen haben, nachdem wir wussten, dass wir damit nicht verlieren werden.

[150] Etwas, das auch bei den Philosophiestudien vergessen wird, wo die *Abhandlungskrankheit* bald –wenn, nicht schon jetzt– dieses Fach von innen her verderben wird.

[151] Wir denken, zum Beispiel, an die großartige Arbeit von Panza [2005], die in dem Schreibprozess des sechsten Kapitels eine Schlüsselrolle spielen wird. Im Bezug auf die *Wissenschaft der Logik* haben wir uns über folgender Arbeiten bedient: Duque [1998], Carlson [2007] und Marzoa [1973].

1ª Parte: Concepto

1. CAPÍTULO

LA CATEGORIA DE LA *CANTIDAD* EN LA *WISSENSCHAFT DER LOGIK*

ἡ δὲ νόησις ἡ καθ᾽ αὑτὴν
τοῦ καθ᾽ αὑτὸ ἀρίστου[152]

El objetivo de este primer capítulo no es otro que el de ofrecer una exposición de la primera edición[153] de la *Wissenschaft der Logik* que llegue hasta la categoría de la Cantidad (*die Quantität*). Como no se puede pretender comenzar el estudio de la categoría de la Cantidad sin haber considerado previamente los momentos que lo preceden en el desarrollo de la *Wissenschaft der Logik,* hemos tenido que dedicar este capítulo a obtener[154] primero el concepto de la Cantidad. Para ello hemos comenzado por el inicio[155] de la *Wissenschaft der Logik* obteniendo como resultado una sucinta exposición del primer apartado del primer libro titulado *Die Lehre vom Sein*. Nuestro estudio se detendrá en el segundo capítulo del segundo apartado o *Quantum*. El estudio de este capítulo de la *Wissenschaft der Logik* lo realizaremos en el segundo capítulo de esta primera parte.

---

[152] Cf. Aristóteles, Metafísica 1072b18. Como se sabe, esta es parte de la cita con la que termina Hegel la edición de 1832 de su *Enzyklopädie*.

[153] En este primer capítulo, las desviaciones del texto de la edición de 1812 con respecto a la de 1832 no resultan significativas. Por esta razón, nuestra lectura, mientras no se diga lo contrario, se ceñirá a la primera edición.

[154] O lo que en términos de Hegel se diría “poner” (*Setzen*). Efectivamente, la entera *Wissenschaft der Logik* no es otra cosa que la puesta del Absoluto desplegando para ello todas sus mediaciones, digamos, internas. Si hacemos uso de la doctrina spinoziana, esta última idea se podría expresar diciendo que se trata de hacer del Absoluto una *causa sui*. Cf. al respecto Hegel [20] p. 167. Poner equivale así en Hegel a causar, a generar. Tanto es así que en sus *Lecciones de Filosofía de la Religión* (en Hegel [17] p. 35) Hegel hablará del poner del mundo por Dios. El poner de algo se contrapone al “en sí” de ese algo (cf. al respecto por ejemplo Hegel [17] p. 124: “Das Setzen dessen, was im Kunstwerk an sich ist, ist nun der Kultus”); en este sentido, la tarea de la lógica es la de ver cómo se llega a poner, ver como llega a ser para sí, lo que era exclusivamente en sí. Cf. al respecto Hegel [16] p. 262: “Dies Hervorbringen dessen, was an sich ist, ist das Setzen des Begriffs in die Existenz”. Esto último remite además a la definición de la *causa sui* en Spinoza (aquello cuya esencia encierra su existencia). En definitiva, el término griego que podría verter mejor el *Setzen* de Hegel bien podría ser el de ποιέω: “hacer, construir, engendrar, producir, causar, poner”.

[155] Para la distinción entre “comienzo”, “principio” e “inicio” cf. Duque [1998] p. 605-606. Digamos que si bien el comienzo de la *Wissenschaft der Logik* es el *Sein*, su inicio es el *Werden*, el “llegar a ser” o “devenir”.

El que el concepto de cantidad, como todo concepto en general, tenga que ser resultado de una deducción es algo que sitúa a Hegel frente a la filosofía crítica y del lado de Fichte. Este último había defendido[156] para la filosofía una evidencia genética frente a una evidencia fáctica. Esta última evidencia es la que caracterizaría a la filosofía crítica. Recordemos[157] que la evidencia fáctica se econtraba con un *Faktum*[158] que era a su vez un *ius*, una validez, por cuyas condiciones de posibilidad se preguntaba el filósofo. Podríamos definir y definimos este proceder no genético como *epagógico*. En Kant los *Fakta* en cuestión son el *Faktum* conocimiento y el *Faktum* decisión. La respuesta a estas dos cuestiones consistirá con ello en señalar hacia aquello que rige de antemano en todo conocimiento y en toda decisión: la tarea kantiana es dar con la forma, lo *apriori*, del conocimiento y de la decisión. El dar con esa forma, el que la forma se haga contenido, es decir, el que la validez misma sea lo válido, esto será el paso desde Kant hacia el proyecto del idealismo absoluto.

Ante la extrañeza de que algo dado, un *Faktum*, tenga a su vez carácter de *ius*, de validez, es decir, ante la extrañeza de que algo sea cierto sin que lo sea absolutamente, el proceder genético reaccionará exigiendo que lo válido lo sea absolutamente. Esto tendrá como consecuencia lógica el que lo válido no sea algo con lo que uno se encuentre, sino que ha de ser deducido. A su vez, la dedución no ha de presuponer nada, no ha de iniciarse con ningún *factum*[159]; el comienzo ha de ser no mediado, inmediato. De esta forma, si nada se deja fuera del comienzo, el proyecto idealista será consecuente con su pretensión de decir el todo.

Desde esta postura –postura que, como decíamos, es la de Hegel– la filosofía de Kant se convierte en mero psicologismo[160]. Es decir, no el que lo que Kant llamaba conocimiento lo sea dado, sino que la forma de ese conocimiento se acepte como dado es lo que hace valer a Kant el reproche de psicólogo[161]. Hegel lamenta incluso que la presentación de las facultades del conocimiento que se lleva a cabo en la *KrV* sea histórica, empírica, en definitiva, psicológica: primero la sensibilidad, luego el entendimiento y, por último, la razón[162]. Lo que Para Hegel, la filosofía transcendental es sinónimo de psicologismo[163]. En Kant el problema no es tanto el que se acepte algo cuyo ser consista en no ser absolutamente cierto sino, más bien, el que la forma de eso aceptado tenga a su vez el carácter de algo dado. Visto desde Hegel, la forma tiene que poder generarse. Lo que en Kant es la forma del conocimiento tiene que ser en Hegel el conocimiento mismo. La filosofía tiene que ser ella misma saber. Este conocimiento tendrá como contenido no algo otro, no una intuición ni una forma de la

[156] Cf. Fichte [1981] pp. 249 y 250.
[157] Cf. para lo que sigue Marzoa [1992] p. 26 y sigs.
[158] Para la distinción entre *Faktum* y *factum* véase Marzoa [1989] p. 14 y sig.
[159] Decimos *factum* y no *Faktum*, por que desde esta perspectiva que, como veremos, es la de Hegel, la noción de algo dado que es, al mismo tiempo, algo cierto, es decir, algo absolutamente cierto, la noción de un *Faktum*, es algo internamente inconsistente.
[160] Las acusaciones de psicologismo son frecuentes en la sección dedicada a Kant en las *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*. Cf. Hegel [XX] p. 337: “bleibt Kant innerhalb der psychologischen Ansicht und empirischen Manier eingeschlossen”, ibid. p. 339: “Kant geht nun psychologisch zu Werke, d. h. geschichtlich”, ibid. p. 343: “Er zählt das her, wie in der empirischen Psychologie; die Darstellung einer Notwendigkeit eines solchen Fortgangs fehlt”, ibid. p. 351: “Kant geht von dem Verstand nun ebenso psychologisch zur Vernunft fort”. Cf. también el § 41 de la Enz. al respecto (Hegel [VIII] p. 113 y sigs.).
[161] Del mismo modo, desde las líneas de la *Phänomenologie*, se podría decir que Kant es únicamente un φιλό-σοφος. Cf. Hegel [1980] p. 11.
[162] Cf. Hegel [XX] p. 386.
[163] Cf. Hegel [1978] p. 157: “nur transzendental oder eigentlich subjektiv und psychologisch”. De hecho, la lectura hegeliana de Kant esta basada en la inclinación hacia el lado del concepto de la, en principio, dualidad kantiana intuición-concepto. De este modo, la intuición y el concepto no serán tanto la manifestación de una raíz común, sino que, al priorizar el lado del concepto, las categorías consitirán en una cierta operación del entendimiento sobre la pluralidad pura o tiempo. Desde esta lectura de Kant, el alma es la que insufla necesidad en lo en sí. Cf. sobre este punto Marzoa [1992] p. 66.

intuición, sino a sí mismo. Este retorno a sí del pensamiento necesita una mediación, algo en relación al cual él vuelve a sí. Debido a que este otro algo no puede ser algo distinto del pensamiento –sino el pensamiento no sería todo, no sería absoluto– resultará que el elemento mediador será el pensamiento mismo como negación de sí mismo: el pensamiento entrará en así contradicciones. Con ello lo antinómico o dialéctico –"etapa" representada por Kant– es aquello que dará lugar al conocimiento especulativo. En este conocimiento, el conocimiento absoluto, el pensamiento se piensará a sí mismo[164], es decir, el pensamiento será libre.

La brecha entre lo objetivo y lo subjetivo que pretenderá minar Hegel con ello tendrá un antecedente en Kant. En él podemos apreciar que la separación entre la pura espontaneidad y la pura receptividad no es del todo respetada. En efecto, el en qué consiste la receptividad, es decir, la forma de la receptividad, el tiempo, no será ella misma exclusivamente receptividad. Efectivamente, la apercepción pura no obtiene el material, la pluralidad, de algo otro de sí, sino que la pura receptividad de sí mismo es, en Kant, el tiempo[165]. De este modo, Kant puede llegar a afirmar que el tiempo es producido (*erzeugen*) en la aprehensión[166]. Con este movimiento, Kant abre y cierra a la vez el camino hacia el idealismo alemán. Lo abre por que afirma la posibilidad de una generación de lo otro a partir de sí. Lo cierra por que ese otro no es más que uno mismo, la percepción no es más que apercepción y, con ello, el entendimiento humano es finitud. Pero, para Hegel[167], reconocer a la finitud carácter de verdad es situarse fuera del idealismo, fuera de la filosofía.

La pretensión de que la tarea de la filosofía, en tanto que ciencia, no sea otra que el pensamiento que debe de tener como único contenido a sí mismo, se expresa en Hegel diciendo que lo verdadero debe de ser la pura autoconciencia[168] o que lo verdadero ha de concebirse no ya únicamente como substancia –lo en sí–, sino además como sujeto[169]–lo para sí[170]. El motor que conduce a ese resultado es denominado por Hegel dialéctica.

Dialéctica no es otra cosa en Hegel que el encontrarse con que cada Concepto tiene en sí mismo su Otro. El que Algo tenga en sí este Otro significa que en efecto hay presentación (*Darstellung*), hay lo que más arriba llamábamos generación. El que este Otro sea su otro hace que la negación de lo puesto al principio no sea una abstracta negación sino una negación concreta. El primer momento, aquél que no ve más que una nada abstacta en el resultado de la negación es identificado por Hegel con el escepticismo. El segundo momento, el momento en virtud del cual el resultado de la dialéctica no se reduce a una pura nada, es el momento dialéctico. El tercer y último momento, el especulativo o positivo[171], consite en

---

[164] Cf. Hegel [XX] p. 353: "Aber man wird auch für die Bewahrheitung des Unendlichen nicht eine sinnliche Wahrnehmung fordern wollen; der Geist ist nur für den Geist".

[165] Cf. Heidegger [1951] p. 171 y sig. Cf. también Hegel [XX] p. 337: "Da ist nun Raum und Zeit das Verbindende; sie sind also a priori, d. h. im Selbstbewußtsein".

[166] Cf. KrV B182: "Also ist die Zahl nichts anders als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge".

[167] Cf. Hegel [1985] p. 142: "Der Idealismus der Philosophie besteht in nichts anderem, als darin, das Endliche nicht als ein wahrhaft Seyendes anzuerkennen. Jede Philosophie ist wesentlich Idealismus".

[168] Cf. Hegel [1978] p. 21: "die Wahrheit das reine Selbsbewußtsein sei".

[169] Cf. Hegel [1980] p. 18. Con Marzoa (en Marzoa [1995] p. 19 y sig) esta exigencia podría formularse también diciendo que en el idealismo se pretende que el sujeto sea *hypokeímenon*.

[170] Es decir, debido a que el para sí es resultado del en sí, poner el en sí en y para sí. Cf. al respecto Hegel [1980] p. 425: "[...] in ihr [en la unificación de la conciencia y la autoconciencia] kommt der Geist dazu, sich zu wissen, nicht nur wie er an sich oder nach seinem absoluten Inhalte, noch nur wie er für sich nach seiner inhaltslosen Form oder nach der Seite des Selbstbewußtseins, sondern wie er an und für sich ist".

[171] Cf. Hegel [1978] p. 27: "In diesem Dialektischen, wie es hier genommen wird, und damit in dem Fassen des Entgegengesetzten in seiner Einheit oder des Positiven im Negativen besteht das Spekutalive".

mostrar en el resultado el nuevo contenido, el concepto. Este nuevo concepto será a su vez puesto como inmediato[172], dando comienzo a una nueva serie de inmediatez, negación y negación de la negación. Como resultado de ello la primera definición del absoluto, la primera inmediatez, el *Sein*, se irá haciendo cada vez más rico[173], más internamente mediado.

El que el esquema con el que tomarse en serio el denuedo del concepto[174] sea éste ha llevado al error de pensar que se este hablando en Hegel de un método, el dialéctico, el cual se pudiera aplicar a una cosa u otra. Si bien es verdad que Hegel habla del Método específico a la filosofía, método que ha respetado en su *Wissenschaft der Logik*, también es verdad que en Hegel el método (de μέθοδος) no es algo que este más allá del camino mismo de la ciencia. El método no se distingue de su objeto[175]. Es el contenido mismo el que, digamos, genera el método. En este sentido, la presentación del contenido "Espíritu" desde su inmediatez de la conciencia hasta su absoluta mediación en el saber absoluto es la empresa de *die Phänomenologie des Geistes*. Del mismo modo, la presentación del contenido "Concepto" o "Esencialidad" desde su inmediatez en la lógica del ser, pasando por la reflexión en la lógica de la esencia, para llegar al Concepto en y para sí en la lógica del concepto es la tarea de la *Wissenschaft der Logik*. A su vez, la presentación del contenido "Naturaleza" desde su inmediatez de la pura exterioridad en la Mecánica, pasando por la reflexión en la Física, hasta llegar a la unidad ideal en el mundo orgánico es la empresa de la *Naturphilosophie*. Con ello tenemos la correspondencia hegeliana de la tríada de la *metaphysica specialis*: la filosofía del espíritu toma el lugar de la psicología racional, la ciencia de la lógica el de la teología[176] y la filosofía de la naturaleza el de la cosmología racional.

Si tenemos esto último presente, obtendremos como resultado que el proceso descrito por la cadena "inmediatez-negación-negación de la negación" tendrá que dar cuenta de la entera arquitectónica de la *Wissenschaft der Logik*. De este modo, el comienzo de la lógica con el muñón[177] *Sein*, es un comienzo con un carácter, digamos, multidimensional. Es decir, el comienzo, el *Sein*, es comienzo de la *Wissenschaft der Logik* en el plano, digamos primero. En él la negación negación de su inmediatez es la esencia cuya negación de la negación da lugar al concepto. A su vez, en un plano dos, el *Sein* es el comienzo de la *Wissenschaft der Logik* donde el *Sein* inmediato tiene como resultado de la negación el *Dasein* cuya negación o, negación de la negación del *Sein*, es el *Fürsichsein*. En un tercer y último plano el *Sein* tiene como negación la *Nichts* y como negación de la negación el *Werden*. De este modo, esta misma cadena se repitirá en los demás lugares de cada plano.

Este puede ser el momento de poner en relación, dentro del plano en el que nos vamos a mover en el presente capítulo, el proceder de Kant con el de Hegel. Tres observaciones resultan oportunas al respecto. La primera observación hace llamar la atención sobre la

[172] Es decir, en esta nueva inmediatez se olvida la mediación que ha dado lugar a este concepto. Este *olvido* es característico tanto de la *Wissenschaft der Logik* como de la *die Phänomenologie des Geistes*.
[173] Cf. Hegel [1978] p. 25: "Sie ist ein neuer Begriff, aber der höhere, reichere Begriff als der vorhergehende; denn sie ist um dessen Negation oder Entgegengesetztes reicher geworden, enthält ihn also, aber auch mehr als ihn, und ist die Einheit seiner und seines Entgegengesetzten".
[174] Cf. Hegel [1980] p. 41.
[175] Cf. Hegel [1978] p. 25: "[…] sie [die Methode] von ihrem Gegenstand und Inhalt nichts Unterschiedenes ist; - denn es ist der Inhalt in sich selbst, die Dialektik, die er an sich selbst hat, welche ihn fortbewegt".
[176] Recuérdese para este punto la célebre cita de Hegel en donde define el acontecer de la *Wissenschaft der Logik* como la presentación de Dios antes de la creación de la naturaleza y del espíritu finito: "Dieses Reich [die Logik] ist die Wahrheit selbst, wie sie ohne Hülle an [und] für sich selbst ist; man kann sich deswegen ausdrücken, daß dieser Inhalt die Darstellung Gottes ist, wie er in seinem ewigen Wesen vor der Erschaffung der Natur und eines endlichen Geistes ist" (en Hegel [1985] p. 34 o Hegel [1978] p. 21).
[177] El que la formulación del comienzo no pueda ser más que un muñón se debe al hecho de que cualquier enunciado sobre el *Sein* rompería el carácter de inmediatez que pretendíamos asignarle.

ausencia de las formas de la sensibilidad en la *Wissenschaft der Logik*. En efecto, el tiempo como pluralidad pura no aparece ni como tema ni como fondo de la *Wissenschaft der Logik*. Con "no aparece como tema" queremos decir que el tiempo no aparece tematizado. Es más, tampoco podría haberlo sido. El tiempo no haría menos que introducir una nota finita que hace imposible el hablar de totalidad[178] de una situación cognoscitiva ni, por lo tanto, de su asunción (*Aufhebung*) en un momento superior[179].

[178] La imposibilidad de hablar en Kant en términos de totalidad en cualquier discurso válido es así solidaria de la finitud humana expresada en la receptividad pura o tiempo. De este modo, el que todo objeto de la experiencia haya de ser dado en la serie del tiempo implicaba en la dialéctica transcendental el que no puede haber una síntesis total de dicha serie, es decir, que la idea de mundo es eso, una idea. Sobre esta imposibilidad cf. Marzoa [1995] p. 63: "si se admite la noción de totalidad (y Kant, por ejemplo, no la admite como parte de un enunciar válido cognoscitiva o prácticamente), entonces nada podría ser diferente sin que todo fuese diferente, y, por tanto, toda determinación lo es *de iure* del uno-todo". Esta tesis es el centro sobre el que gira el artículo *Kant y la mota de polvo* (cf. Marzoa [2004]). En él, partiendo de la contradicción que se da en el ser de algo contingente de suyo ("ser" significa *certitudo* o definición, mientras que algo de suyo contingente es algo que es incierto para todo posible cognoscente) se presentaba la necesidad –en virtud de lo que se llamaba "Principio realista"– de salvar esta contradicción (contradicción por que se estaría afirmando algo de algo que no sería posible objeto de conocimiento para ningún cognoscente: a saber, se estaría afirmando, al mismo tiempo y en el mismo sentido, la determinación de algo –en "Algo *es* contingente"– y la indeterminación de ese mismo Algo –en "Algo es *contingente*" –) en Hegel recurriendo a la totalidad de lo ente: el algo es de suyo contingente en el sentido de que si no lo fuera tampoco lo sería todo lo demás. Esto suponía un viaje de ida y vuelta (en Marzoa [2004] p. 58): 1) viaje de ida (del ente al ser o "negación"): el ente de suyo contingente es contradictorio en base a que el ser significa determinación y algo de suyo contingente es algo de suyo indeterminado. 2) viaje de vuelta (del ser al ente o "negación de la negación"): para salvar esta contradicción se vuelve del ser al ente y se afirma que si el ente en cuestión es contingente entonces el todo de lo ente también lo sería. La afirmación de la mota de polvo es así tautológica sobre este fondo o viaje de ida y vuelta. El que de entrada se admitía como posible algo de suyo contingente, es decir, la posibilidad de algo de suyo contingente, es algo que resume a la filosofía crítica. Lo que ocurre es que en él, la no certitud de algo tenía su fuente en la forma misma de este algo: la forma de la experiencia reside en que no todo casa con todo siendo, con ello, el qué es lo que hay en cada caso algo sujeto a incertidumbre. Con ello lo contingente no encontraba salvación en la filosofía crítica, es decir, en la filosofía crítica sólo tenía lugar el primer viaje. Frente a ello, el que la cuestión del ser venga a rescatar la contingencia del ente mediante el recurso a uno-todo es interpretado como pérdida de la diferencia ser-ente en Hegel. De este modo Hegel sería absolutista hasta el extremo de querer generar toda pluralidad en base a un único principio (Cf. sobre este punto Marzoa [1992] p. 27-28 donde se pasa de definir el proyecto idealista como aquél que pretende suprimir "la pluralidad de principios" a definirlo como aquél proyecto que pretende suprimir, sin más, la "pluralidad". El que, según Marzoa, la génesis hegeliana llega hasta el nivel material, es decir, kantianamente hasta el nivel empírico, es afirmado en Marzoa [1992] p. 90. Esta lectura razona, *grosso modo*, así: la reflexión, la exigencia de determinación, es autoreferencia: la validez de lo válido consiste en que todo lo válido ha de ser de una única validez. Tenemos así, por un lado lo determinado, y por otro lado el, lo, la que determina. La pretensión del idealismo absoluto de decir la reflexión tiene que ser consecuente con esta contradicción: a saber, la contradicción consistente en que, por un lado, la reflexión implica una dualidad y, por otro lado, hay pretensión de decir el todo, un todo que no puede tener límites internos, esenciales. De este modo, la distinción entre generar únicamente las condiciones de posibilidad de lo ente y generar el todo lo ente sería algo no concebible para el idealismo absoluto. Y ello por lo siguiente: a saber, por que con una tal distinción se introduciría un límite esencial, no arbitrario en el uno-todo que, por definición, rehuía toda determinación no arbitraria. Sin embargo, como veremos, Hegel pretenderá aferrarse a esta distinción entre generar las condiciones de posibilidad de lo ente y generar lo ente mismo, la distinción entre lo efectivamente real (*Wirklich*) y el fenómeno (*Erscheinung*), entre lo necesario y lo posible (*Möglich*). Este reproche de pretensión de "deducción" de todo y cualquier ente de un principio era algo que Hegel mismo conoció de la mano de un tal W. Krug. Este le reprochaba al idealismo la imposibilidad de deducir, por ejemplo, un caballo. La respuesta de Hegel es la de recordarle que eso, en la medida en que se trata de aprehender racionalmente el sistema solar, en todo caso, sería labor del la filosofía de la naturaleza (cf. Hegel [1968] p. 179: "Begreift denn aber Herr Krug nicht, daß die Bestimmtheiten, die im transzendentalen Idealismus unbegreiflich sind, der Naturphilosophie, von deren Unterschied von dem transzendentalen Idealismus er gar nichts zu wissen scheint, soweit von ihnen - wie von Herrn Krugs Schreibfeder nicht - in der Philosophie die Rede sein kann, angehören?"). Pero si vamos a la sección de la *Naturphilosophie* de la *Enzyklopädie* en donde Hegel se expresa al respecto, veremos que habla de lo indebido (*ungehörig*) de exigir al concepto el que conciba, genere, tales casualidades (*Zufälligkeit*) (cf. Hegel Enz. § 250 (Hegel [IX] p. 35): "das Ungehörigste ist, von dem Begriffe zu verlangen, er solle dergleichen Zufälligkeiten begreifen"). Esto azaroso, lo particular, es própio de lo dado en la representación y es algo que no

La segunda observación tiene que ver con el proceder genético de Hegel. A diferencia del proceder, digamos, fenomenológico de Kant, Hegel exigirá que las categorías resulten unas de otras. Por ejemplo, la clase de las categorías de la cualidad será superada por la de la cantidad, la clase de las categorías de la cantidad lo será por la de la medida etc. Frente a la deducción transcendental de las categorías, Hegel nos ofrecerá con ello una génesis dialéctica de las mismas. En esta génesis, la clase de las categorías de la cantidad viene después de la de la cualidad. Las posibles similitudes entre el significado de las mismas categorías en Kant y en Hegel serán objeto de estudio del primer apartado de la segunda sección de este trabajo.

Por último, hay que llamar la atención sobre la observación de Kant[180] en la que afirmará que la tercera categoría de cada clase surge (*Entsrpingen*) de la unión (*Verbindung*) de las otras dos. Así, la totalidad no será más que la pluralidad considerada como una unidad, la limitación una realidad puesta junto con la negación, la comunidad es la causalidad de una substancia bajo la determinación de la acción recíproca y la necesidad es la existencia que está dada por la posibilidad. Esto no implica para Kant que la tercera de las categorías se derive de las otras dos. Y esto, debido a que no siempre podemos unir las dos primeras en la tercera[181]. Por ejemplo, en la representación de la infinitud no podemos, dice Kant, dar con un número, no podemos representarnos esa pluralidad como totalidad, es decir, como número: tenemos por una lado pluralidad, tenemos también, por el otro lado, la unidad dada por la regla de producción de la pluralidad en cuestión, pero lo que no tenemos es el acabamiento, la totalidad de esta pluralidad por parte de la aplicación de esa regla. Esto será descartado por

---

se puede agotar, generar, por el concepto (*Ibid*). Es más, si no fuese así, la lectura de la célebre frase del prólogo de las *Grundlinien der Philosophie des Rechts* (Cf. Hegel [VII] p. 24: “Was vernünftig ist, das ist wirklich; und was wirklich ist, das ist vernünftig”) sería la vulgar, la que de hecho tuvo lugar, y contra la que Hegel se expresó en la *Enz*. (Cf. *Enz*. § 6 (Hegel [VIII] p. 47 y sigs.)). Es más, una lectura onticamente genetista de Hegel no casa con afirmaciones como la siguiente: “Nicht nur muß die Philosophie mit der Naturerfahrung übereinstimmend sein, sondern die *Entstehung* und *Bildung* der philosophischen Wissenschaft hat die empirische Physik zur Voraussetzung und Bedingung” (Cf. *Enz*. § 246 (Hegel [IX] p. 15 y sigs.)). En ella se habla explícitamente de algo dado en la experiencia. Sin embargo, no deja de ser cierto, el que para Hegel “si se destruyera esta mota de polvo, el universo entero se desplomaría” (cf. Hegel [1985] p. 73 y Hegel [1978] p. 46. En este mismo sentido se expresa también Hegel (en Hegel [1998] p. 498) cuando habla de Laplace). En definitiva, es cierto que la expresión “en el fondo” (*Im Grunde*) del texto de Hegel expresa el hecho de que la tautología no reside en que lo que se dice por el predicado está ya dicho por el predicado, sino en virtud del significado del verbo ser en Hegel: ser es siempre ser esto o lo otro, es decir, ser algo determinado (*bestimmtes Sein*) y esto significa que, en relación al contenido (*Inhalt*), el cambio del contenido de otro algo afecta al contenido de cualquier otro (Cf. Hegel [1985] p. 73: “es ist ein Inhalt, der im Verhältnisse der Notwendigkeit mit anderem Inhalte, mit der ganzen Welt steht”). Nótese que no se trata de que esta mota de polvo pueda ser o no ser, sino de que puede tener un contenido u otro. Hasta aquí, lo dicho por Hegel puede recordar perfectamente cosas que se dicen en la *Cours de linguistique générale*. En el texto de Hegel no se habla de lo contingente sino de lo determinado. Lo contingente no es lo que siempre puede pensarse que tenga otro contenido, sino lo que puede no ser (Cf. Hegel [VIII] p. 46: “das Zufällige ist eine Existenz, die keinen größeren Wert als den eines Möglichen hat, die so gut nicht sein kann, als sie ist”). A esto último lo llama Hegel la apariencia (*Erscheinung*). Frente a ello, Hegel definirá la realidad efectiva (*Wirklichkeit*) que, en su forma inmediata, se denomina experiencia (*Erfahrung*). Y si hay algo que ni siquiera llega al nivel de lo que en *die Phänomenologie* se llamaba “die Sinnliche Gewißheit” o experiencia inmediata, entonces es que este algo, lo contingente, no es para Hegel. Del mismo modo en que “la mota de polvo es un ser determinado” sería tautológico (en los dos sentidos antes mencionados de “tautológico”), “lo contingente es tal o cual” sería contradictório. Además de ello, aún suponiendo que Hegel entendiese por *bestimmtes Sein* lo contingente, decir que el todo de lo ente avala a cada ente no puede querer decir más que cada ente se encuentran en un relación (*Verhältnis*) necesaria con todo otro ente –si se quiere, con todos los entes–, pero no que haya generación de lo ente a partir de lo “en qué consiste ser” (en Hegel, según esta lectura, “el todo lo ente”).

[179] Un ejemplo de esta imposibilidad la encontrará el lector en el segundo capítulo de este trabajo en donde se tematizan los aspectos continuo y discreto de la categoría de la cantidad.

[180] Cf. *KrV* B 110.

[181] Esta imposibilidad es, del lado del concepto, lo que del lado del silogismo es la imposibilidad llamada Idea.

Hegel. Así, en los procedimientos de exhaustión de las superficies, el que tengamos la regla de pluralidad implica que tenemos la totalidad de la pluralidad, es decir, el cierre de la síntesis sucesiva: la totalidad no será así otra cosa que, por ejemplo, la exhaustión de la figura del círculo por un polígono de infintos lados.

1.1. CUALIDAD[182]

1.1.1. El Ser (*Sein*)

La pretensión de decir el Todo de la *Wissenschaft der Logik* no puede comenzar con algo determinado debido a que esto dejaría algo fuera del todo. La presentación del todo ha de ser pues uno indeterminado[183]. Y si esta presentación ha de ser el primero, entonces no puede presuponer nada, no puede tener como mediación algo previo a él. Esto indeterminado inmediato es el Ser, es decir, la cosa en sí[184]. Efectivamente, el Ser no tiene una distinción que lo distinga de algo, es la pura abstracción[185], el puro vacio; el Ser, sin ninguna determinación e inmediato, es Nada. La Nada, del mismo modo que el Ser, es la pura falta de contenido, la falta de Determinación. La Nada, en su indeterminación, es el Ser:

Das reine Sein und das reine Nichts ist dasselbe[186]

---

[182] Hegel, en su *Vorlesungen über Logik und Metaphysik* (cf. Hegel [1992] p. 72), propondrá la correspondencia siguiente: "Die Qualität enthält drei Bestimmungen oder Kategorien: 1. das Sein als Unbestimmtes oder Allgemeines, 2. das Sein als Besonderes, das Dasein, und 3. das Sein als Einzelnes, das Für-sich-Sein, die Abstraktion des schlechthin bestimmten Seins". Haciendo uso de la lectura de Hegel de Marzoa, podríamos también decir lo siguiente; el *Sein* es la inmediatez o el momento prereflexivo, el *Da* del *Dasein* remite a ubicación, a determinación, en suma, a reflexión y en el *Fürsichsein* hay fracaso interno de la reflexión y retorno al *Sein* del comienzo en la medida en el que en la cantidad –producto del *Fürsichsein*– toda determinación es arbitraria, por lo tanto, no es ninguna determinación, del mismo modo en que tampoco había determinación en el *Sein*.

[183] Una recomendable exposición de los momentos que ahora venimos a reproducir es la de Marzoa [1973] p. 328 y sig. Esta exposición será eliminada en la segunda edición. Véanse al respecto Marzoa [1994] p. 189 y sigs.

[184] Cf. al respecto Hegel [1992] p. 77: "Das Dinge an sich soll sein das Sein ohne alle Bedingung, ohne alle Schranke, als die höchste Abstraktion". Cf. también Hegel [1992] p. 76: "Die Dialektik des Seins ist nun, daß es an und für sich die völlig leere Abstraktion ist, die wir als das Ding an sich gesehen haben". No deja de resultar extraño el uso que hace aquí Hegel de algo que para Kant era un *Grenzbegriff* (en *KrV* B 310). Esto nos remite a la asimilación del desarrollo de las etapas de la historia de la filosofía que tiene lugar en el movimiento de su *Wissenschaft der Logik* de Hegel. Llamaremos la atención sobre estas asimilaciones según vayan apareciendo en nuestra exposición mediante notas a pie de página. Recordemos que es consecuente con esta asimilación el que el comienzo de la *Wissenschaft der Logik* coincida con el inicio de la Filosofía. De este modo, Parménides será considerado por Hegel como el primer filósofo, y ello debido a que comienza con el *Sein* en abstracto. Cf. al rescpecto Hegel [1992] p. 74: "Parmenides aber riß die Menschen von der Vorstellung weg und sagte: »Es ist nur das Sein, und das Nicht[s] ist nicht. Alles andere hat keine Wahrheit.« Dies ist der erste Schritt der reinen Befreiung der Gedanken. Es ist dies ein ungeheurer Schritt in der Philosophie, und Parmenides kann daher als der erste Philosoph gehalten werden". Sobre la mencionada asimilación cf. Hegel [VIII] p. 58: "Der Werkmeister aber dieser Arbeit von Jahrtausenden [de la História de la Filosofía] ist der eine lebendige Geist" y Hegel [VIII] p. 59: "Dieselbe Entwicklung des Denkens, welche in der Geschichte der Philosophie dargestellt wird, wird in der Philosophie selbst dargestellt, aber befreit von jener geschichtlichen Äußerlichkeit, rein im Elemente des Denkens"

[185] Esta expresión aparece únicamente en el § 87 de la *Enz* (Hegel [VIII] p. 186 y sigs.)

[186] Cf. Hegel [1978] p. 44. Sobre la dificultad de expresar una verdad especulativa mediante una proposición como ésta cf. Enz. § 88 (Hegel [VIII] p. 188 y sigs.) y también Hegel [1978] p. 54. Nótese que la formula hace uso del verbo en singular cuando lo usual sería hacer uso de la tercera persona del plural. Cf. al respecto Carlson [2007] p. 15.

Tenemos así ya en el comienzo mismo de la *Lógica*, la puesta en escena de los tres protagonistas que serán los responsables del movimiento de la misma. Por una lado, el entendimiento mantiene fijo cada uno de los polos –en este caso el Ser por un lado y la Nada por el otro. El momento dialéctico consiste en mostrar que cada polo tiene su otro en sí –en nuestro caso mostrar que el Ser es la Nada y la Nada el Ser. Por último, después de que lo dialéctico haya dado la señal de alarma –de contradicción– entra el momento especulativo o superador de la contradicción. Este momento es el de la verdad[187]. El que el Ser remita a la Nada y la Nada al Ser, su aspecto diálectico, no es la verdad de ellos. La verdad es lo especulativo, no el que uno traspase a lo otro –momento dialéctico– sino el que haya traspasado al otro –momento especulativo–:

die Wahrheit ist [...] daß das Sein in Nichts und das Nichts in Sein –nicht übergeht-, sondern übergegangen ist[188]

Este movimiento del Ser a la Nada –*Vergehen*– y de la Nada al Ser –*Entstehen*– es el devenir (*werden*)[189]. Sin embargo[190], si consideramos que el Ser es lo mismo que la Nada, este inquieto traspaso es a su vez una quieta unidad. La desaparición de la distinción entre el Ser y la Nada es la desaparición de devenir mismo:

Ihr Verschwinden [del Ser y de la Nada][191] *ist daher das Verschwinden der Werdens*[192]

Esta tranquila unidad del Ser y la Nada es el Ser-ahí (*Dasein*).

1.1.2. El Ser-ahí (*Das Dasein*)

El Ser-ahí es un Ser con una determinidad (*Bestimmtheit*)[193] o un no-ser (*Nichtsein*)[194]; el Ser-ahí es a la vez un ente (*Seiende*) y un no-ente (*nichtseiende*). El no-ser no es la pura

[187] Recuérdese que ya en las tesis de Habilitación, la contradicción no será, para Hegel, la verdad, sino la regla de la verdad. Cf. Hegel [II] p. 532: "Contradictio est regula veri, non contradictio falsi".
[188] Cf. Hegel [1978] p. 44.
[189] Siguiendo con la analogía entre los momentos de la *Wissenschaft der Logik* y de la Historia de la Filosofía, que hemos iniciado en la nota 184, diremos que el representante, dentro de la Historia de la Filosofía, del momento del devenir no podía ser otro que Heráclito. Cf. al respecto, Hegel [1992] p. 82: "In der Geschichte der Philosophie ist es Heraklit gewesen, welcher den Standpunkt des einfachen Seins oder des Unbestimmten verlassen und zum Werden fortgegangen ist und es ausgesprochen hat, daß das Sein ebensowenig ist als das Nichts oder alles fließt, d.h. alles ist im Werden". Cf. también Hegel [1978] p. 45: "Der tiefsinnige Heraklit hob gegen jene einfache und einseitige Abstraktion den höhern totalen Begriff des Werden hervor, und sagte: das Sein ist so wenig, als das Nichts, oder auch daß Alles fließt, das heißt, daß Alles Werden ist". Véase también Hegel [2001] p. 104.
[190] Cf. Carlson [2007] p. 18: "It [el devenir] moves and yet it does not move. We cannot focus on these moments simultaneously. Each side of the Becoming is inadequate to the whole. The concept of Becoming is in a deep state of contradiction".
[191] Y con ello el desaparecer de la diferencia entre *Vergehen* y *Entstehen*.
[192] Cf. Hegel [1978] p. 57.
[193] Cf. Enz. § 90 (Hegel [VIII] pp. 195 y 196).
[194] Cf. Hegel [1978] p. 60.

nada del comienzo sino la pura nada puesta ya en el Ser-ahí. El no-ser no puede ser el no-ser de algo otro por que no hay nada fuera. El no-ser lo será así del Dasein mismo[195]. El Ser-ahí es así un no-ser-ahí ente (*seiendes Nichtdasein*) o un Ser-otro (*Anderssein*). El Ser-otro es, en primer lugar, un Ser-otro en sí y para sí, es decir, un Ser-otro que es resultado del traspaso del Ser-ahí a él. Este traspaso no significa, sin embargo, la desaparición del Ser-ahí. El Ser-ahí queda así referido a su otro o Ser-otro. El Ser-ahi es así Ser-para-otro. Del mismo modo que el Ser había traspasado a la Nada, el Ser-ahí habrá transpasado al Ser-otro. Del mismo modo que el nacer (*Entstehen*) era la la unión o el transpaso mismo como (*als*) ser y el perecer (*Vergehen*) como nada, la unión del Ser-ahí y del Ser-otro será, como nada, el Ser-para-otro (*Sein-für-anderes*) y, como ser, el Ser-en-sí (*Ansichsein*). En efecto, del mismo modo que Ser y Nada, en su referencia mutua no eran meramente determinaciones (*Bestimmungen*), sino Momentos[196], de este mismo modo, el Ser-ahí y el Ser-otro en su referencia mutua[197] son los momentos de Ser-para-otro –el Ser-ahí como nada– y de Ser-en-sí –Ser-ahí como Ser. El Ser-ahí que tiene como sus determinaciones no ya el inmediato Ser y la inmediata Nada sino los momentos de Ser-para-otro y Ser-en-sí. Ese Ser-ahí es la realidad (*Realität*)[198] o el Ser-ahí reflejado.

La realidad es la union del Ser-para-otro y el Ser-en-si en tanto que son diferentes. Sin embargo, hemos visto que el Ser-para-otro y el Ser-en-sí son momentos, es decir, remiten el uno al otro. Por este motivo, la unión del Ser-para-otro y del Ser-en-sí que tiene en cuenta esta remisión[199], la unión[200] que es análoga a la quieta unión en el Ser-ahí, es una unión en la que se anula la distinción entre el Ser-para-otro y el Ser-en-sí. A esto lo llama Hegel el Ente-ahí (*Daseindes*) o el Algo (*Etwas*)[201]. El Algo no es meramente, como la realidad, un Ser-ahí externamente reflejado, sino que es un Ser-ahí cuya reflexión es *su* reflexión. La nada reflexiva y no ya inmediata que consiste en que algo se refiere a sí mismo mediante la negación del ser otro es la Determinidad (*Bestimmtheit*).

El Algo es el Ser-ahí con una Determinidad. La Determinidad puesta como negativa es el Límite (*Grenze*)[202]. A su vez, el Ser-en-sí mediato que es resultado de la negación del Ser-para-otro es el Ser-dentro-de-sí (*Insichsein*). Como resultado de ello, el Ser-otro ya no será algo que se dé en el Algo, sino que será otro Algo. De este modo, Algo tiene su límite frente a Otro que, en tanto que es también un Algo, es un limitarse dentro de sí mismo: el límite es al mismo tiempo aquello con y en lo que se limita el Algo. El límite es aquello que hace que

---

[195] Cf. Hegel [1978] p. 60 “Dasein als das Nichts seiner selbst”.

[196] Es decir, nacer y perecer, respectivamente. Cf. al respecto Hegel [1978] p. 62: “Sein und Nichts, in ihrer unruhigen Einheit, im Werden, sind Entstehen und Vergehen”.

[197] Referencia mutua debido a que 1) lo otro del Ser-en-sí es el Ser-para-otro y 2) la nada del Ser-para-otro no es la pura nada sino una nada, dice Hegel, que remite (*hinweisen*) al Ser-en-sí.

[198] Del mismo modo, el devenir era la “unión” del Ser y la Nada no como meras determinaciones, sino como momentos.

[199] En la realidad esta remisión no es relevante o, como dice Hegel, es indiferente (*gleichgültig*). Cf. Hegel [1978] p. 65.

[200] Unión a la que Hegel denomina “negative Einheit”: “die Beziehung auf sich durch Negation des Andersseines“ (en Hegel [1978] p. 66).

[201] Cf. al respecto Duque [1998] p. 614: “«algo», lo ente, no es por un lado «en sí» y por otro lado un «ser para otro», sino que es la *transición* entre esos respectos”.

[202] Cf. Enz. §92 (Hegel [VIII] p. 197): “Im Dasein ist die Bestimmtheit eins mit dem Sein, welche zugleich als Negation gesetzt, Grenze” y también Hegel [1978] p. 67: “Etwas als Daseiendes unterscheidet erstlich sein Moment der Negativität von ihm selbst als seine Grenze”.

Algo no sea Otro. Por ello, el límite no es algo que le sea igual a Algo[203], sino que hace que el Algo sea lo que es: el límite que no se diferencia del Algo es la Determinidad[204].

La Determinidad que es un límite frente a Otro que resulta ser el deber ser de ese Algo es la Determinación (*Bestimmung*) de ese Algo[205]. La Determinidad que, a diferencia de la Determinación, no pertenece al Ser-en-sí de algo, sino que es algo exterior a Algo es la Hechura (*Beschaffenheit*). De este modo, en la Determinidad, los momentos del Ser-dentro-de sí y Ser-para-otro pasan a ser la Determinación y la Hechura[206], respectivamente.

La unión[207] de la Determinación y la Hechura es la Cualidad (*Qualität*) de Algo. El que, por una parte –la parte de la Determinación– la Determinidad sea algo que se de *en el* Algo, y por otro lado –el lado de la Hechura–, el que la Determinidad sea para el Algo *su Otro*, hace que se ponga el cambio (*Veränderung*) en el Algo[208]. Es decir, por un lado tenemos que, del lado de la Hechura, la Determinidad de Algo es su Otro y que, del lado de la Determinación, la Determinidad pertenece a Algo, le es suyo. Por otro lado hemos obtenido también que la Determinación y la Hechura son momentos de lo mismo. El corolario de estos dos resultados es el cambio: el que el ser el otro de algo sea su en sí es lo mismo que poner el devenir en la esfera del ser-ahí.

El cambio lo es en primer lugar de la Hechura; a saber, de una Hechura 1 a otra Hechura 2[209]. Pero esto ocurre con cualquier Hechura. Es decir, la Hechura en cuanto Hechura cambia, luego no solo cambia esta o aquella Hechura sino la Hechura misma.

Por otro lado, la Determinación es el límite que ha sido retirado de su referencia (*Beziehung*) a Otro[210]. Pero hemos visto que la Determinación es traspasar a la Hechura. Por esta razón, el límite que tiene en cuenta este traspasar, el límite que en su limitar no se refiere a otro sino que se refiere a sí mismo como a Algo que no es él, es, no ya Límite (*Grenze*), sino, Limitación (*Schranke*) [211]. El Ser-en-sí, en su referencia con esta Limitación es el Deber

---

[203] Esta clase de límite indiferente es lo que Hegel, en el §92 de la Enz., llama “die quantitative Grenze”.
[204] En este punto, con el límite (con la determinidad) desaparece también el algo: “wenn die Bestimmtheit verschwindet, so verschwindet Etwas selbst” (en Hegel [1978] p. 69).
[205] Por esta razón dirá Hegel que la Determinación es la referencia (*Beziehung*) o límite, consigo mismo, es decir, que en la Determinación reposa el Algo en sí mismo. Cf. sobre este punto Hegel [1978] p. 70.
[206] Desde esta perspectiva, el paso de las clasificaciones “artificiales” de animales de, por ejemplo, P. Belon y G. Rondelet a las “naturales” de, por ejemplo, J. Jungius se explica por el paso de una clasificación basada en la Hechura de algo –de un ser vivo– a otro basado en la Determinación de ese mismo algo. Cf. al respecto el ejemplo sobre las hierbas que proporciona Hegel en Hegel [1978] p. 71. Cf. al respecto Jacob [1970] p. 29 sigs.
[207] Podría también decirse algo así como “traspaso del uno en el otro” (*das Übergehen ineinander*, en Hegel [1985] p. 113). En la Cualidad la Determinación y la Hechura remiten uno a otro, es decir, son Momentos. Para comprender esto es imprescindible remitirse a la edición de 1832 de la lógica. En él (Hegel [1985] p. 111 y sig.), el traspaso de la Determinación en la Hechura se explica así: lo que el Algo es en sí (la Determinidad simple), lo es también en él (la Determinación). Esto último hace que el Algo esté abierto a la relación con los otros, que el Algo este afectado por el Ser-para-otro. A su vez, el traspaso de la Hechura a la Determinación adquiere la siguiente formulación: la Hechura aislada o puesta para-sí, es lo mismo que lo Otro. El Algo que tiene una Hechura tiene así una referencia con un Otro que, sin embargo, lleva en sí: “so ist es aber sich auf sich beziendes Dasein” (en Hegel [1985] p. 112). Pero si esto es así, tener una Hechura significará que el Algo es un en-sí con una Determinidad. Esto último no es otra cosa que la Determinación.
[208] Cf. Hegel [1978] p. 72: “Indem […] seine [del Algo] Bestimmtheit eben so sehr sein Anderes [del lado de la Hechura] als die seinige [del lado de la Determinación] ist, so ist hier ein Werden gesertzt, welches Veränderung ist”.
[209] Debido a que este cambio se da sobre la base de una Determinación que permanece fija, hablamos de cambio y no de desaparición o creación.
[210] Cf. Hegel [1978] p. 73: “die Bestimmung ist die der Beziehung auf Anderes entnommene Grenze”.
[211] Para la diferencia entre Límite y Limitación cf. Duque [1998] p. 616 nota 1469.

ser (*Sollen*). En el Deber-ser el Algo es elevado sobre su Limitación. A su vez, Algo tiene una Limitación en la medida en que tiene un Deber ser[212].

La unión de la Limitación y el Deber ser es la Negación (*Negation*). En efecto, por un lado la Negación no es la nada en abstracto, sino más bien un no-ser que niega en su referencia al en-sí del Algo negado. En este sentido la Negación es Límitación. A su vez, la Negación de esta Determinidad o Limitación es una Negación de la Negación, es decir, una absoluta Negación o Deber-ser. Estas dos Negaciones, la Negación puesta como No-ser y la Negación que es en-sí, en su mutua relación constituyen lo cualitativo finito y lo cualitativo infinito junto con su referencia mutua.

Hemos visto ya que en la Limitación el Ser-ahí se *referencia* consigo mismo como con algo que es su negación. El Ser-ahí es, en este sentido, Finitud (*Endlichkeit*). A su vez, el Ser-ahí se comporta en el Deber ser como la Negación de su Limitación o como Negación de la Negación. Esta superación de sí misma de la Finitud es la Infinitud (*Unendlichkeit*). Esta última Infinitud se distingue de la mala Infinitud en que la Infinitud de veras (*wahre Unendlichkeit*) es la superación o Negación de la Finitud y, de ahí, es Negación de la Negación. La mala Infinitud es la Infinitud que tiene en sí la Finitud pero como algo Otro. La determinación mutua de la mala Infinitud o Infinitud que remite a la Finitud como a algo fuera de sí y la Finitud es lo que en la categoría de la cantidad se denominará "proceso al infinito"[213]. En esta determinación mutua, en la medida en que cada Momento se refiere a un Otro no sólo como algo que tiene fuera de sí[214] sino que, a la vez, como un Otro que es *su* Otro, está contenida su misma superación (*Aufhebung*) o Negación:

Die Endlichkeit ist nur als Hinausgehen über sich; es ist also in ihr die Unendlichkeit, das Andere ihrer selbst enthalten. Ebenso ist die Unendlichkeit nur als Hinausgehen über das Endliche; sie hat nur Bedeutung als die negative Beziehung auf das Endliche, sie enthält also wesentlich ihr Anderes und ist somit an ihr das Andere ihrer selbst.[215]

En la infinitud de veras cada momento tiene su Otro dentro de sí[216]. En la infinitud de veras se supera la unilateralidad tanto de la la finitud como de la mala infinitud haciendo de ellos momentos. Cada uno es de este modo unidad consigo mismo en su remitirse a otro. La Determinidad no es ya una mera referencia con Otro, sino que es una Determinidad que en su referencia con Otro es una referencia consigo mismo; salir de sí es retorno a sí[217] . Este absoluto estar determinado o estar determinado en sí, es el Ser-para-sí (*Fürsichsein*).

---

[212] Cf. Hegel [1978] p. 75: "Als Sollen ist somit Etwas über seine Schranke erhaben, umgekehrt hat es aber nur als Sollen seine Schranke".

[213] Cf. Hegel [1978] p. 81: Diese Wechselbestimmung ist es, welche näher im Quantitativen als der Progreß ins Unendliche auftritt". Como se explica en la nota 589, traducimos el término "Progreß" por "Proceso" y no por "Progreso" como cabría esperar.

[214] Esto era lo que hacía del presunto infinito un mero mal infinito. Cf. Hegel [1978] p. 81: "Er [el proceso al infinto] ist das Aussere jener Einheit, bei welchem die Vorstellung stehen bleibt".

[215] Cf. Hegel [1978] p. 82.

[216] Es decir, la infinitud de veras representa la etapa especulativa frente a la etapa dialéctica represenda por el Proceso al infinito.

[217] Es decir, "die wahre Unendlichkeit besteht in dem Hinausgehen über das Anderssein als der Rückkehr zu sich selbst" (en Hegel [1978] p. 83).

1.1.3. El Ser para sí (*Das Fürsichsein*)

La unión de la Finitud y la mala Infninitud es el Ser-para-sí[218] o la Infinitud de veras. El Ser-para-sí es la identidad consigo mismo de Algo. Su referencia a otro no es más que la referencia a sí[219] como Negación de la Negación. Esta superación del Ser-otro es la Unidad que hace referencia a sí misma[220]. Esta Determinación del Ser-para-sí que consiste en referenciarse a sí en su superar su Ser-otro es la Idealidad (*Idealität*). En la Idealidad no hay así un Ser-ahí fuera de Algo que pueda funcionar como límite. El Ser-para-otro es en la Idealidad el Ser-para-uno. A su vez el Ser-en-sí es en la Idealidad el Ser-para-sí. Debido a que en su referir a Otro se refiere a sí mismo, el Ser-para-uno es uno con el Ser-para-sí.

Bajo la forma de la inmediatez[221], esta igualdad consigo del Ser-para-sí resulta ser un Ser-dentro-de-sí que se refiere a Nada. Bajo la forma de la inmediatez el Ser-para-sí es el Ente-para-sí (*Fürsichseiende*) o Uno (*Eins*). Al no tener un Otro con el que determinarse, el Uno es incambiable. La indeterminación del Uno no es como la del Ser del comienzo. La indeterminación del Uno es la absoluta determinación o igualdad con, referencia a, sí. A su vez, la inmediatez de aquello a lo que esta referido el Uno, la Nada, no es la inmediatez de la pura Nada del comienzo, sino que será una Nada que es resultado de la superación del Algo; esta Nada es el Vacio (*Leere*). El Uno y el Vacio son la pura Negación[222] puesta como ente y no-ente respectivamente[223].

Con el Vacio, el Ser-para-sí retoma de nuevo la forma del Ser-ahí. El Uno tiene así su límite, su Determinidad en el Vacio. Pero ya hemos visto que en la Idealidad este Otro no puede ser sino uno mismo. Este Vacio tiene que ser así, a la vez, lo mismo que lo Uno y su Otro: el Uno y el Vacio *devienen*[224] así muchos Uno (*viele Eins*). En la Idealidad, este Uno se refiere a sí absolutamente. Esto de “absolutamente” implica que al no haber un afuera al que referirse[225], el Uno se refiere a sí negativamente. La referencia Negativa a sí del Uno es la Repulsión (*Repulsion*):

---

[218] La expresión alemana, *Fürsichsein*, tiene un significado que no es recogido por el término “Ser-para-si” y que es importante señalar: a saber, el significado de “ser por sí solo”. Sólo así se entiede que en los albores de la cantidad, en el “Ser-para-sí”, todo otro no sea más que sí mismo.

[219] Cf. en este punto Duque [1998] p. 620: “Ya no se trata de una simple referencia a sí (como el «ser» del comienzo) ni de la determinación del ser (como era el caso del «estar ahí» o *Daseyn*), sino del ser *autodeterminado* como lo *Uno*, que, por lo pronto, excluye de sí a lo otro”.

[220] Cf. Hegel [1978] p. 88: “Die unendliche Beziehung auf sich ist nur als Negation der Negation, und dieses Aufheben des Anderseins ist unmittelbar sich auf sich beziehende Einheit”.

[221] La “forma de la inmediatez” hace referencia al hecho de que en el Uno el Momento del Ser-ahí al no tener un Otro fuera de sí con el que poder determinarse se ha visto retraido (*zurückgekehrt*) al puro Ser del comienzo. Cf. Hegel [1978]p. 91-92: “Das Eins ist die einfache Beziehung des Fürsichseins auf sich selbst, die, indem seine Momente in sich zusammengefallen sind, die Form der Unmittelbarkeit hat. Es ist daher überhaupt, ohne ein Dasein zu haben; das bestimmte Sein oder Dasein ist ihm Fürsichsein zum reinen Sein zurückgekehrt”.

[222] “Pura Negación” debido a que ambos son el absoluto estar determinado.

[223] Siguiendo con la puesta en común del movimiento de la *Wissenschaft der Logik* y de la Historia de la Filosofía comenzada en la nota 184, resulta obvio que la filosofía que corresponde a estos nuevos momentos del Uno y la Nada es la Atomista. Cf. al respecto Hegel [1978] p. 93.

[224] Aunque hable en este punto de “werden”, Hegel advierte (en Hegel [1978] p. 94) que este devenir no implica un traspaso a algo contrapuesto como en el caso del devenir del Ser a la Nada.

[225] Por referencia Negativa entiende Hegel una Referencia sin referente (*Bezogenes*). Cf. al respecto Hegel [1978] p. 94: “Denn Eins ist Beziehung auf sich als negatives Beziehen; so ist es Fürsichsein überhaupt, ein Beziehen ohne Bezogenes”.

Die Repulsion ist also wohl Werden der vielen Eines, aber durch das Eins selbst.[226]

La Repulsión no lo es de un Uno contra los muchos Uno, sino que cada Uno se repele de cada Uno: la Repulsión es una Repulsión recíproca (*gegenseitig*). De este modo cada Uno no es ya para-sí sino que es ahora para-uno. En la Repulsión, en la medida en que la relación entre los Uno es de exclusión, el Ser-para-uno tiene la forma de Ser-para-otro. Sólo que este Ser-para-otro lo es con respecto (*Rücksicht*) a un Otro. Desde el respecto del Uno cada un Otro es lo mismo que Uno mismo: en-sí cualquier Uno es igual a cualquier Uno. Esta referencia negativa del Uno a sí es la Atracción (*Attraktion*) o repulsión de la Repulsión. El Uno de la Repulsión es lo que Hegel denomina el Uno inmediato o como es en sí. A su vez, el Uno resultado de la atracción, cada Uno de ellos, es el Uno real (*real*) o un Uno.

La Atracción es el Ser-para-sí mediato que resulta de la superación o negación de Ser-otro[227]. Es decir, el Uno de la atracción no es el Uno que tiene una Referencia inmediata a sí, sino que es Referencia a sí como superación del Ser-otro. A diferencia de lo que ocurría en el Ser-ahí, en el Ser-para-sí este Ser-otro no es algo inmediato sino que es el Ser-otro que tiene en sí: la Pluralidad (*Vielheit*), es decir, su otro.

Vemos así que la Repulsión y la Atracción no son sino una y la misma cosa. Efectivamente, la Repulsión, al consistir en la exclusión de los otros, los pone como Entes-para-otro. Pero al ser Entes-para-otro también todos los demás Uno, Cada Uno en su referencia a otro no hace más que referirse a sí. Del mismo modo, hemos visto que el Uno de la Atracción no es el Uno inmediato que tenga como su otro el vacio, sino que es un Uno que excluye y por ello mismo contiene su otro, la Pluralidad, en sí. Pero esto no es otra cosa que la Repulsión.

De este modo, tenemos como resultado un Uno que en su referencia a otro no hace más que referirse a sí, un Uno con una Referencia infinita: una Unidad (*Einheit*). En la Unidad, el Ser-otro es un Límite que no es ya una Determinidad como referencia a un otro: el Límite le es indiferente a la Unidad [228]. Esta Unidad es la Cantidad.

1.2. CANTIDAD

1.2.1. La Cantidad (*Die Quantität*)[229]

En la Cantidad la Determinidad no es algo que se refiera a un Otro como a algo que es negado. En la Cantidad la Determinidad le es indiferente, exterior (*äußerlich*), al Ser. En la medida en que esta Determinidad no es todavía ninguna Determinidad, la Cantidad es pura Cantidad (*reine Quantität*). Vamos a ver que los Momentos de la Repulsión y de la Atracción dan lugar en la pura Cantidad a los Momentos de la Discreción (*Diskretion*) y la Continuidad (*Kontinuität*) respectivamente. Esto tiene como consecuencia el que toda Cantidad sea

[226] Cf. Hegel [1978] p. 94.
[227] Un Ser-otro que, como hemos visto, tenía en la Repulsión la forma de la pluralidad o muchos Uno.
[228] Es decir, no es ya el límite cualitativo.
[229] Este momento corresponderá en la Historia del pensamiento al materialismo cuyo origen situará Hegel en la segunda mitad del siglo XVIII en francia. Cf. Hegel [VIII] p. 211.

Discreta y Continua. La afirmación unilateral de uno de estos momentos es un vicio del entendimiento que no puede menos que resultar contradictoria.

El momento de la Atracción, el de la Referencia a sí de los Uno no ya inmediatos, da lugar en la magnitud[230] (*Größe*) a la Continuidad. La Continuidad es el momento de igualdad consigo mismo del Ser-afuera-de-sí (*Außersichsein*), la puesta del en sí de la Pluralidad[231]:

Die kontinuität ist dieses Moment der Sichselbstgleicheit des Außereinanderseins

Pero estos Uno, al ser unos Uno Siendo-para-sí, tienen la pluralidad en sí. De este modo resulta que la Continuidad tiene en sí el Momento de la Discreción. Efectivamente, mientras que la Continuidad refleja el lado de la mismidad (*Dieselbigkeit*) en la igualdad consigo mismo de los muchos, la Discreción refleja el que estos iguales son, sin embargo, muchos, es decir, distinguibles[232]. Estos Uno no son ya los muchos Uno en general sino muchas Unidades o unos Uno que son iguales entre sí[233]. Esto hace que la Discreción tenga en sí el momento de la Continuidad[234].

A su vez, la Continuidad es la unidad de los Uno fuera de sí. Esto significa que la Continuidad contiene en sí el principio del Uno. Pero esto es lo mismo que afirmar que la Continuidad tiene en sí la Discreción, es decir la posibilidad absoluta[235] de poner un Uno.

---

[230] La exposición de la distinción entre la magnitud (*Größe*) y la cantidad (*Quantität*) tiene lugar en Hegel [1978] p. 112 y p. 121. En resumen, podemos decir que la primera remite a la inmediatez o al en sí de la Cantidad, mientras que la segunda es el resultado, la reflexión de la magnitud. De este modo, es en la cantidad y no en la magnitud donde la continuidad y la discreción adquieren el estatuto de momentos y, por lo tanto, su absoluta unidad: "Die Größe als die Einheit dieser Momente der Kontinuität und Diskretion kann Quantität genannt werden" (in Hegel [1978] p. 112). Por todo ello, cuando se trata de subrayar un de los aspectos –discreto o continuo– de algo, Hegel hablará de magnitud discreta –o continua–, y no de cantidad discreta –o continua–. Cf. Hegel [1978] p. 121 donde Hegel habla de "continuierliche Größe" y de "discrete Größe".

[231] Y es que en sí, los elementos de la pluralidad son todos iguales.

[232] Decimos "distinguible" (*Unterscheidbar*) y no "distinto" (*Unteschied*) por que el segundo afirmaría unilateralmente el carácter discreto de la cantidad ignorando así el momento de la continuidad. Es más, el término "distinguible" introduce en la cantidad ese aspecto de potencialidad o mala infinitud que apunta a la necesidad de ir mas allá de la dialéctica entre lo discreto y lo continuo. Este "mas allá" es lo especulativo. El camino hacia el mismo es "lo dialéctico". Sobre el carácter de potencialidad introducido por el término "distinguible" cf. Hegel [1978] p. 112: "Der Unterschied des Repellierens ist daher nur als **Unterscheidbarkeit** vorhanden", p. 113: "Daß sie [die Quantität] die aufgehobene Diskretion ist, kann auch so ausgedrückt werden, daß die Quantität schlechthin in ihr allenthalben die reale **Möglichkeit** des Eins ist", p. 120: "Nach der Kontinuität ist dieses Eins nur ein Aufgehobenes; das Teilen bleibt **Teilbarkeit**, es bleibt die Möglichkeit zu teilen als Möglichkeit, ohne wirklich auf das Atome zu kommen", p. 122: "Sie [die Quantitäten] haben die absolute **Möglichkeit**, daß das Eins allenthalben an ihnen gesetzt werde; sie haben diese Möglichkeit nicht als die leere Möglichkeit eines bloßen Anderseins […] sondern sie enthalten das Prinzip des Eins an ihnen selbst" (subrayado nuestro).

[233] Cf. Hegel [1978] p. 121.

[234] Al mismo tiempo, esto consigue dar cuenta del, a primera vista, enigmático ejemplo de la *Zus*. al § 100 de la *Enzyklopädie*. En él, Hegel afirmará el Momento de la continuidad para el caso en el que se consta de cien hombres. Ello se debe a que el Género Humano (*die Gattung Mensch*) es el que hace de cada uno de esos cien hombres no sólo un Uno sino que una Unidad o el mismo Uno. Cf. Hegel [VIII] p. 211: "Kontinuität ist das Eins als Dasselbe der vielen Eins, die Einheit".

[235] El que la posibilidad sea absoluta y no, como dice Hegel, una vacia posibilidad viene dado del hecho de que el Uno, como hemos visto, es un principio contenido en la continuidad. Cf. Hegel [1978] p. 122 al respecto. Esta posibilidad de poner un Uno es lo que recoge el sentido de δυνάμει del infinito aristotélico. Las alusiones a la ponibilidad de poner el Uno en la continuidad, al carácter esencialmente potencial (e.d., discreto) de lo continuo tienen lugar también en Hegel [1978] p. 112 ("Der Unterschied des Repellierens ist daher nur als **Unterscheidbarkeit** vorhanden". Subrayado nuestro), en Hegel [1978] p. 112 ("die Quantität schlechthin in ihr

La unidad de los momentos de la Continuidad y de la Discreción es la limitación de la Cantidad o el Quantum (*Quantum*). La tarea de mostrar que la Continuidad y la Discreción no constituyen una unidad meramente inmediata sino que son una unidad absoluta o momentos uno del otro, es realizada mas o menos satisfactoriamente por Kant en la segunta antinomia de la razón de la *Kritik der reinen Vernunft*. Veamos esto.

1.2.2. La segunda Antinomia Kantiana en Hegel

En la segunda nota del parágrafo sobre la pura Cantidad, Hegel analiza los supuestos del tratamiento kantiano de la antinomia de la cantidad de la *Crítica de la Razón Pura*. Si bien es verdad que los razonamientos de Zenón resultan ser para Hegel más ingeniosos y profundos[236] que las antinomias kantianas, son estas últimas las que terminan siendo estudiadas en la *Wissenschaft der Logik*. Con el fin de salvar esta aparente[237] inconsecuencia, hemos considerado oportuno ofrecer una lectura *hegeliana* de las argumentaciones dialécticas de Zenón. A tal tarea esta dedicado el segundo capítulo de esta primera parte. Pero de momento, siguiendo la exposición de Hegel, vamos a centrarnos en la crítica de la segunda aninomia kantiana que nos ofrece Hegel.

1.2.2.1. Exposición de la segunda Antinomia

El fin de las antinomias de la *Crítica de la razón Pura* era el de combatir el dogmatismo inconsciente del entendimiento[238]. Esta especie de olvido consiste en que se hace pasar un Principio (*Grundzatz*) regulativo de la razón por un principo (*Prinzip*) consitutivo[239]. La postura de la tesis es aquella en la que al entendimiento le queda demasiado pequeña la idea que se le ofrece por la razón. En la antítesis, por el contrario, la idea de la razón le es demasiado grande al entendimiento[240]. La segunda de las antinomias de la razón, la que Hegel

allenthalben die reale **Möglichkeit** des Eins ist". Subrayado nuestro) y en Hegel [1978] p. 120 ("das Teilen bleibt **Teilbarkeit**, es bleibt die **Möglichkeit** zu teilen als **Möglichkeit**, ohne wirklich auf das Atome zu kommen". Subrayado nuestro). Nos ocuparemos más detalladamente de este punto en el apartado 3.1.3 de este trabajo.

[236] Cf. Hegel [1978] p. 120: "Unendlich sinnreicher und tiefer als die betrachtete Kantische Antinomie sind die dialektischen Beispiele der alten eleatischen Schule". Cf. también el comentario de Hegel al final de su exposición de la paradojas de Zenón en sus *Lecciones sobre la Historia de la Filosofía*: "Er [Zenón] hat die Bestimmungen aufgefaßt, die unsere Vorstellung von Raum und Zeit enthält; er hat sie in seinem Bewußtsein gehabt und hat darin das Widersprechende gezeigt. Kants Antinomien sind nichts weiter, als was Zenon hier schon getan hat" (en Hegel [XVIII] p. 316).

[237] "Aparente" por que Hegel era bien consciente del papel fundamental que tienen las antinomias en el desplome de la metafísica precrítica. Cf. al respecto Hegel [1970] p. 133: "Diese Kantischen Antinomien bleiben immer ein wichtiger Teil der kritischen Philosophie; sie sind es vornehmilich, die den Sturz der vorhergehenden Metaphysik bewirken und als ein Hauptübergang in die neuere Philosophie angesehen werden können".

[238] La expresión "dogmatisme inconscient de l'entendement" la tomamos de Lebrun [1970] p. 129.

[239] Cf. *KrV* 536/B 537: "Der Grundsatz der Vernunft […] ist […] kein constitutives Princip der Vernunft […] sondern ein Grundsatz der größtmöglichen Fortsetzung und Erweiterung der Erfahrung, nach welchem keine empirische Grenze für absolute Grenze gelten muß, also ein Principium der Vernunft, welches als Regel postulirt, was von uns im Regressus geschehen soll, und nicht anticipirt, was im Objecte vor allem Regressus an sich gegeben ist".

[240] Cf. *KrV* B557: "die Vernunft es dem Verstande entweder zu lang oder zu kurz machte, so, daß dieser ihrer Idee niemals gleich kommen konnte".

considera que consituye el momento de la cantidad[241], tiene como fundamento el regreso, denominado, al infinito (*regressus ad infinitum*). Frente al *regressus ad indefinitun* fundamento de la primera antinomia, el *regressus ad infinitum* presupone un todo dado[242] en la intuición empírica a partir del cual parte el progreso una y otra vez. El *regressus ad indefinitum* parte de una parte indefinidamente por composición[243] hacia un todo que no está dado de antemano[244]. Como se vé, esta distinción es solidaria de la distinción entre las magnitudes extensivas e intensivas en Kant[245]. La regla de construcción de un *regressus ad indefinitum* nos la proporcionan las magnitudes extensivas que, como se sabe, son resultado de la síntesis sucesiva de lo homogéneo que va de la parte al todo[246]. Por el contrario, un *regressus ad infinitum* presupone un todo (*ein Ganze*) del mismo modo que las magnitudes intensivas lo presuponen para, partiendo de ahí y mediante la síntesis sucesiva de lo homogéneo que esta vez se aproxima a la negación (=0)[247], obtener la magnitud de Grado[248].

Como decíamos, la postura de la Tesis es aquella en la que se afirma algo que, por defecto, no se adecúa a la idea que se le ofrece por la razón. De este modo, la Tesis afirma la simplicidad de la substancia en base a que entiende la composición como algo accidental a la misma. La prueba de la misma es *apagógica* o por reducción al absurdo: debido a que al ser la composición algo accidental a la substancia, si no pudiese suprimirse (*aufheben*) la misma, lo compuesto, contra el supuesto de la Tesis, no constaría de substancias, tenemos que admitir que sí es posible una tal supresión sin que, debido a que se supone implícitamente que ha de haber substancias, quede como resultado nada; el resultado es de este modo la substancia simple, es decir, la tesis a demostrar.

A su vez, la Antítesis pretende demostrar por reducción al absurdo que nada simple existe en el mundo: si la substancia compuesta consistiera de partes simples, estas partes ocuparían (*einnehmenn*) un espacio cuya divisibilidad implicaría la divisibilidad del cuerpo en partes que resultarán ser, debido a que lo que ocupa el espacio es un simple real, substanciales

---

[241] Cf. Hegel [1970] p. 114: “[...] vier (kosmologische) Antinomien [...] die zweite den Gegensatz betrifft, der die Momente der Quantität ausmacht”.

[242] No por casualidad el epígrafe dedicado a la solución de la segunda antinomia lleva el título siguiente (en *KrV* B 552) “Auflösung der Kosmologischen Idee von der Totalität der Teilung eines **Gegebenen Ganzen** in der Anschaung” (subrayado nuestro).

[243] Cf. asimismo el título del epígrafe dedicado a la solución de la segunda de la antinomias: “Auflösung der Kosmologischen Idee von der Totalität der **Zusammensetzung** der Erscheinungen von einem weltganzen” (subrayado nuestro) (en *KrV* B546).

[244] Cf. *KrV* B 540/B541: “Ich sage demnach: wenn das Ganze in der empirischen Anschauung gegeben worden, so geht der Regressus in der Reihe seiner inneren Bedingungen ins Unendliche [in **infinitum**]. Ist aber nur ein Glied der Reihe gegeben, von welchem der Regressus zur absoluten Totalität allererst fortgehen soll: so findet nur ein Rückgang in inbestimmte Weite (in **indefinitum**) statt” (subrayado nuestro). Los ejemplos que ofrece Kant para el *regressus ad infintum* y el *regressus ad indefinitum* son, respectivamente, el de la división de una materia dada entre dos límites y el de la regresión en los antepasados de una persona dada.

[245] Algo que afirma expresamente Kant en su *Preisschrift*: “In Ansehung der extensiven Größe der Welt in Messung derselben [zeigt sich folgende Antinomie] […] *a*) der Satz: Die Welt ist der Größe nach im Raum [o “in der Zeit”] unendlich […] [b) Gegensatz: Die Welt ist der Größe nach im Raum, bzw. in der Zeit, endlich] […]. In Ansehung der intensiven Größe […] zeigt sich folgende Antinomie. *a*) Satz: Die körperlichen Dinge im Raum bestehen aus einfachen Theilen […] *b*) Gegensatz: Die Körper bestehen nicht aus einfachen Theilen” (en Kant [XX] p. 289).

[246] Para una definición tal cf. *KrV* B 210: “das Reale in der Erscheinungen hat jederzeit eine Größe, welche aber nicht in der Apprehension angetroffen wird, indem diese vermittelst der bloßen Empfindung in einem Augenblicke und nicht durch sukzessive Synthesis vieler Empfindungen geschieht, und also nicht von den Teilen zum Ganzen geht; es hat also zwar eine Größe, aber keine extensive”.

[247] Cf. la definición que ofrece Kant en *KrV* B 210: “Nun nenne ich diejenige Größe, die nur als Einheit apprehendiert wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation =0 vorgestellt werden kann, die intensive Größe”.

[248] Volveremos sobre esto en el punto 3.1.2.

y no accidentales, con lo que tendríamos, contradiciendo el supuesto, unos simples substancialmente compuestos de partes. De este modo, se rechaza que la substancia conste de partes simples. La tesis afirmativa de la Antítesis que no llega a ser expresada por Kant en el epígrafe[249] es la siguiente: la Materia está dividida al infinito.

Vemos así que el olvido al que nos referíamos más arriba es un olvido doble. Del lado de la Tesis, el *monadista* toma los objetos de la experiencia como cosas en sí mismas olvidando que el objeto de todo conocimiento posible es el fenómeno[250]. El *monadista* olvida[251] en particular poner el espacio como condición de posibilidad de los objetos de la experiencia. y con ello, elimina la pluralidad propia de la intuición de su prueba apagógica. La conclusión no podía menos que ser la de la simplicidad de la substancia.

Del lado de la antítesis, hemos visto que se pasa de la refutación por absurdo de la tesis que afirma la simplicidad de la substancia a la tesis afirmativa de la infinitud de la división de la materia. Este paso presupone que hay una relación de contradictoriedad entre la tesis refutada y la tesis afirmada. Esta relación de contradictoriedad es la que justamente va a resultar refutada por la empresa crítica[252]. De la falsedad del *refutandum*, es decir, de la falsedad de la tesis no se sigue la verdad de su negación, es decir, la verdad de la antítesis. La relación entre las afirmaciones de la tesis y la antítesis no es de contradictoriedad sino de contrariedad. Tesis y antítesis son, de este modo, ambas falsas. La síntesis regresiva de lo condicionado a la condición no se puede cerrar ni para afirmar su finitud –tal y como se hace desde la Tesis– ni para afirmar su infinitud –como se hace desde la postura de la Antítesis. Los predicados de “ser finito” y “ser infinito” son mutuamente contradictorios únicamente en relación a un mundo que fuese un existente en sí: “Wenn die Welt ein an sich existirendes Ganzes ist, so ist sie entweder endlich, oder unendlich”[253].

El mundo no es sin embargo un algo, un todo, dado. “Mundo” es una Idea que, en cuanto tal, no tiene un objeto adecuado subsumible dentro de los objetos de la experiencia posible. En este sentido, la idea de Mundo, en tanto que idea, no es un objeto posible de

---

[249] Efectivamente, expresada tal y como es expresada en el encabezamiento (“Kein zusammengesetztes Ding in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts Einfaches in derselben” se lee en *KrV* B 463) la postura de la Antítesis resulta ser correcta desde la perspectiva crítica.

[250] En caso contrario, es decir, en el caso en el que los cuerpos fuesen cosas en sí mismas los monadistas tendrían razón. Cf. *KrV* B 470: “Wären sie [los cuerpos] an sich selbst, so würde der Beweis der Monadisten allerdings gelten”. Digamos que el *monadista* tiene únicamente razón si el objeto al que se aplica su razonamiento es uno bien particular; el objeto pensado bajo la representación “Yo” o, desde Leibniz, la substancia interna o mónada. Cf. al respecto *KrV* B471: “wenn etwas bloß als gegenstand gedacht wird, ohne irgend eine synthetische Bestimmung seiner Anschauung hinzu zu setzen, (wie denn dieses durch die ganz nackte Vorstellung: Ich, geschieht,) so könne freilich nichts Mannifaltiges und keine Zusammensetzung in einer solchen Vorstellung wahrgenommen werden”. Cf. también Duque [2002] p. 135-136: “no se trata de una presunta sustancia “interna” y por ende “simple” -guía de Leibniz para su monadología-, sino de los objetos del mundo externo o sensible”.

[251] Exponemos algo tangencialmente lo que en un trabajo sobre Kant acaso tendría que expresarse así: es el cariño con respecto al mundo el que, debido a que la admisión de algo en sí deriva en una contradicción insalvable, lleva a eliminar el supuesto del en sí para, con ello, pasar a hablar únicamente de los fenómenos que ya no tendrán peligro de derivar en contradicción. Sólo alguien con tan poco cariño con respecto al mundo o con tanto respeto con respecto al pensamiento como Hegel podía ver la oportunidad de quedarse con lo en sí a cambio de únicamente aceptar la contradicción, como regla de la verdad.

[252] Esta es la razón por la cual resulta extraño encontrarse en la formulación de la Antítesis con una afirmación que no es mas que la negación de la Tesis. Efectivamente, para que uno pueda expresar la Antítesis mediante una formulación negativa (a diferencia de la formulación afirmativa de B467: “Wieder diesen **Satz einer unendlichen Teilung der Materie** [...]” (subrayado nuestro)) tiene que presuponer algo que, no obstante, la solución kantiana de la antinomia va a refutar: a saber, que hay una relación de contradicción entre la Tesis y la Antítesis, es decir, que el mundo es una cosa en sí. Bajo la empresa crítica, la negación de la Tesis no es la afirmación de la Antítesis.

[253] Cf. *KrV* B 534.

conocimiento. La idea de Mundo tiene un carácter exclusivamente regulativo de conocimiento[254]. Desde esta perspectiva, la prueba apagógica carece de validez debido a que se basa en la negación de predicados que no resultan contradictorios entre sí:

a) contra la Tesis, la refutación de la tesis que afirma que la substancia no está compuesta por lo simple no sirve para demostrar que la substancia consista de lo simple.

b) contra la Antítesis: la refutación de la tesis que afirma que la substancia esta constituida de lo simple no sirve para demostrar la tesis de la infinita división de la materia.

Ni simple ni compuesto. Bajo el falso substrato "Mundo" que en esta segunda antinomia esta sujeto a la síntesis regresiva *ad infinitum* o magnitud intesiva, los predicados "simple" y "compuestos" no consituyen un par de predicados contradictorios. Ambas posturas son falsas: la substancia en el Mundo no es simple –contra la Tesis– ni compuesta –contra la Antítesis. Y ello por que no hay una substancia dividida que sea previa a la división[255]; para Kant no tiene sentido hablar de una representación (*Vorstellung*) que sea anterior a la facultad de representar (*Vorstellungskraft*). Y es que en Kant decir que un ser es finito es lo mismo que decir que los objetos le son dados en la sensibilidad o, en definitiva, que no puede conocer más que los fenómenos: podemos conocer los fenómenos del mundo pero no el mundo mismo como fenómeno, como totalidad.

1.2.2.2. La segunda Antinomia vista desde Hegel

Para Hegel, la resolución kantiana de las Antinomias de la razón en la que se denunciaba la apariencia transcendental en la que la misma se basaba, implica convertir la misma en algo subjetivo[256], y en esta medida, irresuelto[257]. La resolución de cualquier antinomia no consiste en decir que no hay tal antinomia para el sujeto en cuestión[258], sino en afirmar la unilateralidad de de la afirmación de la Tesis y la Antítesis: la Tesis y la Antítesis tienen su verdad en su recíproca supresión:

Ihre wahrhafte Auflösung kann nur darin bestehen, daß zwei Bestimmungen, indem sie entgegengestzt und demselben Begriff notwendig sind, nicht in ihrer Einseitigkeit, jede für sich, gelten können, sondern daß sie ihre Wahrheit nur in ihrem Aufgehobensein haben.[259]

---

[254] Cf. en este punto Marzoa [1989] p. 130-131.

[255] Cf. Kant [IV] p. 342: "die Theile existiren blos […] in der Theilung d.i. in einer möglichen Erfahrung". Nótese que en la primera parte de la formulación no esta claro si el sujeto que divide es uno que es *de facto* o uno que es *de iure*. La duda se resuelve a favor de este último sujeto en la segunda parte de la formulación.

[256] Para Kant, dice Hegel, no son las cosas las que resultan contradictorias, sino el sujeto que se enfrenta a ellas: "Daß aber nicht die Dinge sich widersprechen, sondern es, das ficht die Kantische Philosophie weiter nicht an; es tut nichts [...] Das ist zuviel Zärtlichkeit für die Dinge" (en Hegel [XX] p. 358). Cf. también Enz. § 48 (Hegel [VIII] p. 126): "Die *Auflösung* ist, daß der Widerspruch nicht in den Gegenstand an und für sich fällt, sondern allein der erkennenden Vernunft zukommt".

[257] Cf. Hegel [1970] p. 114-115: "Die kritische Auflösung […] hat kein anderes Resultat, als daß sie den sogenannten Widerstreit zu etwas Subjektiven macht, worin er freilich noch immer derselbe Schein, d. h. so unaufgelöst bleibt als vorher".

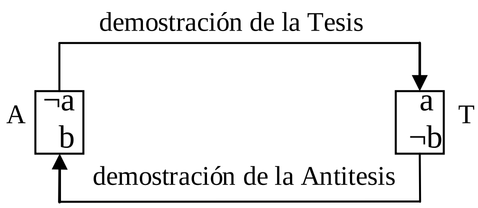
[258] Diciendo, como hemos visto que se hacía desde la filosofía crítica, que tal sujeto no puede ser sujeto de ningún posible predicado.

[259] Cf. Hegel [1970] p. 115.

La contradicción no es rechazada como en Kant, sino suprimida. Es más, es únicamente desde esta “Síntesis” desde donde la contradicción es una verdadera contradicción. Cada afirmación es falsa en su unilateralidad y por lo tanto es incapaz de contradecir una tesis que la contradiga. Sólo desde la *supresión* de la contradicción hay una superación *de la contradicción*.

El mostrar que una contradicción tal es necesaria es lo que honra principalmente a la exposición kantiana de las antinomias[260]. Pero el mérito no va mas allá. Kant permanece en el lado meramente negativo de estas antinomias[261] y por ello concluye de ellas la imposibilidad de la razón para conocer la cosa en sí. Esto último es ciertamente absurdo para Hegel: con ello priva Kant a la razón de la posibilidad de conocer lo racional[262], es decir, lo Infinito.

Frente al momento dialéctico o meramente negativo de la filosofía kantiana, Hegel representa bajo lo especulativo el momento positivo de la contradicción. La negación de la negación, lo especulativo, es la comprensión de la unidad de los contradictorios. Esta unidad consiste en mostrar que cada concepto tiene su verdad en su contradictorio. A primera vista, podría parecer que esto es lo que hace precisamente Kant en sus pruebas por reducción al absurdo. Así, en la Tesis, partiendo de la suposición de que la substancia compuesta no consta de partes simples se acaba concluyendo que la substancia consta de partes simples. A su vez, en la Antítesis, partiendo de la suposición de que la substancia compuesta consta de partes simples, se termina concluyendo que lo simple es un compuesto substancial. En términos generales, podemos representarnos el movimiento de la segunda Antinomia mediante el siguiente esquema:



Es decir, del lado de la Tesis, se parte de que la substancia no consta de lo simple (proposición: $\neg a$) para llegar al resultado conradictorio a esta suposición (proposición: a) equivalente a la negación de la Antítesis (proposición: $\neg b$). Esto es, en la demostración de la Tesis se parte de la Antítesis ($\neg a$=b) para llegar a una contradicción (a) que no es otra cosa que la afirmación de la Tesis. Algo análogo ocurre en el procedimiento de la Antítesis. Teniendo en cuenta estos dos flujos, el movimiento completo bien podría describirse por un círculo de dos puntos en el que no hay posibilidad de distinguir entre el movimiento en el sentido de la agujas del reloj y el contrario a las agujas del reloj.

[260] Cf. Hegel [1970] p. 27: “die allgemeine Idee, die er [Kant] zugrunde gelegt und damit geltend gemacht hat, ist die Objektivität des Scheins und Notwendigkeit des Widerspruchs, der zur Natur der Denkbestimmungen gehört”.
[261] Cf. Hegel [1970] p. 27: “nur bei der negativen Seite des Dialektischen stehengebliben wird”. Cf. también Hegel [II] p. 319: “aber das Positive dieser Antinomien, ihre Mitte ist dadurch nicht erkannt. Die Vernunft erscheint rein bloß von ihrer negativen Seite, als aufhebend die Reflexion, aber sie selbst in ihrer eigentümlichen Gestalt tritt nicht hervor”.
[262] Cf. Hegel [1970] p. 27: “ein sonderbares Resultat, indem das Unendliche das Vernünftige ist, zu sagen, die Vernunft sei nicht fähig, das Vernunftige zu erkennen”.

Pues bien, si bien es verdad que este movimiento podría representar el "transpaso a su otro" que se obtiene como resultado de haber alcanzado la naturaleza del Concepto[263], lo cierto es que para Hegel este movimiento no tiene nada que ver con lo que sucede en las demostraciones por reducción al absurdo de Kant. Kant no ha llegado así a alcanzar la naturaleza del concepto. En contra de lo que pretende Kant, sus falsas pruebas apagógicas no hacen más que afirmar unilateralmente lo que se pretendía demostrar.

Así, en el caso de la Tesis, la "prueba" se sigue inmediatamente de la presuposición de la accidentalidad de la propiedad de composición de la substancia. Si no queremos quedarnos con nada[264] como resultado de la supresión de la composición en el pensamiento, hemos de aceptar lo simple como resultado de esta supresión. Algo análogo ocurre con la "demostración" de la Antítesis. En la prueba por reducción al absurdo de la misma, Kant afirma directamente que todo lo substancial es espacial, además de que el espacio no consta de partes simples. Con estos dos presupuestos, dice Hegel, la entera demostración esta completada[265]. La prueba se restringe así a los cuerpos, es decir, a las substancias en tanto que son percibidas y no a las substancias en tanto que son pensadas.

Si eliminamos de la segunda Antinomia la remisión a cualesquiera motivos cosmológicos y la consideramos en su aspecto meramente conceptual, la Tesis no hace más que afirmar el momento de la discreción de la cantidad, mientras que la Antítesis hace más de lo mismo afirmando el momento de la continuidad de la cantidad[266]. Visto así, cualesquiera substratos[267] subsumibles a la categoria de la cantidad estan sujetos a la contradicción que se nos presenta en la Antinomia. El momento de la discreción y el de la continuidad resultan ser falsos cuando se afirman unilateralmente sobre el substrato en cuestión. La contradicción de esta unilateralidad se hace presente en que cada momento remite a su opuesto. La verdad de esta remisión es, tal y como se ha visto en la exposición, la negación de este negar cada uno su opuesto en un momento que suprime a las dos. Veremos más adelante que este nuevo momento que surge como supresión de la continuidad y la discreción da como resultado la limitación de la cantidad.

1.2.2.3. Algunas observaciones sobre la lectura de Hegel de la segunda Antinomia.

Si Hegel hace uso de la segunda de las cuatro antinomias kantianas para ilustrar la falsedad de la unilateralidad de los momentos de la continuidad y la discreción, no se debe a que ignora que, como hemos visto más arriba, la primera de las antinomias tiene lugar dentro del ámbito de la cantidad extensiva, mientras que la segunda lo hace dentro de la cantidad

[263] Cf. Hegel [1970] p. 120: "Diese Auflösung läßt den Inhalt der Antinomie selbst auf der Seite liegen; sie erreicht die Natur des Begriffs nicht, der wesentlich die Einheit Entgegengesetzter ist, deren jedes, für sich isoliert, nichtig und an ihm selbst nur das Übergehen in sein Anderes ist".

[264] El que no podemos quedarnos con nada es algo que en Kant tiene el caracter de algo obvio. Hegel explicita esta obviedad afirmando su caracter derivado del presupuesto de la existencia de la substancia: "es soll uns nicht alles verschwinden, sondern Etwas übrigbleiben, denn wir haben ein solches Beharrliches, das wie Substanz nannten, vorausgesetzt" (en Hegel [1970] p. 117).

[265] Cf. Hegel [1970] p. 118: "die Annahme, daß alles Substantielle räumlich sei, der Raum aber nicht aus einfachen Teilen bestehe, ist eine direkte Behauptung, die den unmittelbaren Grund des zu Beweisenden ausmacht und mit dem das ganze Beweisen fertig ist".

[266] Cf. Hegel [1970] p. 120: "Die ganze Antinomie reduziert sich also auf die Trennung und direkte Behauptung der beiden Momente der Quantität, insofen getrennt sind".

[267] Pensamos así, con Hegel, en tales "cosas" como el tiempo, el espacio, la materia o la substancia. Cf. Hegel [1970] p. 119-120.

intensiva. No por casualidad, es la primera antinomia kantiana aquella en la que Hegel considera que uno se enfrenta con el límite cuantitativo, mientras que la segunda tiene que ver, mas bien, con la oposición entre la finitud y la infinitud cualitativas[268]. De esta forma, la distinción entre la segunda y primera antinomias queda remitida a los dos primeros compartimentos de la tabla de los conceptos del entendimiento. Hemos visto ya que, efectivamente, esta remisión está de acuerdo con el espíritu kantiano[269].

Si ha sido la segunda Antinomia la escogida para ilustrar la limitación de los momentos de la continuidad y la discreción, no lo es por que la primera no sirve para esta misma ilustración, sino por que la infinitud que uno de los contrincantes expresa no es la que corresponde a la exposición del movimiento deductivo de la *Wissenschaft der Logik*. Como veremos, va a ser cuando lleguemos a la infinitud cuantitativa cuando resultará oportuno estudiar la primera de las antinomias kantianas.

En definitiva, los momentos de la continuidad y la discreción, al estar situados al comienzo de la Cantidad, someten bajo su dominio a momentos ulteriores que tienen lugar en el "despliege" de esta categoría como son, por ejemplo, las magnitudes intensivas y las extensivas. En este sentido, las dos primeras antinomias kantianas, la antinomia de la magnitud extensiva y de la magnitud intensiva, podrían servir para ilustrar la contradicción de los momentos de la continuidad y la discreción. Si al final resulta que es la segunda antinomia la que de hecho ilustre la contradicción, la razón de ello deberá buscarse en aquello que la distingue de la primera de las antinomias matemáticas.

Dentro de la lectura de Hegel de estas antinomias, lo que ciertamente resulta problemático es su identificación de la afirmación de la Antítesis con una postura que es más bien la del propio Kant. Es decir, Hegel entiende que la Antítesis afirma la indefinida regresión en la síntesis o la "mala infinitud" dentro del marco de la magnitud intensiva. Esta "mala infinitud" es lo que, con restriciones que no vienen ahora a cuento, equivale al infinito en potencia o ἄπειρον δυνάμει de Aristóteles. Kant mismo da pie a que tenga lugar una tal confusión. Veamos en que sentido.

El primer motivo para la confusión viene dado por la formulación kantiana "en negativo" de la tesis de la Antítesis. Al menos para alguien que conozca la *Kritik der reinen Vernunft*, tiene que quedar claro que la negación de un juicio afirmativo es equívoca: uno puede negar el juicio mediante un juicio negativo o mediante uno infinito[270]. De este modo, podemos negar el juicio de la Tesis "el mundo es finito"[271] diciendo que "el mundo no es finito" o diciendo que "el mundo es infinito"[272]. La primera negación es la de un juicio negativo, la segunda la de un juicio infinito[273]. Mientras que el juicio negativo del ejemplo es

---

[268] Cf. Hegel [1970] p. 147: "Die oben betrachtete Antinomie enthielt mehr den Gegensatz der qualitativen Endlichkeit und Unendlichkeit. In einer anderen, der ersten der vier kosmologischen Antinomien, ist es mehr die quantitative Grenze, die in ihrem Widerstreit betrachtet wird".

[269] Que la división cuatropartita de las antinomias obedece al esquema de las categorias kantianas es incluso expresamente afirmada por Hegel: "Kant seinen vier kosmologischen Antinomien durch das Einteilungsprinzip, das er von seinem Schema der Kategorien hernahm, einen Schein von Vollständigkeit geben wollte" (en Hegel [1970] p. 114).

[270] La distinción entre los juicios infinitos y los negativos la da Kant, algo oscuramente, en *KrV* B 97-B 98.

[271] Nos decidimos por esta formulación más manejable que la formulación original y deducible además de ella. El juicio "el mundo es finito" extrapolado a la segunda antinomia diría con ello algo como esto: "La síntesis regresiva en la división de la substancia es finita".

[272] Análogamente, los ejemplos que ponía Kant en B 97 eran los de "el alma no es mortal" (*die Seele ist nicht sterblich*) y "el alma es inmortal" (*die Seele ist nichtsterblich*).

[273] Un "juicio infinito" de acuerdo a la lógica transcendental. La lógica general (*allgemeine Logik*), no distingue entre los juicios afirmativos y los infinitos, es decir, entre juicios del tipo "el alma es mortal" y los del tipo "el

verdadero, el infinito es falso. La razón de ello consiste en que la negación contradictoria de un juicio viene dada por la negación expresada en un juicio negativo y no por la negación expresada en un juicio infinito. La relación entre un juicio afirmativo y "su" juicio negativo es una relación de contradicción. La que hay entre un juicio afirmativo y "su" juicio infinito es la de contrariedad. En el primer caso, los dos juicios no pueden compartir el mismo valor de verdad de entre los dos posibles; lo "verdadero" y lo "falso". En una relación de contrariedad, sin embargo, ambos juicios pueden ser falsos: esto es lo que ocurre precisamente con el juicio afirmativo "el mundo es finito" e infinito, "el mundo es infinito". El juicio negativo "el mundo no es finito" es verdadero desde la perspectiva crítica[274]. Y esto debido a que contempla la posibilidad de que "mundo" no sea un posible objeto de conocimiento, es decir, a que no sea un posible sujeto de predicados. Como ya hemos visto más arriba, esto es lo que ocurre precisamente con las ideas de "Mundo", "Alma" y "Dios" en Kant.

Una vez hechas estas consideraciones, podemos afirmar que la negación de la Antítesis es del tipo juicio infinito. Es decir, la Antítesis afirma lo siguiente: "el mundo es infinito"[275]. Este es pues el tipo de negación con el que se niega la tesis de la Tesis "el mundo es finito". Desde la prespectiva crítica, el juicio infinito de la Antítesis es falsa por que presupone algo como sujeto, el mundo, sin que propiamante lo pueda ser.

Es en este punto donde se hace relevante la distinción entre los dos modos posibles de infinitud, modos a los cuales unas líneas mas arriba nos referíamos. Así, cuando el sujeto del predicado "es infinito" se entiende como dado, como una totalidad dada, el infinto del que se habla en el predicado será uno a su vez cerrado, terminado, dado. La postura de la Antítesis afirmaría con ello que antes de la síntesis infinita tiene sentido hablar del acabamiento de dicha síntesis en la cosa misma. Este "acabamiento" de la síntesis en la cosa es lo que hace que la posición de la Antítesis necesite hablar de las cosas en sí y que, en consecuencia, el infinito del que hable sea uno que podríamos denominar "actual"[276]. Como hemos visto, tal pretensión de hablar de la cosa en sí es refutada desde la perspectiva transcendental kantiana.

Del mismo modo, la posición Kantiana niega que la síntesis de los condicionados se encuentre nunca con lo incondicionado. Cuando el sujeto del discurso es un algo cuya regla de construcción viene dada por una idea, entonces, el pretendido sujeto nunca llegará a ser un objeto, nunca estará del todo dado. El infinito con el que nos las habremos en este caso será uno que refleje esta síntesis nunca terminada ni terminable[277]. Ésta infinitud, la infinitud de la filosofía crítica es el infinito potencial.

Vemos así que la distinción entre las cosas en sí y las cosas como fenómenos es solidaria de la distinción medieval entre el infinito potencial y el actual. Los algoritmos matemáticos de paso al infinito como, por ejemplo, las pruebas por exhaustión se situarían de este modo del lado de la Síntesis[278]. En estas pruebas, la postura de la Antítesis es la que, en

---

alma es inmortal". Ambos juicios son, desde tal punto de vista, juicios afirmativos. La razón de ello reside en que la lógica general abstrae todo contenido del predicado ("abstrahiert von allem Inhalt des Prädicats" (ibid.)).

[274] Del mismo modo que lo era el juicio negativo "el alma no es mortal" (*die Seele ist nicht sterblich*) en *KrV* B 97: "Hätte ich von der Seele gesagt, sie ist nicht sterblich, so hätte ich durch ein verneinendes Urtheil wenigstens einen Irrthum abgehalten".

[275] O, traducido a los términos de la segunda Antinomia, "la materia está actualmente dividida al infinito".

[276] Lo que en Aristóteles se diría con ἄπειρον ἐντελεχείᾳ.

[277] Entiéndase bien, "nunca terminado ni terminable" para el sujeto de un discurso posible o el sujeto *de iure*, no únicamente para el sujeto *de facto* en cuestión.

[278] En el caso de la exhaustión del círculo por el "polígono de infintos lados" de la proposición 2 del libro XII de los *Elementos* (cf. Euclides [1996] p. 268 y sig), la Tesis argumentaría a favor de que el polígnono con el que pretendemos *exhaustir* el círculo debe tener lados (si despúes de eliminar toda descomposición de los lados del

nuestra opinión, está de acuerdo con la filosofía crítica. A su vez, la posición de la Síntesis es la que representa a la filosofía de Hegel. Con ello pretendemos trazar una frontera entre dos territorios de los cuales el primero sería el de la mala infinitud o la infinitud potencial, mientras que el segundo sería el de la infinitud actual. En el primero de estos territorios hemos situado a la filosofía crítica, y en el segundo a la filosofía de Hegel.

Es importante notar que, para Hegel, la Antinomia tiene su marco de aplicación fuera de lo meramente cosmológico. Todo concepto (*Begriff*), como toda Idea en Kant, es antinómico en Hegel[279]. Esto significa que todo concepto es unilateral y, en este sentido, falso con respecto al porvenir, pero supresión de una contradicción anterior y por ello verdadero, con respecto al pasado. Por esta razón, la *cosmologización* kantiana de las antinomias de la razón no puede menos que ser descalificada por Hegel. Debido a que Kant no ha captado la Antinomia en su concepto, su exposición de la misma es llevada a cabo bajo una forma concreta, es decir, sobre la base de una representación[280].

No obstante, hay un momento en el que Kant se aproxima a mostrar el carácter antinómico de los conceptos sin recurrir a una representación en particular. Este momento tiene lugar cuando Kant afirma que la tercera de cada conjunto de categorías surge (*entspringt*) de la unión de las otras dos[281]. En el caso de la Cantidad, el tercero de la tríada de las categorías, la Totalidad, es la Pluralidad considerada como una Unidad[282]. Se ha visto ya que en Hegel los momentos de la Pluralidad y la Unidad son reproducidos respectivamente[283] por los momentos de la Discreción y la Continuidad[284]. Esto era resultado de que la Discreción y la Continuidad eran respectivamente herederos de los momentos de la Repulsión y de la Atracción en la esfera de la Cantidad. Si en Kant la unión de la de Pluralidad y la Unidad va a expresarse por la categoría de Totalidad o límite de una Pluralidad, en Hegel el resultado de la supresión de la Continuidad y la Discreción va a dar lugar a la limitación de la Cantidad.

---

polígono no admitiésemos el lado como resto, no nos quedaría nada, no nos quedaría ninguna figura). A su vez, la Antítesis subrayaría la arbitrariedad como resto de un tal lado: cada lado es siempre divisible en dos nuevos lados. La expresión para el círculo "polígono de infinitos lados" pretende así sintetizar las dos posturas contrapuestas. Esta expresión simpatiza con la Tesis en la medida en que habla de "lados". Pero no abandona las pretensiones de la Antítesis en cuanto que estos lados son infintos.

[279] Cf. Hegel [1970] p. 114: "die tiefere Einsicht in die antinomische oder wahrhafter in die dialektische Natur der Vernunft faßt überhaupt jeden Begriff als Einheit entgegengesetzter Momente, denen man die Form antinomischer Behauptungen geben könnte". Cf. también Hegel [XX] p. 355: "In jedem Begriff ist es leicht, einen Widerspruch aufzuzeigen".

[280] Cf. Hegel [1970] p. 114: "[…] hat Kant die Antinomie nicht in den Begriffen selbst, sondern in der schon konkreten Form kosmologischer Bestimmungen aufgefaßt".

[281] Cf. *KrV* B110: "[…] daß die dritte Kategorie allenthalben aus der Verbindung der zweiten mit der ersten ihrer Classe entspringt". Cf. también Kant [IV] p. 325: "die dritte aus der ersten und zweiten in einen Begriff verbunden entspringe".

[282] Cf. *KrV* B111: "So ist die Allheit (Totalität) nichts anders als die Vielheit, als Einheit betrachtet".

[283] Esta reprodución unilateral que aquí expresamos tiene que leerse *cum granu salis* una vez que se ha visto que, en Hegel, la discreción lleva en sí el momento de la continuidad y viceversa. Algo parecido ocurre en Kant; la Pluralidad no lo es sino de una Unidad y la Unidad no lo es sino dentro de una Pluralidad de mismos Uno.

[284] En lo que respecta a la discreción cf. Hegel [1970] p. 123: "Die diskrete Größe hat erstlich das Eins zum Prinzip" o Hegel [VIII] p. 211: "Die Quantität [...] in der [...] in ihr enthaltenen Bestimmung des *Eins* ist sie *diskrete* Größe". En lo que respecta a la continuidad cf. Hegel [1970] p. 111: " Darin [en la *Kontinuität*] ist also das Außereinander der Vielheit enthalten […]. Die Vielheit ist in der Kontinuität so gesetzt, wie sie an sich ist".

1.2.3. El Yo como cantidad pura y el estado de derecho

A la hora de dar ejemplos de lo que es la cantidad pura, puede resultar extraño que Hegel coloque al Yo entre el espacio, el tiempo y la materia[285]. Que el Yo sea cantidad quiere decir de entrada que el Yo es algo que es para-sí. Ello se debe a que, como hemos visto, la cantidad era el Ser-para-sí de un ser Otro que resultaba ser la pluralidad. Esto último no significa otra cosa que lo que el Yo es en sí lo es a su vez para sí, que el Yo es Yo para sí, es decir, que el Yo es autoposición, autoconsciencia[286]. A su vez, para que algo sea para sí ha tenido que volver desde otro a sí mismo. El movimiento[287] del para sí es un retorno a sí producto de una reflexión[288]. De este modo obtenemos una identidad mediada, no muerta[289], del Yo consigo mismo. En el caso del medio denominado "pensamiento", el movimiento de retorno a sí se llama "reconocimiento" (*Anerkennung*), y la conciencia que ha vuelto a sí "autoconciencia". Hegel describe en *die Phänomenologie des Geistes*, bajo el título de *Selbständigkeit und Unselbständigkeit des Selbstbewußtseins; Herrschaft und Knechtschaft*[290] este movimiento de reconocimiento. En la sociedad moderna, este reconocimiento no es algo que los nuevos miembros que se incorporan a ella tienen que conquistar una y otra vez, sino que el reconocimiento es algo con lo que se encuentran. La lucha por el reconocimiento tal y como es descrita en *die Phänomenologie* es una lucha que sólo se da en el estado de naturaleza[291]. Este reconocimiento ha sido ya conquistado en la sociedad civil o *bürgerliche Gesellschaft*, de modo que el reconocimiento moderno es, 1) la dominación (*Überwindung*) del reconocimento del estado de naturaleza y, 2) la obediencia a la ley. Esta obediencia a la ley consiste en comportarse de una manera válida en general (*allgemeingültig*) con el otro, consiste, en definitiva, en comportarse como una persona, como libre.

---

[285] Cf. Hegel [1978] p. 113: "Bestimmtere Bespiele der reinen, Quantität, wenn man deren verlangt, hat man an Raum und Zeit, auch der Materie, überhaupt, Licht u.s.f., selbst Ich".

[286] Una autoconciencia que en el Kant de la *Antropologíe* era lo que elevaba infinitamente al Hombre respecto a cualquier otro ser viviente de la Tierra. Cf. Kant [VII] p. 127: "Daß der Mensch in seiner Vorstellung das Ich haben kann, erhebt ihn unendlich über alle andere auf Erden lebende Wesen".

[287] Un movimiento que autores como Labarriere denominan "estructural". Cf. Labarriere [1979] p. 154.

[288] Un retorno, una reflexión, que no solo se da con el Yo, sino que, apuntando mas allá de Hegel, tiene lugar en el surgimiento de la mercancia tal y como es expuesta por Marx en *El Capital*. Cf. al respecto Marx [1969] p. 67 nota 18: "In gewisser Art geht´s dem Menschen wie der Ware. Da er weder mit einem Spiegel auf die Welt kommt noch als Fichtescher Philosoph: Ich bin Ich, bespiegelt sich der Mensch zuerst in einem andren Menschen. Erst durch die Beziehung auf den Menschen Paus als seinesgleich bezieht sich der Mensch Peter auf sich selbst als Mensch. Damit gilt ihm aber der Paul mit Haut und Haaren, in seiner paulinischen Leiblichkeit, als Erscheinungsform des Genus Mensch". Que el yo no puede ser autoconciencia por decreto, como en Fichte, se expresa en el mundo de la mercancias diciendo que "Ein Arbeitsprodukt, für sich isolirt betrachtet, ist also nicht Werth, so wenig wie es Waare ist. Es wird nur Werth in seiner Einheit mit andrem Arbeitsprodukt" (Marx [1987] p. 31). Esto último significa que el valor surge en una relación social, es producto de la estructura o, como diría Marx, tiene una objetualidad fantasmagórica ("gespenstige Gegenständlichkeit", en Marx [1969] p. 52. Cf. sobre este punto Heinrich [2005] p. 51 y sig.

[289] Designamos con "identidad muerta" la identidad de la substancia recogida en la fórmula A=A. Cf. al respecto Marzoa [1973] p. 272: "La identidad de la mera substancia es el A=A, la identidad inmóvil y sin mediación; la «identidad» es aquí una noción vacía; no así cuando se está autorizado a hablar de un «*sí* mismo» y de que algo es lo mismo *consigo mismo*, porque estas expresiones dicen un *volver* sobre sí mismo (por lo tanto a partir de la alteridad), un «con» (*mit*) que designa una mediación (*Vermittlung*); ahora bien, el *sí mismo* es el *sujeto*". De modo que exponer el concepto de mercancía tal y como lo expone Marx no es otra cosa que hacer de la substancia sujeto, hacer de lo en sí algo que es para sí, en definitiva, hacer de lo particular lo universal. Cf. sobre el Yo Hegel [VIII] p. 83: "Ich ist das reine Fürsichsein, worin alles Besondere negiert und aufgehoben ist".

[290] Cf. Hegel [1980] p. 109 y sig.

[291] Cf. al respecto Enz. §432 Zus (Hegel [X] p. 221).: "Um etwaigen Mißverständnissen rücksichtlich des soeben geschilderten Standpunktes vorzubeugen, haben wir hier noch die Bemerkung zu machen, daß der Kampf um die Anerkennung in der angegebenen bis zum Äußersten getriebenen Form bloß im *Naturzustande*, wo die Menschen nur als *Einzelne* sind, stattfinden kann".

Vemos así que la dominación del reconocimiento del estado de naturaleza es el reconocimiento que tiene lugar en el estado de derecho (*Rechtszustand*)[292]. El estado de derecho es el estadio que sigue a la substancia ética. Este último estadio es representado por el pueblo (*Volk*) griego. Una individualidad esta en la que el individuo se encuentra de entrada, inmediatamente[293], imbuído en la substancia ética. El pueblo griego mismo es una individualidad singular que sucumbirá al encontrarse con otras individualidades. La comunidad universal que de ello surge estará así constituida de individuos abstractos o personas[294]. Cada uno de esas personas es un Yo que forma parte de una unidad universal, una comunidad sin espíritu. Esta unidad ya no es la unidad orgánica[295] que caracterizaba a Grecia, sino que es una unidad accidental, externa. Los muchos Uno de la cantidad son en nuestro caso los muchos Yo. Estos muchos Yo constituyen un Montón (*Haufen*)[296], una pluralidad en la que el límite no puede sino ser arbitrario. El equilibrio entre la atracción y la repulsión era el momento previo a la superación de la categoría de la cualidad en la de la cantidad. Este equilibrio en los Uno se expresa para el Yo diciendo que todos los Yo son un *Yo* (Atracción) y a su vez cada uno es *un* Yo (Repulsión).

Este frágil equilibrio entre la atracción y la repulsión se rompe cuando los muchos Yo son reunidos sobre un mismo Yo ajeno a ellos[297]. Este Yo es producto de que la balanza entre

---

[292] Sobre este punto véase Hegel [1980] p. 260 y sig.

[293] Esta "identidad entre la vida del hombre y la vidad de la πόλις", al ser ella inmediata no es todavía verdad en Hegel. Cf. Marzoa [1973] p. 314: "Finalmente, nos referimos a la identidad entre la vida del hombre y la vida de la πόλις, identidad de la que dijimos que todavía no necesitaba de ninguna «filosofía política» porque todavía era verdad. Con arreglo a Hegel podemos ahora añadir: «verdad *inmediata*», presencia inmediata, lo cual significa: todavía no *verdad*, porque todavía no *se* ha afirmado, no ha retornado a sí a partir de la escisión".

[294] Para la distinción en Hegel entre individuo o individualidad y persona cf. Hegel [XII] p. 340: "Denn die Persönlichkeit macht die Grundbestimmung des Rechts aus: sie tritt hauptsächlich im Eigentum ins Dasein, ist aber gleichgültig gegen die konkreten Bestimmungen des lebendigen Geistes, mit denen es die Individualität zu tun hat". Lo que se podría resumir diciendo que Grecia prima o parte de la individualidad mientras que Roma se fundará sobre la persona. Que la expresión "persona" no remite única y exclusivamente a las personas físicas se deduce del siguiente texto: "Die Familie hat als Person ihre äußerliche Realität in einem *Eigentum*" (en Hegel [1956] p. 156 §169.

[295] Hegel nos ofrece una viva descripción de la muerte de la πόλις en las siguientes líneas de sus *Lecciones sobre la Filosofía de la Historia*: "Wie, wenn der physische Körper verwest, jeder Punkt ein eigenes Leben für sich gewinnt, welches aber nur das elende Leben der Würmer ist, so hat sich hier der Staatsorganismus in die Atome der Privatpersonen aufgelöst" (en Hegel [XII] p. 384).

[296] Cf. Hegel [1956] p. 263 §302: "...hat diese Stellung die Bedeutung einer mit der organisierten Regierungsgewalt gemienschaftlichen Vermittelung, daß […] die Einzelnen nicht zur Darstellung einer *Menge* und eines *Haufens*, zu einem somit unorganischen Meinen und Wollen, und zur bloß massenhaften Gewalt gegen den organischen Staat kommen".

[297] Siguiendo con la analogía entre el Yo y la mercancia, diremos que la segregación de un Yo de los otros Yo, un Yo que queda así excluido de estos Yo tiene su equivalente en el mundo de la mercancia en el equivalente universal o dinero. Efectivamente, el proceso de intercambio de mercancias excluye de sí una mercancia que cumplirá con ello el papel de equivalente univesal . Cf. Marx [1969] p. 101: "Allgemeines Äquivalent zu sein wird durch den gesellschaftlichen Prozeß zur spezifisch gesellschaftlichen Funktion der ausgeschlossenen Ware. So wird sie – Geld". Una vez consumado este proceso, el dinero deja de regirse por las reglas de la ley del valor, es decir, deja de ser mercancia. Es decir, tiene lugar la "Verdopplung der Ware in Ware und Geld" (en Marx [1969] p. 102): el dinero pasa a regirse exclusivamente por las leyes de la circulación de sí mismo (principalmente por la cantidad de las mercancias, el precio de las mismas, así como de la velocidad de circulación del dinero.). Cf. en este sentido Marzoa [2005] p. 75-76: "[...] de la estructura «modernidad», es parte el que la segregación de cierta materia como equivalente general en los cambios llega a que la masa de esa misma materia que ha de estar en circulación con esa función en un momento dado esté determinada por hechos de la propia circulación de mercancías y, consiguientemente, llegue a no ser necesaria la existencia material de las cantidades de la materia en cuestión (por ejemplo: de oro), sino sólo el que la cantidad de ello que en cada momento está en circulación sea la requerida por los hechos de la circulación de mercancías". En definitiva, el dinero, ese singular universal (cf. la ilustración de Marx con *un animal* en Marx [1983] p.37) es el *análogon* de

la atracción y la repulsión se haya desplazado hacia la atracción. De ahí que pueda decir Hegel que este señor del mundo es la continuidad de la rígida puntualidad de los Yo-es[298].

No resulta difícil observar una sintonía entre la pérdida del mundo griego en Hegel y el nacimiento de un nuevo sujeto político, la población, objeto de una nueva tecnología del poder, examinada por Foucault. La sintonía se apoya en la doble dimensión que tiene, según Hegel[299], la pluralidad de los singulares. El Montón de los singulares puede ser propiamente un Montón, es decir, una unidad anorgánica que tiende a la violencia contra el estado[300]. Pero los singulares pueden también ser, a través de la mediación de los estados (*Stände*), parte de la totalidad orgánica denominada *estado*. A diferencia de lo que caractariza la primera unidad, en esta segunda unidad, la libertad abstracta de los Yo-es no es reprimida en favor de un elemento superior. En el estado no se reprimen los intereses de los particulares, sino que lo individual es puesto en correspondencia con lo universal[301]. Un mecanismo privilegiado en lo económico para obtener una correspondencia tal es la denominada "mano invisible"[302] de A. Smith. Efectivamente, mediante la mano invisible, mediante la libre concurrencia, el interés de cada particular acaba resultando en provecho para el universal, es decir, en riqueza para la nación[303].

Por su parte, Foucault analiza el surgimiento de una nueva totalidad política llamada *población* en los albores del siglo XVIII[304]. Antes de esta fecha, antes incluso que el cristianismo, la idea del gobierno de los hombres es algo que hay que buscar en oriente en la metáfora del pastor de almas[305]. El pastor es la unidad exterior a las ovejas que cuida tanto al rebaño en su conjunto como a cada miembro del conjunto[306]. No obstante, la unidad de estas ovejas en el todo no es en absoluto una unidad orgánica. La prueba de ello es que es característico del poder pastoral la paradoja del *omnes et singulatim*. La paradoja surge en las situaciones en donde para salvar al particular se sacrifica el todo o donde para salvar al todo se sacrifica el particular. De este modo resulta que en el poder pastoral tenemos por un lado el todo, el rebaño, y por el otro lado el particular, la oveja. Cuando la unicidad del pastor se

---

esas grandes esencialidades como son Kyros, Moses, Alexander o Jesus (cf. Hegel [1968] p. 180), figuras todas ellas, para decirlo con Ferlosio, con más destino que carácter (cf. Hegel [1970] p. 37 y sig.).

298 Cf. Hegel [1980] p. 263: "[...] sie [die Personen] sind also in einem nur negativen Verhälnisse wie zu einander so zu ihm [Der Herr der Welt] , der ihre Beziehung oder Kontinuität ist".

299 Seguimos en este punto una observación de M. Russo en Russo [2006] p. 21: "Istruttivo, in Hegel, è vedere nel popolo tanto la massa amorfa quanto i molti atomizzati. Ci mostra, d'un sol colpo, incertezze e ambiguità del popolo quale composita unità, moltitudine ordinata e armoniosa, che continuamente trapassa in turba animosa, faziosa e fraudolenta, in *dissoluta multitudo*, rivelando il proprio carattere bifronte, di fondamento opaco della comunità".

300 Cf. Hegel [1956] p. 263 § 302: "daß die Einzelnen nicht zur Darstellung einer *Menge* und eines *Haufens*, zu einem somit unorganischen Meinen und Wollen, und zur bloß massenhaften Gewalt gegen den organischen Staat kommen".

301 Cf. Hegel [1956] p. 217 § 261: "Das besondere Intersse soll wahrhaft nicht beiseite gesetzt oder gar unterdrückt, sondern mit dem Allgemeinen in Übereinstimmung gesetzt werden".

302 Hegel expondrá en el parágrafo 189 de sus *Grundlinien* su opinión sobre la "mano invisible" en particular y la "economía política" (*Staatsökonomie*) en general.

303 Esta idea es retomada hoy en día por los teóricos de los mecanismos en economía cuyos fundadores son los premio nobel Leonid Hurwicz, Eric Maskin y Roger Myerson.

304 Análisis reproducido en su Seminario sobre la historia de la Gobernabilidad del año 1978 en el *Collège de France* bajo el título de "Sécurité, Territoire et Population". Hacemos uso aquí de la traducción alemana de la transcipción del seminario editado por F. Ewald y A. Fontana.

305 Cf. Foucault [2004] p. 185: "die Idee der Regierung der Menschen eine Idee ist, deren Ursprung man eher im Orient suchen muß".

306 Cf. Foucault [2004] p. 191: "Er tut alles für die Gesamtheit seiner Herde, doch gleichermaßen tut er alles für jedes einzelne Schaf der Herde".

viene abajo, cuando en la ciudad aparecen una pluralidad de pastores, es cuando surge lo político cuya ilustración viene dada por el tejedor[307].

Frente a esta concepción del gobierno de los hombres surgirá, a partir del siglo XVIII, una *tecnología de poder* cuyo sujeto no es ya el pueblo, sino lo que Foucault llama la población. Frente a un poder que prohibe –la ley– y otro que proscribe – la disciplina–, el mecanismo de seguridad deja hacer (*laisse faire*). Frente al discruso democrático surge así un nuevo discurso político: el liberalismo. Las amenazas a la población como la escasez de alimentos o las epidemias se resuelven dejando que los principios de la realidad[308] disuelvan el problema que esa misma realidad muestra. Así, en el caso de una escasez de alimentos, suponiendo que hay libertad de precios y de circulación de mercancias, una cosecha se sabrá que es mala bastante antes, digamos 6 meses, de que llegue al mercado. El dueño de la cosecha, ante la incertidumbre que genera el no saber si al cabo de esos seis meses una ola de importaciones termine por pulverizar los precios, intentará sacar beneficio en el momento mismo del anuncio de la mala cosecha haciendo subir los precios. Esto hace que se ponga en marcha el mecanismo de la importación, adelantándose así la solución del problema a su desencadenamiento. Ahora bien, el buen funcionamiento de toda esta maquinaria presupone que, a nivel individual, la gente viva al límite de la escasez. Sólo así se consigue que una subida de precios pueda transmitirse al mercado antes de que la mala cosecha llegue a la misma. Por esta razón, Foucault hablará de dos planos del fenómeno[309]: en el plano de la población se consigue evitar la escasez de alimentos a cambio de tener, en el plano de la multiplicidad de individuos, una escasez permantente.

Vemos así que el mismo mecanismo que hacía que en Hegel se pudiera hablar de una participación de lo particular en lo universal, hace que surja un comportamiento propio de un nuveo sujeto, la población[310], en Foucault. Es cuando el individuo no actúa como un miembro del mercado, cuando del lado del consumidor no se tolera más el estado de escasez permanente y del lado del vendedor un mal cálculo lleva a retirar del mercado la cosecha, cuando por un lado hay un alboroto y por el otro acopio, es entonces cuando los particulares no actúan ya como miembros de la población sino como parte del pueblo. El pueblo, en la terminología de Foucault[311], el Montón de individuos, en la terminología de Hegel, es lo que crea desorden en el sistema[312], lo que lleva a una violencia masiva contra el estado orgánico[313]. La población será así parte del proceso en el que las masas entran en la historia, es decir, el proceso en el que las masas se desenvuelven como sujeto[314].

[307] Foucault se apoya en este punto en el *Político* 279b y sigs.

[308] La realidad, es decir, lo que los fisiócratas entendían por *physis*, es el nuevo marco en el que se mueve el liberalismo. Cf. Foucault [2004] p. 77.

[309] Decimos “fenómeno”, debido a que son dos representaciones posibles, relevante e irrelevante respectivamente, para el nuevo *Saber-poder* denominado “economía política”.

[310] La forma de poder que estará asociada a la población será denominada por Foucault *bio-politica*. En ella, el centro del poder será la especie humana en su aspecto biológico reproducitivo. Este poder sobre el cuerpo es una de las dos formas de poder sobre la vida que empiezan a ejercerse en los siglos XVII y XVIII. La otra forma de poder es el denominado disciplinario o anatómico-político. Sobre este punto cf. Foucault [1976] p. 182 y sig.

[311] O, mejor dicho, en la terminología de Abeille del que hace uso Foucault.

[312] Cf. Foucault [2004] p. 72: “Das Volk ist dasjenige, das sich im Verhältnis zu dieser Bevölkerungsverwaltung, auf der Ebene der Bevölkerung selbst verhält, als wäre es kein Bestandteil dieses kollektiven Subjekts-Objekts, welches die Bevölkerung darstellt, als würde es sich außerhalb ihere stellen, und folglich sind sie es, als Volk, die es ablehnen, Bevölkerung zu sein, und die das System in Unordungn bringen”.

[313] Cf. Hegel [1956] § 261.

[314] Cf sobre este punto Sloterdijk [2000] p. 9. Foucault mismo habla del carácter de sujeto de la población en Foucalt [2004] p. 70. Más explícito al respecto es el siguiente pasaje de Foucault: “ce qui s’est passé au XVIII^{e} siècle [...] ce ne fut rien de moins que l’entrée de la vie dans l’histoire – je veux dire l’entrée des phénomènes propres à la vie de l’espèce humaine dans l’ordre du savoir et du povoir” (en Foucault [1976] p. 186).

2. CAPÍTULO

EL CARÁCTER ANTINÓMICO DE LO CONTINUO Y LO DISCRETO: LAS *APORIAS* DE ZENÓN.

Dass die Dialektik zuerst auf die Bewegung gefallen, ist eben dies der Grund, dass die Dialektik selbst diese Bewegung oder die Bewegung selbst die Dialektik alles Seienden ist[315]

El propósito de este segundo capítulo es, en principio, doble. El primero es el de presentar y defender el carácter antinómico y sistemático de las así denominadas "aporías de Zenón". Dos precisiones son necesarias en este punto. La primera ha de hacerse sobre lo que se entiende por "aporía de Zenón". Por tales aporías vamos a entender las aporías del movimiento de Zenón de las que tenemos noticia a través de las versiones de Simplicio y Aristóteles. Los pasajes en donde Zenón razona sobre lo uno y lo múltiple no resultan más que tangencialmente reveladoras a nuestra Tesis con lo que a su estudio se dedicará un somero apartado dentro del presente capítulo[316]. En relación al término "sistemático", la palabra hace referencia al tipo de lectura que vamos a defender de las aporías: una lectura en la que, contra lo que habitualmente se encuentra uno en la literatura secundaria, se defenderá el proceder "por principios" que tiene lugar en los razonamientos de Zenón. Las aporías son las que deben ser y deben ser las que son. Esto último legitima, a su vez, nuestra decisión de dedicarle todo un capítulo a nuestra lecura de las aporías de Zenón. Y es que no es de entrada evidente el porqué unos textos que recogen razonamientos de un autor *presocrático* han de servir para otra cosa que no sea el de hacer de casual ejemplo de un discurso previamente trabajado. El que, no obstante, los pasajes sean algo *más* que eso, resulta ciertamente halagador. Este "más" es lo que va a tener que exponerse en este capítulo.

Después de la exposición de los pasajes sobre el movimiento de Zenón, el segundo propósito consitirá en presentar la respuesta que desde la *Física* de Aristóteles se les dió a los mismos. Esta respuesta no podía ser menos que la de rechazo. Aristóteles defiende la postura

[315] Cf. Hegel [XVIII] p. 304.
[316] Véase el apartado 2.3.

de “sentido común” según el cual algo que es real no puede ser imposible, es decir, contradictorio. Tal y como ocurría en la parte dedicada a Zenón, la legitimidad de la existencia de este apartado no es tampoco de entrada evidente. Con ello queremos decir que no aceptamos como legítima la introducción de un apartado sobre la reacción de un autor antiguo a los razonamientos de Zenón cuando esta reacción no es sintomática de algo que yace en la estructura misma de los razonamientos. No podríamos ponernos a exponer el texto aristotélico alegando cosas tales como que “siempre se hace así” o “se trata de la reacción de alguien como Aristóteles”, pero tampoco alegando algo del tipo “buena calidad” de los citados argumentos. Si consideramos que la lecura de Aristóteles no tiene nada que ver con algo así como “refutar” las paradojas de Zenón, estamos obligados a buscar la legitimidad de su estudio en nuestro trabajo en algún otro lugar. Tal y como ha quedado ya apuntado, este otro lugar es el que ocupan los distintos momentos de la Cantidad dentro de la *Wissenschaft der Logik* de Hegel.

Y es que cuando más arriba nos referímos a que el propósito del capítulo era doble, decíamos que eso lo era así solamente “en principio”. El objeto último desde el que queda legitimado el capítulo es el de enmarcar todo lo anterior dentro del movimiento que tiene lugar en la *Wissenschaft der Logik* de Hegel. Es sólamente dentro de tal movimiento que las paradojas del movimiento de Zenón adquieren su necesidad así como la reacción de Aristóteles su sentido. Es ante la respuesta aristotélica y desde la *Lógica* de Hegel desde donde se hace visible la necesidad de superar las antinomias de Zenón en un marco que no sea el meramente cuantitativo. Sin que de momento podamos aspirar a ver tan lejos, nos podremos dar por satisfechos si podemos dar cuenta de la imposibilidad de superar desde la categoría de la Cantidad la contradicción que ha sido liberada en su seno: mientras que las paradojas del movimiento muestran la contradicción en la cantidad, la reacción aristotélica demuestra su irresolubilidad para un discurso que no vaya más allá de ella. Como veremos en el capítulo 3, este más allá no es sin embargo otro lugar: el Cuanto es la verdad de lo Discreto y de lo Continuo, no su mera negación.

2.1. LECTURA DE LAS APORIAS

2.1.1. Las aporias del movimiento

Los fragmentos con los que vamos a ocuparnos a lo largo de este apartado son los que nos han sido transmitidos en los libros Δ, Θ y Ζ de la *Física* de Aristóteles. Sin embargo, la presentación que ofrecemos no va a seguir el orden que reciben los razonamientos en la *Física* sino que, como ya se ha indicado, hemos preferido enmarcalos dentro de un cuadro sistemático. Como decíamos, este cuadro lo recogemos de la *Wissenschaft der Logik* de Hegel y en concreto es el proporcionado por el apartado B (*Kontinuierliche und diskrete Größe*) del primer capítulo (*Die Quantiät*) de la Segunda Sección (*Größe (Quantität)*). Hemos de decir que esta enmarcación no es algo que este explicitamente en el texto de Hegel: las aporías de Zenón no son objeto de una *Anmerkung* por parte de Hegel tal y como lo son, por ejemplo, las antinomias de Kant. De este modo, nuestra lectura de las paradojas de Zenón defiende la legitimidad que tienen las mismas de poder ser parte de esta misma *Anmerkung*.

La partición de las aporías de Zenón que vamos a presentar es la siguiente:

i) Paradojas del movimiento en un *medio* continuo:

i.i) movimiento en sí mismo.
i.ii) movimiento en relación a otro movimiento.

ii) Paradojas del movimiento en un *medio* discreto:

ii.i) movimiento en sí mismo
ii.ii) movimiento en relación a otro movimiento.

El segundo apartado de cada grupo nos situará frente al problema de la velocidad "no uniforme": entendemos por tal una velocidad uniformemente no uniforme, es decir, haciendo uso del término moderno de función, una velocidad de cuya función las derivadas mayores que la segunda son nulas. Por esta razón, veremos que las paradojas ponen en juego únicamente los infinitesimales de primer orden.

Si hacemos uso de la división de las formas de lo lógico recogido en el parágrafo 79 de la *Enciclopedia*[317], tendríamos que situar las cuatro paradojas dentro del segundo momento de las tres siguientes:

1) lo abstracto o del entendimieto (*verständige*)

2) lo dialéctico o negativo-racional

3) lo especulativo o positivo-racional.

Zenón, el autor con el que según Hegel se inicia la Dialéctica, se sitúa en el momento previo al especulativo. El resultado de los razonamientos de Zenón es meramente negativo: al faltarle el segundo momento de la negación, el denominado por Hegel negación de la negación, se queda en un resultado nulo. Zenón muestra que la contradicción de cada lado es algo inherente a cada lado. En este sentido su discurso supera al del entendimiento que se conforma meramente con negar el otro lado al ver que no coincide con el lado que uno afirma. No obstantente, dice Hegel:

das andere hat eben[so] das Recht, so zu sagen.[318]

Es decir, el otro lado tiene el mismo derecho de negar nuestro lado. El logro de Zenón y la razón por la cual es considerado por Hegel el iniciador de la dialéctida es, en este punto, el de negar los dos lados contrapuestos:

Zenon hat nun die sehr wichtige Seite, Urheber der Dialektik zu sein… denn er negiert entgegengesetzte Prädikate.[319]

---

[317] Cf. Hegel [VIII] p. 167.
[318] Cf. Hegel [XVIII] p. 301.
[319] Ibid., p. 300.

Mostrar que cada lado tiene la contradicción en él, no es otra cosa que mostrar que cada lado tiene el otro lado en él. Esto que es mostrado por Zenón es algo que, sin embargo, se pasa por alto, en la representación habitual de la continuo y lo discreto:

In der gewöhnlichen Vorstellung von kontinuierlichen und diskreter Größe wird es übersehen, daß jede dieser Größen beide Momente, sowohl die Kontinuität als die Diskretion, an ihr hat.[320]

El que el resultado de este negar los lados opuestos sea en Zenón meramente negativo, el que Zenón no dé el paso al momento especulativo, se refleja en su negación de la verdad del movimiento. Para Zenón, si el movimiento es contradictorio entonces no puede ser verdadero. Con ello no se está diciendo que el movimiento no sea (que no exista), sino que es falso. Hay que distinguir, contra las vulgarizaciones de Diógenes de Sinope[321], entre la verdad y la certeza sensible de algo,

Daß es Bewegung gibt, daß diese Erscheinung ist, davon ist gar nicht die Rede; sinnliche Gewißheit hat die Bewegung, wie es Elefanten gibt. In diesem Sinne ist es dem Zenon gar nicht eingefallen, die Bewegung zu leugnen. Die Frage ist vielmehr nach ihrer Wahrheit; die Bewegung ist aber unwahr, denn sie ist Widerspruch.[322]

Es en este punto donde salta a la luz la diferencia entre la postura que frente a las antinomias tienen Kant y Zenón. Mientras que el primero entiende que lo antinómico es la razón, el segundo defiende que lo antinómico, contradictorio son las cosas y concluye de ahí la falsedad de las mismas. Mientras que en el primero se da una clara tendencia de "apego a las cosas" el segundo es más bien un dialéctico objetivo[323]. La distancia entre ambos es, de este modo, la distancia creada por el giro *cartesiano*. Es únicamente después de Descartes, es decir, después del translado del sujeto a lo subyacente, que puede surgir un discurso en el que se cargue del lado del sujeto, y no de las cosas, la falsedad de la contradicción: las ideas son así en Kant, estrictamente regulativas y no constitutivas. En Zenón, por el contrario, si el decir ha llegado a una contradicción es por que las cosas mismas son falsas: en nuestro caso en concreto, Zenón afirma de este modo la falsedad del movimiento. La falta en Zenón de la distinción kantiana entre la cosa en sí y el fenómeno hace que el primero considere como una ilusión eimpírica lo que para Kant es propiamente una ilusión transcendental.

Las antinomias kantianas son para Hegel una de las mayores aportaciones de la filosofía crítica. Consideramos que la lectura que hace de las mismas en la *Wissenschaft der Logik* es perfectamente aplicable a las *aporias* de Zenón. De hecho, Hegel tiene en más alta estima estas últimas que las antinomias de la versión crítica,

---

[320] Cf. Hegel [1978] p. 122.

[321] Completamos la anecdota, tal y como lo hace Hegel, a favor del cínico: "Aber die Anekdote wird auch so fortgesetzt, dass, als ein Schüler mit dieser Widerlegung zufrieden war, Diogenes ihn prügelte, aus dem Grunde, dass, da der Lehrer mit Gründen gestritten, er ihm auch nur eine Widerlegung mit Gründen gelten lassen dürfe. Ebenso hat man sich nicht mit der sinnlichen Gewißheit zu begnügen, sondern zu begreifen.". Cf. Hegel [Werke 18] p. 305.

[322] Ibid, p. 304.

[323] Cf. Hegel [XVIII], p. 300 : "Es ist aber schon erinnert worden, daß wir die wahrhaft *objektive Dialektik* gleichfalls bei Zenon finden".

Unendlich sinnreicher und tiefer als die betrachtete Kantische Antinomie sind die dialektischen Beispiele der alten eleatischen Schule[324]

No obstante, las críticas vertidas sobre el primero –sobre Kant– son igualmente legítimas en relación al segundo –Zenón. Estamos pensando en concreto en la incapacidad de Kant de hacerse cargo de las antinomias en su concepto, es decir, sin el recurso a aplicar el concepto a una u otra forma concreta:

Ferner hat Kant die Antinomie nicht in den Begriff selbst, sondern in der schon konkreten Form kosmologischer Bestimmungen aufgefaßt [325]

Del mismo modo que la filosofía crítica, la escuela eléata muestra la necesidad con la que las posturas unilaterales como la de la discreción y la continuidad[326] se encuentran con la antinomia solamente sobre la base de un contenido concreto. En el caso de Zenón esta base es la del tiempo y el espacio. La unilateralidad consiste pues en decretar la divisibilidad, en el caso del continuo, o indivisibilidad, para el caso de lo discreto, de la cantidad en cuestión. El aspecto dialéctico consiste en mostrar que la pretendida unilateralidad no es, en verdad, tal: cada lado tiene en su seno al otro lado o, lo que es lo mismo, cada lado es contradictorio en sí.

La asunción-superación especulativa de la contradicción que surge dentro de la categoría de la Cantidad es la del surgimiento de un nuevo momento: el Cuanto, Cantidad real o Cantidad con un límite. Con este nuevo movimiento de la *Wissenschaft der Logik*, Hegel da un paso más en su proyecto de hacer, desde la perspetiva de Zenón, de lo real algo racional y, por lo tanto, algo efectivamente real. Es decir, visto desde la filosofía crítica, se trata de hacer de lo racional algo efectivamente real. El estudio de la superación de la contradicción en la categoría del Cuanto será realizado en el siguiente capítulo.

2.2.1.1 Las *aporias* del continuo

Zenón nos presenta dos razonamientos aporéticos que tienen como presupuesto la infinita divisibilidad de las cantidades de tiempo y espacio. El primero es conocido como la aporía de la "divisibilidad", el segundo como la de "Aquiles y la tortuga". El primero es un razonamiento contra la posibilidad del movimiento en general, el segundo en contra de un movimiento en relación a otro movimiento. Si localizamos el sistema de referencia en uno de esos dos móviles y no, como es habitual hacerlo, fuera de ellos, la segunda paradoja se transforma en una que razona contra el movimiento acelerado. Así, al situar el sistema de

[324] Cf. Hegel [1978] p. 120.
[325] Cf. Hegel [1812] p. 114.
[326] Para una definición al uso de continuidad cf. Kant KrV B211: "Die Eigenschaft der Größen, nach welcher an ihnen kein Theil der kleinstmögliche (kein Theil einfach) ist, heißt die Continuität derselben", o también Aristóteles en Física Z 2, 232b 24-25: "λέγω δὲ συνεχὲς τὸ διαιρετὸν εἰς αἰεὶ διαιρετά" (trad. en Aristóteles [1996] p. 171: "Y llamo "continuo" a lo que es divisible en elementos divisibles hasta el infinito". Una traducción más fiel al original sería esta: "llamo continuo a lo divisible en [partes] siempre divisibles"). Nótese el uso del adverbio ἀεί (*jon*. αἰεὶ) para expresar la infinita iteración de la división, así como el caracter de irreductibilidad del continuo: el continuo se compone de partes siempre continuas. Estos dos aspectos acentuan el carácter de *capacidad* o *facultad* del continuo que, en Aristóteles, jugará un papel de primer orden.

referencia de referencia sobre la tortuga, la paradoja hablará en contra del movimiento acelerado y, en particular, desacelerado de Aquiles[327].

2.1.1.1.1 La *aporía* del continuo para el movimiento en tanto que movimiento

El razonamiento de Zenón que vamos a denominar *aporía* de la divisibilidad del movimiento uniforme nos ha sido transmitido en los siguientes pasajes aristotélicos: Física : Ζ 9, 239b 11 y sig. (DK 29 A 25), Ζ 2, 233a 21 y sig. (DK 28 A25), Θ 8, 263a 3 y sig. (no recogido en DK). Tópicos Θ 8, 160 b 8 y sig (DK 29 A 25). Una traducción de la versión citada en primer lugar es la siguiente:

El primero es el que trata sobre la no existencia del movimiento porque lo que se mueve debe llegar antes a la mitad que al final[328]

La formulación tajante de la paradoja obedece a lo impacable del razonamiento. En él, admitir el primer presupuesto es admitir *todos* los demás y con ello la conclusión, es decir, la imposibilidad del movimiento[329]. Los predicados de todo y mitad del todo son absolutamente intercambiables. El todo^1 tiene una mitad del todo^1 o, en relación al todo^1, su mitad es una mitad del todo^1 o mitad^1. Pero a su vez esta mitad es, en sí, otro todo o todo^2 de la cual podemos decir que posee también una mitad^2 o mitad del todo^2 etc. Estamos atrapados en un círculo o, mejor dicho, un algoritmo: el *output* del algoritmo se convierte en un *input* para una nueva aplicación del mismo algoritmo que nos proporciona un nuevo *output* etc.

Haciendo un uso no del todo ortodoxo de la terminología kantiana, podría decirse que la aporía es una regla de construcción de una regla de construcción. La regla de construcción (A) se aplica sobre la regla de construcción (B). El uso corriente de “regla de construcción” en Kant es el que, por ejemplo, hace posible trazar un círculo: “cógase una recta y fije uno de sus extremos, la figura trazada al mover el otro de los extremos con la cuerda tensa es un círculo”[330]. Si la segunda regla de construcción se aplica sobre un objeto que se da en el espacio, la segunda regla de construcción se aplica sobre el tiempo de ejecucción de la primera regla de construcción. Es precisamente el hecho de que esta aplicación de la segunda

[327] Ocurre exactamente lo mismo cuando el sistema de referecia es el de Aquiles, en este caso la desaceleración es la de la tortuga.

[328] Cf. Aristóteles [1996], p. 194. El texto griego dice así: “πρῶτος μὲν ὁ περὶ τοῦ μὴ κινεῖσθαι διὰ τὸ πρότερον εἰς τὸ ἥμισου δεῖν ἀφικέσθαι τὸ φερόμενον ἢ πρὸς τὸ τέλος”. Otra traducción sería “el primero [de los razonamientos] es sobre el no tener lugar del movimiento debido a que en primer lugar ha de llegar a la mitad antes de que alcance el final”.

[329] Cf. Hegel [Werke 18] p. 310: “Man gibt als unverfänglich zu, daß man bei der Hälfte ankommen müßte: so hat man alles zugegeben, - das Nichtankommen”.

[330] Kant mismo se refiere, en *Über eine Entdeckung,..*, [Ak. VIII] p. 212, a esto que nosotros hemos llamada regla de construcción de la regla de construcción: “Wenn nun Archimedes ein Sechs-Und-Neunzigeck um den Cirkel und auch ein dergleiches in demselben beschrieb, um, daß und wie viel der Cirkel kleiner sei als das erste und größer als das zweite, zu beweisen: legte er da seinem Begriffe von dem genannten regulären Vieleck eine Anschauung unter, oder nicht? Er legte sie unvermeidlich zum Grunde, aber nicht indem er dasselbe wirklich zeichnete (welches ein unnöthiges und ungereimtes Ansinnen wäre), sondern indem er die Regel der Construction seines Begriffs, mithin sein Vermögen, die Größe desselben so nahe der des Objects selbst, als er wollte, zu bestimmen und also dieses dem Begriffe gemäß in der Anschauung zu geben, kannte und so die Realität der Regel selbst und hiemit auch dieses Begriffs für den Gebrauch der Einbildungskraft bewies”.

regla de construcción se dé en el tiempo, requiera tiempo, lo que lleva a decir a Kant que una regla de construcción de una regla de construcción o, con las palabras de Kant, una Síntesis sucesiva de una serie infinita, nunca se pueda llegar a completar:

Nun besteht aber eben darin die Unendlichekeit einer Reihe, dass sie durch sukzessive Synthesis niemals vollendet kann[331]

Únicamente situándonos fuera de la primera regla de construcción podemos tener la certeza de que hemos avanzado algo, sea en el tiempo, sea en el espacio. Y es que dentro de la primera regla de aplicación nos encontramos, por definición, dentro de lo similar[332]. Y ahí, para decirlo de algun modo, una cosa es para sí igual que cualquier otra: no hay sensación de que se haya avanzado ni, por lo tanto, de que haya pasado tiempo. No hay allí ni más pequeño ni más grande. Por otro lado, ya fuera de la segunda regla de construcción o, como dice Hegel, en el concepto, es donde se nos hace presente el razonamiento mismo:

Es ist ein endloses Hinausgehen, aber im Begriffe gegenwärtig[333]

Esta contundencia, este carácter algorítmico del razonamiento es lo que viene a expresar la expresión recogida por Simplicio. En él,

igual es haber dicho eso una vez que decirlo siempre[334]

Este ἀεὶ expresa el carácter contradictorio de la contiduidad: el que siempre sea posible una nueva división debido a que siempre surge un todo donde cortar. De este modo, vemos que lo continuo hace surgir desde sí, una y otra vez, un entre discreto que dividir. Todo lo cual no es posible más que sobre la base de un algo ilimitado en donde los límites son, por ello mismo, arbitrarios[335], no absolutos[336].

El uso del adverbio ἀεὶ en la formación de una expresión algorítmica es análogo al utilizado por Euclides en la primera proposición del Libro X de los *Elementos*. En él, Euclides

[331] Cf. Kant *KrV* A 426/B 454. No obstante, en la segunda de las antinomias sí parece que admita tal posibilidad: “wenn alle Zusammensetzung in Gedanken aufgehoben würde…” (en A 434/B 462), por lo que tiene que hacer imposible la conclusión que de ello se sigue por otros medios, a saber, habiendo presupuesto en la tesis algo que precisamente contradice tal conclusión; que todo compuesto lo es de substancias.
[332] Similar es lo que “ für sich beobachtet nicht voneinander unterschieden werden kann” (Leibniz [1966] p. 72) Cf. también Leibniz [1858] p. 180: “Comperi autem, instituta qualitatis vel formae explicatione, rem tandem eo devenire, ut *similia* sint, quae singulatim observata discerni non possunt”.
[333] Cf. Hegel [XVIII] p. 306.
[334] Cf. Simplicio *Phys.* p. 140. (DK 29 B 1): “ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν”, lo que Hegel traduce por “einmal gesagt ist soviel als unzählige Male”, en Hegel [XVIII] p. 310.
[335] Recuérdese en este punto que, según la tesis de F.M. Marzoa, esto a donde llega Zenón o, en su caso, Aristóteles, es a su vez aquello desde donde parte la Modernidad. Si en Grecia el fenómeno del continuo (¿y de lo discreto?) era resultado de la *hybris* consistente en volverse sobre eso que siempre ya esta supuesto, en este caso el que todo transcurrir lo sea de un lugar A a otro B, en la modernidad el continuo ilimitado es lo obvio. “El asumir la muerte”, dice Marzoa, es la forma que tiene el moderno de quebrar este continuo ilimitado. Cf. Marzoa [1999] p. 36.
[336] Cf. Hegel [XVIII] p. 306: “Aber die halbierende Grenze ist nicht absolute Grenze”.

se basa en la definición 4 de las denominadas magnitudes *archimédeas* del libro V[337] para demostrar el fundamento sobre el que se basa el método por *anthypairesis*:

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad[338] *y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada*.[339]

Euclides se basa en esta proposición para demostrar[340] por exhaustión[341] la proporcionalidad de la superfície del círculo con el cuadrado de su diámetro. En ámbas proposiciones, es el adverbio ἀεὶ lo que se esconde tras las traducción "y así sucesivamente". La diferencia entre el sentido *zenoniano* y *euclidiano* del recurso al ἀεὶ consiste en que el primero hace uso de él para subrayar el carácter iterativo y, en este sentido, limitado del concepto de continuidad, mientras que el segundo lo utiliza para descartar todo límite puesto al algoritmo. Es este segundo uso del algoritmo el que prioriza Newton en el primer Lemma de su *Método de primeras y últimas razones*[342]. En la primera de estas opciones se parte del algoritmo y se muestra que nunca se puede agotar el terreno sobre el que se aplica. En el segundo caso, se parte de un terreno dado para demostrar que es un terreno agotable por el algoritmo. En la medida que ese terreno dado puede ser cualquier terreno se procede a agotar, esto es, *exhaustir*, el terreno en cuanto que terreno. La legitimidad del paso de "este terreno" a "algún terreno" es lo que en las dos aproximaciones se disputa.

En el caso de la paradoja de Zenón, la imposibilidad del movimiento es afirmada por el entendimiento al resultarle imposible salir del círculo del algoritmo. El razonamiento no afirma otra cosa que toda cantidad está constituida a su vez de cantidades, es decir, dicho negativamente, que no hay forma de llegar a un átomo o punto de cantidad. En la medida en que el átomo de cantidad va a resultar ser el representante de la discretitud, vemos que este razonamiento muestra las consecuencias de negar el carácter discreto de la cantidad: si la cantidad es meramente continua, entonces no es posible el movimiento en ella. Los razonamientos muestran lo contradictorio de sostener unilateralmente uno de los polos de la cantidad. En este sentido, los dos primeros razonamientos que vamos a estudiar son algo así como reducciones al absurdo del contendiente que pretende demostrar la continuidad de la cantidad.

---

337 *Elementos* V.4: "De dos magnitudes que pueden coincidir haciendo multiplicar la menor de ellas, decimos que tienen una relación (*lógos*)". Este axioma, habitualmente denominado Axioma de Arquímedes (aunque mejor sería llamarlo axioma de Eudoxo) es un principio de homogeneidad. Vale decir que sus detractores son las "magnitudes" infinitesimales.

338 Esta clausula es para Knorr (en Knorr [1983] p. 272) "striking" y rechazable porque "any constant fractional part would serve: for instance, "more than its third is removed" or "more than its 10000th part"". Esta tesis vendría a ser sostenida por Aristóteles en Fisica 206b10-12 en donde se habla de restar un tramo en razón fija sin llegar a especificar cual: "[...] mientras que si se incrementa la proporción de tal manera que siempre se tome la misma fracción, se recorrerá hasta el final por el hecho de que toda cantidad finita es agotada por una cantidad determinada cualquiera" (trad. en Aristóteles [1996] p. 82).

339 Cf. Euclides [1996] p. 12.

340 Cf. Prop. 2 del libro XII en Euclides [1996] p. 268 y sig. En general, todas las pruebas por exhaustión del libro XII se fundamentan en la primera proposición del libro X.

341 Este término fue propuesto por primera vez por Gregorius a Sto. Vincentino en el praefatio de su *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* para referirse a la demostración de Eudoxo recogidas en el libro XII de Euclides. El término griego para el latino *exhaurire* es δαπανᾶν (esp. consumir, agotar).

342 Cf. Newton [1999] p. 433. El *Método de primeras y últimas razones* será objeto de estudio del capítulo 4.

En términos hegelianos, el que cada trecho sea similar a cualquiera de sus divisiones se afirma diciendo que el continuo es “der reinen Sichselbstgleichheit”. Frente a ello se encuentra el punto, el límite (*Greneze*) que, al no ser absoluto, no es un ser en sí y para sí[343], es así “das reine Fürsichsein, das absolute Sichunterscheiden und Aufheben aller Gleichheit und Zusammenhangs mit anderem”[344]. La eliminación de todo ser para sí –el continuo– y el puro ser para sí –el punto– son puestos en uno en las exposiciones unitaristas del tiempo y del espacio. De ahí que el tiempo y el espacio sean, en este respecto, contradictorias:

Diese beiden aber sind in Raum und Zeit in eins gesetzt, Raum und Zeit also der Widerspruch[345]

El advervio ἀεὶ juega en nuestra lectura de Hegel el papel de marcar la diferencia entre lo que para la representación es un salir y entrar de la continudidad al punto y viceversa, y el cumplimiento, la verdad, de tal movimiento. Tenemos frente a frente un más allá siempre aplazado y una eternidad –ἀεὶ– presente únicamente en el concepto:

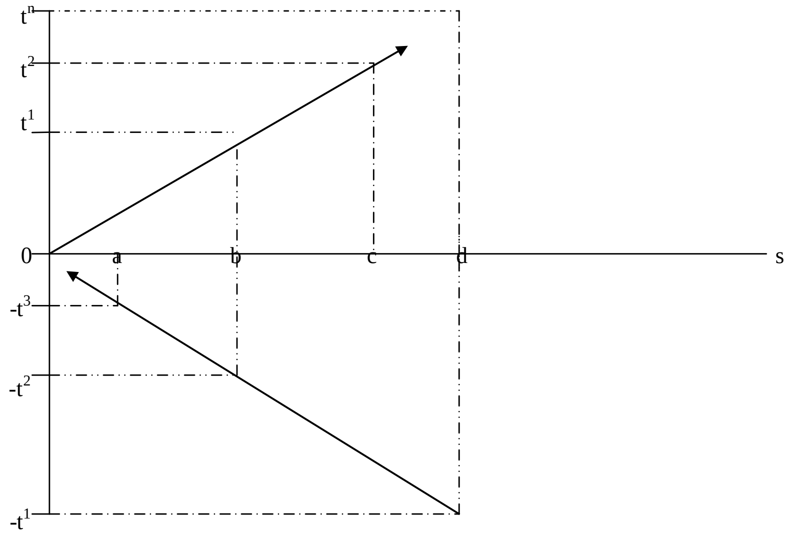
Es ist ein endloses Hinausgehen [potencia], *aber im Begriffe gegenwärtig* [acto][346]

Consideramos que esta distinción es solidaria de la distinción aristotélica entre infinito en potencia (δυνάμει) y el infinito en acto (ἐνεργεία). Esta última infinitud es la que corresponde a lo que está puesto en el concepto frente al caracter de mera posibilidad que corresponde a la “einfache Begriff”[347] o el concepto como presupuesto o “vorausgesetzt”[348]. El “siempre” que expresa el ἀεὶ está pues del lado del concepto como puesto. Mostrar esta presencia es mostrar que el continuo tiene dentro de sí el límite, su otro o la discretitud[349]. Utilizando la terminología aristotélica y para decirlo con Hegel: el infinito actual es la verdad del infinito en potencia.

En términos contemporáneos, el razonamiento de Zenón afirma una propiedad de la serie de los números reales que ha venido en llamarse “densidad”[350]: en una serie densa no hay número contiguo a un numero cualquiera dado; el corredor se encuentra con un, digamos, abismo ante sí; no hay un lugar siguiente a ese en donde se encuentra. Esta propiedad de los

[343] Cf. Hegel [XVIII] p. 308.
[344] Cf. Hegel [XVIII] p. 306.
[345] Cf. Hegel [XVIII] p. 306.
[346] Cf. Hegel [XVIII] p. 306.
[347] Cf. Hegel [XVIII] p. 308.
[348] Cf. Hegel [XVIII] p. 310.
[349] Y es que la discretitud no es para Hegel otra cosa que el punto puesto como límite absoluto. Por esta razón hemos dicho “discretitud” en vez de decir, como tal vez cabría esperar, “punto”. Es por ello que cuando Hegel habla de lo que para nosotros va a ser la primera paradoja de la discretitud, diga cosas como la siguiente: “Hier ist jetzt das Umgekehrte festgehalten, nämlich das absolute Begrenztsein, die Unterbrechung der Kontinuität” (en Hegel [Werke18] p. 315).
[350] Cf. Knopp [1922] p. 11: “…liegen die rationalen Zahlen *dicht*, d. h. zwischen *irgend zwei* verschiedenen von ihnen lassen sich noch beliebig viele weitere angeben (denn ist $a < b$, so liegen die n rationalen Zahlen, die die Formel $a+v(b\text{-}a/n+1)$ für v=1,2,…, n liefert, offenbar alle zwischen a und b und sind voneinander und von a und b verschieden)”. La nueva “paradoja” es que, aun siendo la serie de los reales densa, está, sin embargo, agujereada (*lückenhaft*), es decir, que “Die Gerade L ist unendlich viel **reicher** an Punktindividuen, als das Gebiet R der rationalen Zahlen an Zahlindividuen [subr. nuestro]” (en Dedekind [1965] §3).

números reales hace uso de una nueva lectura de la paradoja mediante la inversión de la serie del tiempo. En efecto, si bien es verdad que el argumento se puede plantear sobre la base de un tiempo real, no menos cierto es que el mismo razonamiento es perfectamente válido sobre la base de un tiempo posible. Es esta última lectura de la que, como decíamos, hace uso la definición de la propiedad de "densidad" de los números reales. Para comprender esta diferencia, vamos a representar el tiempo posible en el eje negativo de la ordenada mientras que el tiempo real lo representamos en el eje positivo. El primero de estos tiempos, el que hemos venido en llamar el posible, es el tiempo del proyecto, el tiempo del, haciendo uso de un término contable, "deber". El otro tiempo, representado por el eje positivo es el tiempo de las cosas ya realizadas, ya sucedidas: el tiempo del "haber". El espacio lo representamos por el eje de las abcisas:



La lectura que hemos presentado al comienzo es la representada por el cuadrante superior: para llegar el punto *d* del espacio ha de llegar primero a la mitad de la recta *Od*, es decir, uno ha de llegar primero al punto *b*. Una vez en el punto *b*, vuelve a aplicarse el mismo razonamiento con lo que tenemos que llegar a la mitad de *bd* antes de llegar a *d*: estamos ahora en el punto *c*. Y así sucesivamente. Con el recurso a la flecha se ha querido indicar que la recta en cuestión es un intervalo abierto[351] en ese lado.

En el cudrante inferior de ordenadas negativas se parte también del proyecto de recorrer la recta *Od*, siendo así que para ello se tendría que recorrer antes, en un tiempo $-t^2$, el trecho *Ob*. Sin embargo, para llegar hasta ahí es necesario haber llegado antes a *Oa*. Y así sucesivamente. La recta es ahora semi abierta por la izquierda. Si bien la recta del primer cuadrante recoge el par de tiempos y espacios recorridos, la del cuadrante inferior recoge el par de tiempos y espacios que se preveen recorrer. En el primer cuadrante no se llega a realizar el proyecto final *0d* pero se realizan muchos pasos reales, en el segundo no acaba uno de hacer proyectos y por ello no se llega a hacer nada real.

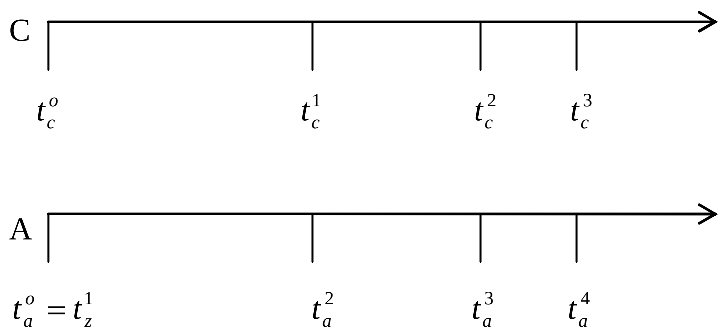
[351] Por "abierta" se entiende lo que por ello se entiende en Matemáticas y se suele representar por un paréntesis o un corchete invertido. Para la definición de intervalo abierto cf. Dieudonne [1968] pp. 24-25,: "(2.1) Sur la droite R, on distinguera soigneusement les quatre sortes d´*intervalles*: l´intervalle *fermé* [a,b], ensemble des *x* tels que a ≤ *x* ≤ b, l´intervalle *ouvert*]a,b[, ensemble des *x* tels que a <*x* < b (qui n´est non vide que si a < b), l´intervalle *semi-ouvert à droite* [a,b[, ensemble des *x* tels que a ≤ *x* < b, et l´intervalle *semi-ouvert à gauche*]a,b], ensemble des *x* tels que a < *x* ≤ b."

2.1.1.1.2 La *aporía* del continuo para el movimiento relativo

El segundo razonamiento que pasamos ahora a comentar tiene en común con la primera la afirmación unilateral de la infinita divisibilidad de la magnitud. A su vez, veremos que esta segunda paradoja se sitúa fuera del alcance de la primera en la medida en que los protagonistas de la misma llegan al menos a sus sucesivas metas. Esto se debe a la necesidad lógica[352] consistente en que para demostrar la contradicción del moverse más rapido en general sobre la base de un espacio-tiempo infinitamente divisible, se tiene que partir del supuesto ya atacado por el primer argumento de que el movimiento en general no es posible: supongamos que el movimento sobre una base continua no es en general contradictorio, si ello es así, veremos que el movimiento acelerado sí resulta ser contradictorio. Es decir, supongamos que moverse es posible, entonces, ¿es posible moverse más rápido de lo que uno ya se mueve?

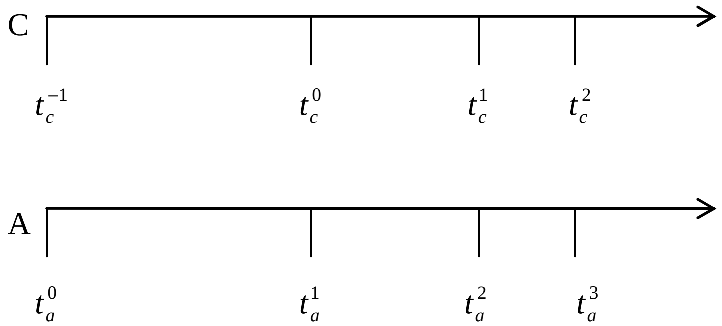
El argumento de Zenón es recogido por Aristóteles en su *Física*[353]. El héroe trágico Aquiles realiza una carrera contra la tortuga. Al ser ésta más lenta, Aquiles concede en darle una trecho de ventaja. Este trecho puede serlo indistintamente de tiempo o de espacio: es irrelevante para la argumentación el que Aquiles conceda un tiempo de ventaja a la tortuga o que le conceda un espacio de ventaja. Esto último se ve mejor en los siguientes dos diagramas:

i) ventaja concedida: tiempo



ii) ventaja concedida: espacio

[352] Lógico en el sentido de que para demostrar el carácter contradictorio de algo se tiene que suponer que aquellas cosas constitutivas de ese algo no son ellas mismas contradictorias.
[353] Cf. *Física* Z 9, 239b 14 y sig.



Se han representado por dos rectas los trechos recorridos por Aquiles (A) y la tortuga (C). Los dos protagonistas, representados por *t*, vienen acompañados de dos índices: el superior indica el grado de transcurso del mismo tiempo: p.e., t^2 transcurre después de t^3.. El inferior indica de cuál de los dos protagonistas se trata: de Aquiles (subíndice A) o de la tortuga (subíndice C). De este modo, la ventaja de tiempo concedida por Aquiles a la tortuga ha sido representada en el primer diagrama mediante la igualdad de lugar en dos tiempos sucesivos para Aquiles: $t_a^0 = t_a^1$. El signo de igualdad se refiere, claro está, al espacio en el que se encuentran los signos. De ahí que se podrían haber situado también uno al lado del otro. En el segundo diagrama, la ventaja de un trecho de espacio es representada por los distintos lugares en los que se han colocado los signos respectivos t_c^0 y t_a^0 que tienen como índice el tiempo de partida.

Se puede ver ahora que la ventaja del tiempo como la del espacio son equivalentes. En efecto, a partir del segundo momento en el caso del primer diagrama y del primer momento en el caso del segundo, las representaciones se distinguen únicamente en que en el primero el índice para el tiempo va un lapso por delante. La situación es análoga en los dos casos: en el mismo tiempo (tiempo denominado “2” en el primer gráfico y “1” en el segundo) la tortuga tiene un trecho de espacio de ventaja sobre Aquiles. Al ser este trecho infinitamente divisible, nunca se llegará a recorrer del todo, lo que significa que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Es pues en este último punto donde hace uso Zenón de la afirmación unilateral de la continuidad del espacio. El trecho concedido, al ser infinitamente divisible, se convierte en un trecho insalvable para Aquiles. Es por razón de esta infinta divisibilidad del trecho aventajado por la que Aristóteles considera que este argumento es el mismo que el primero[354].

Una vez que, a partir del segundo momento de tiempo para el caso del primer diagrama y del primer momento para el segundo diagrama, las dos versiones de la paradoja adquieren una lectura paralela, la diferencia entre ellas se convierte en la diferencia entre los dos modos posibles de definir lo que es un “movimiento mayor”:

1) Un movimiento es mayor que otro si con él se recorre el mismo espacio en menor tiempo que con el otro.

---

[354] Cf. Aristóteles *Física* 239b17-19: “ἔστιν δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῷ διχοτομεῖν, διαφέρει δ᾽ ἐν τῷ διαιρεῖν μὴ δίχα τὸ προσλαμβανόμενον μέγεθος.” (Cf. la traducción en Aristóteles [1996] p. 194: “Este argumento es el mismo que el de “bisección”, aunque difieren en que la magnitud que tomamos sucesivamente no se divide en mitades”).

2) Un movimiento es mayor que otro si con él se recorre más espacio en el mismo tiempo que con el otro.

La resolución de la paradoja tal y como ha sido representada por el primer diagrama involucra así la definición para “un movimiento mayor” 1). A su vez, la resolución de la paradoja del segundo diagrama involucra la definición 2) de “un movimiento mayor”. Y entendemos por resolución de la paradoja el hecho de que Aquiles alcance a la tortuga: en el primer caso Aquiles sería más veloz que la tortuga debido a que ha recorrido el mismo espacio en menos tiempo, en el segundo por que en el mismo tiempo ha recorrido más espacio[355].

Tal y como se decía en la presentación de las paradojas del continuo, si pasamos de un sistema de referencia exterior a los protagonistas a uno que tome a uno de ellos como en reposo, la paradoja se convierte en una que razona sobre la imposibilidad del movimiento acelerado negativo, es decir, el movimiento desacelerado[356]. Es decir, la imposibilidad que ahora se tematiza es el de que algo que desacelera llege a pararse. Situar el sistema de referencia “en” Aquiles o “en” la totuga es indifirente para llegar a esta conclusión.

2.2.1.2 Las *aporias* de lo discreto

Clasificamos dentro de la denominación “aporías de la discretitud” a las restantes dos aporías del movimiento que nos han sido transmitidas. Si el momento de la continuidad tenía que ver con una posibilidad que, en Hegel, estaba puesta en el concepto mismo de continuidad, el momento de la discreción es el de la admisión de elementos indivisibles de cantidad. Lo problemático de estos átomos de la cantidad es que no pueden ser, a su vez, cantidad. Frente a ello, la cantidad es por definición divisible, es decir, constituida a su vez de partes más pequeñas de cantidad. Ante esta problemática definición, la discretitud decreta la realidad de una parte última no ulteriormente divisible. La continuidad es la afirmación unilateral del proceso de división; la discretitud la afirmación igualmente unilateral del parón en el proceso de división, es decir, afirmación de la separación de los elementos de ese proceso: el todo y la parte. Si la continuidad afirma la totalidad de toda parte del todo que hace que esta parte sea nuevamente divisible[357], la discretitud afirma la distinción en el nivel atómico de esta identificación todo = parte; los átomos son parte pero no ya un todo a su vez divisible[358].

---

[355] Bien es verdad que las situaciones previas al encuentro entre Aquiles y la tortuga son también, al menos para nostros, casos en los que uno puede decir que Aquiles se ha movido más rápido que la tortuga. La diferencia está en que en este caso no se habla ya de, para la definición 1), “recorrer el mismo espacio” sino de “recorrer un mismo espacio”, y para la definición 2), no se trata ahora de recorrerlo “en el mismo tiempo” sino de recorrerlo “en un mismo tiempo”. Sin embargo, la paradoja no niega que Aquiles esté siendo más rapido que la tortuga (ese es precisamente uno de los presupuestos de la paradoja misma) sino que lo sea definitivamente: Aquiles gana cada batalla, esto no le permite, sin embargo, ganarlas todas. Esta totalidad, el encuentro entre Aquiles y la tortuga, es lo que ataca Zenón en esta paradoja.

[356] Un ejemplo de esto aplicado al terreno de la física sería el de la imposibilidad de que un cuerpo caliente termine de “dar” todo el calor al entorno si, como afirmaba Fourier y antes que él Newton, “un cuerpo más caliente que su entorno pierde calor a una tasa proporcional a la diferencia de temperaturas” (en Solis y Sellés [2005] p. 815). En este caso, “dar todo el calor” equivaldría a “alcanzar a la tortuga”.

[357] Podríamos decir con Wieland que “*das Schwergewicht liegt nicht auf dem Teil als solchen, sondern auf der Teilung*”. Cf. Wieland [1970] p. 287.

[358] Algo que con Wieland podríamos expresar así: “*das Schwergewicht liegt nicht auf der Teilung als solchen, sondern auf den Teilen*”.

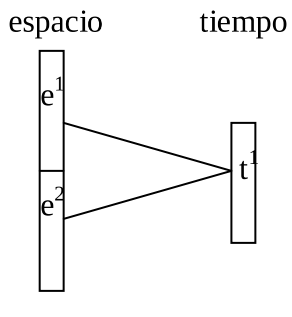
En definitiva, en la discretitud se establece como absoluto un límite (*Grenze*) que es, no obstante, únicamente *para sí*: se establece como *en sí* y *para sí* lo que es propiamente *para sí*. Este poner un límite absoluto lo vamos a llamar aquí *discreción*.

2.1.1.2.1 La aporía del movimiento discreto en general

La aporía del movimiento en general sobre la base de un tiempo y un espacio discretos es conocida habitualmente como la aporía de la "flecha"[359]. Las fuentes de la transmisión son Aristóteles en *Phys*. Z 9, 239b 30 y sig. (DK 29 A 27), *Phys*. Z 9, 239a 35-b 10 (DK 29 A 27), Simplicio en *Phys*. p. 534,7 y sig, Diógenes Laercio IX 72 (DK 29 B 4) y Epifanio *Adv. haer*. III 11. La versión más "popular" podría considerarse la de Diógenes. La traducción dice así: "Zenón destruye (ἀναιρέω) el movimiento cuando dice que lo que se mueve ni se mueve en donde está, ni donde no está"[360]. En las versiones más elaboradas de Aristóteles, la "destrucción" del movimiento adquiere una forma concreta: de acuerdo a la paradoja, Zenón reduce al reposo todo movimiento que se haga sobre la base discreta del tiempo y el espacio.

Hemos visto ya que en las dos paradojas anteriores la afirmación unilateral de la continuidad para el espacio involucraba consigo la del tiempo y viceversa. Como cabría esperar, en este nuevo par de paradojas, es la afirmación de la discretitud del espacio (del tiempo) el que involucra la discretitud del tiempo (del espacio). De no ser así, en el caso en el que tenemos continuidad en el espacio pero no en el tiempo, el móvil no sería fijado en ninguna imagen porque para cada átomo de tiempo tendríamos una infinitud de sitios por los que se mueve el móvil. El móvil se encontraría en una infinitud de puntos al mismo tiempo. A su vez, si se tuviera el tiempo dividido en unidades discretas pero el espacio en su carácter de continuo, el móvil no sería tal móvil porque se encontraría en reposo: para infinidad de instantes el móvil estaría en el mismo sitio. La paradoja se sitúa así entre estos dos polos igualmente rechazables:

Por un lado, se rechaza el caso en el que el espacio es continuo mientras que el tiempo es discreto. El caso más simple dentro de ello es aquel en el que para una unidad de tiempo hay dos de espacio:



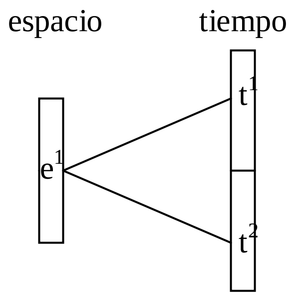
Obteniendo así el absurdo de que en un mismo tiempo el cuerpo se encuentra en dos sitios distintos.

---

[359] Siguiendo a Koyre (en Koyre [1971] p. 23) una formulación moderna de esta aporía podría ser la siguiente: "l'argument de la flèche signifie simplement ceci: toutes les valeurs d'une variable sont des constantes".

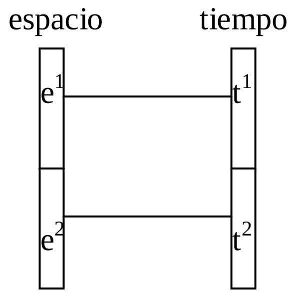
[360] El texto original es "Ζήνων δὲ τὴν κίνησιν ἀναιρεῖ λέγων τὸ κινούμενον οὔτ᾽ ἐν ᾧ ἔστι τόπῳ κινεῖται οὔτ᾽ ἐν ᾧ μὴ ἔστι".

A su vez, la suposición de un móvil que se mueve sobre un espacio discreto en un tiempo continuo puede representarse en su forma más primitiva mediante el diagrama siguiente:



Obteniendo así el absurdo de que un objeto que se mueve esta en realidad en reposo o, al menos, que el movimiento consiste en una sucesión de reposos abruptamente interrumpidos.

Eliminadas las dos opciones precedentes, la alternativa que queda es la de una relación bijectiva entre las unidades de tiempo y el espacio:



Es desde una base tal desde la que vamos ha concebir el razonamiento. La imposibilidad o contradictoriedad del movimiento sería producto de la imposibilidad de concebirlo a partir de una suma de no-movimientos[361] o momentos estáticos. La argumentación expone la dificultad de concebir el movimiento como un estado o propiedad de la cosa. Efectivamente, si queremos entender el movimiento como una propiedad del objeto, no podemos sino recurrir a lo que se denomina velocidad instantánea o atomizada (discretizada). De otro modo, el movimiento sería una relación entre espacios y tiempos en los que el objeto se mueve. Como si dijéramos: el objeto A se ha desplazado 100 espacios en 20 tiempos, luego se ha movido a una velocidad de 100 espacios por cada 20 tiempos. Para poder hablar del movimiento como de una propiedad independiente a que el cuerpo se tenga que desplazar tanto espacio en tanto tiempo, es decir, para poder hablar del movimiento como de una propiedad que de hecho tiene el cuerpo como tiene un color en cada ahora y cada aquí en el que está, para esto, decíamos, necesitamos hablar del movimiento instantáneo. Esta tercera paradoja muestra precisamente la inconsistencia de este concepto: “movimiento instantáneo”.

---

[361] Decimos “no-movimientos” y no “reposos” siguiendo para ello la crítica de la argumentación de Zenón realizada por Aristóteles. En él (Cf. Física 239b1) , Aristóteles niega la posibilidad de que haya movimiento o reposo en el ahora: “οὔτε γὰρ κινεῖσθαι οὔτε ἠρεμεῖν ἔστιν ἐν τῷ νῦν” (Arisóteles [1996] p. 192: “en el “ahora” no es posible ni moverse ni reposar”).

La lectura de Hegel se centra en ver qué de absurdo hay en eso de “movimiento instantáneo”. Para ello recurre a distinción entre el opinar (*meinen*) y el pensar (*denken*) ya presente en la *Fenomenología*. Recordemos que el opinar quedaba del lado de la certeza sensible y que en cuanto tal su verdad era el universal abstracto[362]. La opinión, si bien mentaba la diferencia del ser sensible, lo único que alcanzaba expresar era la vacía abstracción. Desde esta perspectiva, lo absurdo de la paradoja consiste en que queriendo decir el movimiento, una sucesión de ahoras y aquís de la cosa, no puede más que expresar el reposo más absoluto: un continuo estar el cuerpo aquí y ahora, aquí y ahora. La pretendida variedad de los ahoras es pues eso, algo meramente supuesto[363]. La lectura de Hegel se basa en la siguiente versión aristotélica de la paradoja:

El razonamiento de Zenón es falaz, pues si, como él dice, todo está en reposo cuando coincide exactamente con una parte igual –y lo que se mueve siempre está en el “ahora”-, la flecha que se mueve estará inmóvil.[364]

Una traducción más acorde con la lectura de Hegel sería la siguiente:

El razonamiento de Zenón es falaz, pues si, como él dice, todo está en reposo cuando está en el mismo [espacio] y si, por otra parte, lo que se mueve siempre está en el “ahora”, la flecha que se mueve estará inmóvil.[365]

La paráfrasis de Hegel de este fragmento acentúa la estructura dual del razonamiento: si el cuerpo siempre está en el mismo aquí y en el mismo ahora, entoces, este cuerpo está en reposo y no en movimiento:

…"der fliegende Pfeil ruht", und zwar deswegen, weil "das sich Bewegende immer in dem sich gleichen Jetzt" und dem sich gleichen Hier, im "Ununterscheidbaren ist" (ἐν τῳ νυν, κατὰ τὸ ἴσον); er ist hier, und hier, und hier. So sagen wir, er ist immer derselbe; das nennen wir aber nicht Bewegung, sondern Ruhe.

El problema de esta lectura reside en su definición de “reposo”. En vez de definirlo como el estado de un cuerpo que al mismo tiempo se encuentra en el mismo sitio, parece más acertado definirlo como el estado de un cuerpo que en distintos tiempos se encuentra en el mismo sitio. Tal y como hemos visto más arriba[366], esta última definición es la que utiliza Aristóteles para rechazar el que la flecha se encuentre en reposo (o en movimiento) en el

---

[362] Cf. Hegel [1988] p. 65: “das Allgemeine ist also in der Tat das Whare der sinnlichen Gewißheit”.
[363] “Suponer” es precisamente la traducción de W. Roces para “meinen”. Cf. Hegel [1999] p. 63: “I. La certeza sensible o el esto y la suposición”. Cf. también Hegel [werke18] p. 314: “die Verschiedenheit ist nur gemeint”.
[364] Cf. Aristóteles [1996] p. 193. Cf. también Física 239b5-7: “Ζήνων δὲ παραλογίζεται· εἰ γὰρ αἰεί, φησίν, ἠρεμεῖ πᾶν [ἢ κινεῖται] ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον, ἔστιν δ᾽ αἰεὶ τὸ φερόμενον ἐν τῷ νῦν, ἀκίνητον τὴν φερομένην εἶναι ὀϊστόν”.
[365] Otra posible traducción, esta también más “hegeliana”, es la de J. Mansfeld: “Zenon argumentiert also falsch: Wenn jeweils, sagt er, ein jegliches in Ruhe ist, wenn es an dem [ihm selbst] gleichen Ort ist, und zweitens das Sichbewegende immer wieder [an dem Ort ist,] in dem [es] jetzt ist, so ist der sich schnell bewegende Pfeil unbewegt” (en Mansfeld [2003] p. 47). Mansfeld sigue así la paráfrasís de Temistio y entiende el problemático “κατὰ τὸ ἴσον” como si dijese “κατὰ τὸ ἴσον αὑτῷ διάστημα”.
[366] Nos referimos a la nota 43.

ahora. No obstante, Aristóteles no hace con ello más que dar la razón a Zenón: resulta que para ambos no es posible hablar de movimiento en el ahora[367].

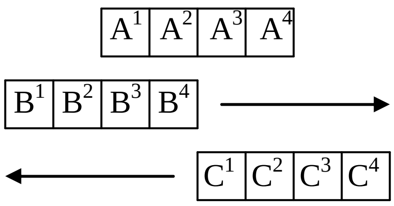
2.1.1.2.2 La aporía de lo discreto para el movimiento relativo

Con la "aporía de lo discreto para el movimiento relativo" nos referimos a lo que habitualmente se ha venido en llamar "aporía del estadio". Tal y como ocurría en la segunda aporía de lo continuo, con "relativo" hemos querido indicar que se trata de dos movimientos uno de los cuales es mayor que el otro. Tal y como se verá en el apartado siguiente, la concepción aristotélica del tiempo y el espacio es fruto de su correcta comprensión de la paradoja que a continuación venimos a interpretar.

La paradoja se encuentra recogida en Aristóteles *Phys*. Z 9, 239b 33 y sig. (DK 29 A 28) y en Simplicio *Phys*. p. 1016, 14. Se ha hecho habitual reproducir el argumento sobre la base del esquema de Alejandro de Éfeso que Simplicio transmite. Nosotros lo haremos sobre la base de una ligera variación del mismo. Es decir, en vez de hacer uso del esquema

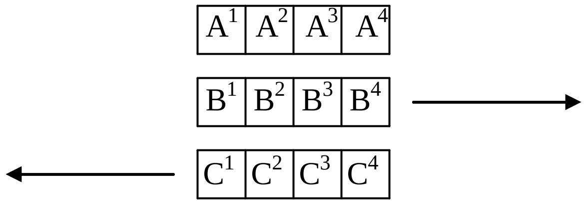
A A A A
B B B B ----->
<----- C C C C

haremos uso de este otro,



De los tres cuerpos (ὄγκοι), el primero (A) se encuentra en reposo mientras que los cuerpos B y C se mueven con una velocidad igual en las direcciones opuestas representadas por el sentido de las flechas. El hecho de que los cuerpos sean representados por un conjunto de 4 letras indica que el espacio en el que se encuentran es discreto y constituido por cuatro átomos de espacio ("puntos") en cada caso. Supongamos que en un momento posterior, los cuerpos B y C avanzan dos unidades de espacio con respecto a A. El resultado es representado por el siguiente nuevo esquema:

[367] La crítica de Aristóteles contra Zenón en la que le criticaría el que tampoco es posible el reposo en el ahora, tiene como presupuesto –presupuesto por nosotro no compartido– el que Zenón afirma una tesis positiva.

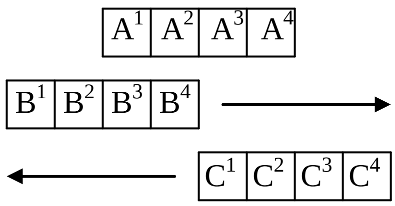


Es decir, el cuerpo B se ha desplazado cuatro unidades de espacio con respecto al cuerpo C pero sólo dos con respecto a A. Lo mismo le ocurre al cuerpo C con respecto a B y A, respectivamente. De este experimento, dice Aristóteles, Zenón pretende concluir que “la mitad de tiempo es igual al doble”[368]. Las razones para ello parecen ser las siguientes:

En primer lugar, el que estemos dentro del segundo grupo de paradojas significa que el tiempo y el espacio están constituídos de átomos de tiempo y de espacio respectivamente. Esto, a su vez, implicará la existencia de un átomo de velocidad o velocidad mínima de los cuerpos: la velocidad que consiste en moverse una unidad o átomo de espacio en una unidad o átomo de tiempo. El problema de esta paradoja consiste en dar cuenta de velocidades mayores o menores que esta unidad de velocidad.

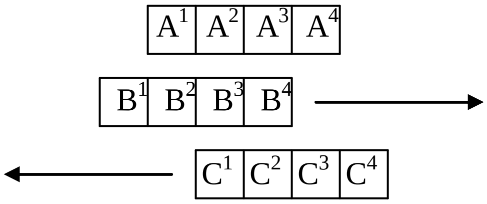
Supongamos pues que la velocidad unidad es aquella con la que se mueven los cuerpos B y C con respecto a D. En este caso el problema surgirá con la velocidad mayor que se da entre los cuerpos B y C. La secuencia de espacios y tiempos será la siguiente:

En el tiempo t = 0 estaremos en la situación del comienzo arriba reproducida:



Una unidad de tiempo después, t = 1, los cuerpos B y C, al tener una velocidad de una unidad de espacio por una de tiempo en relación a A, se moverán una unidad de espacio en relación a él:

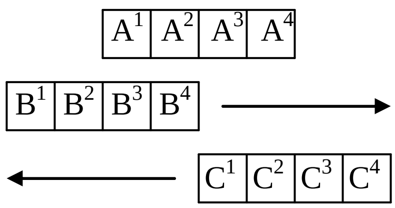
[368] Cf. Física 240a 1 y Aristóteles [1996] p. 194-195.



Y el problema aparece en relación a los cuerpos B y C. Efectivamente, éstos han tenido que moverse dos unidades de espacio en una unidad de tiempo. Esto significa que en una unidad de tiempo, es decir, en el mismo tiempo, las partes del cuerpo B se han desplazado dos unidades de espacio: por ejemplo, el cuerpo B^4 ha estado al mismo tiempo en los espacios C^1 y C^2. Ocurre lo mismo si como sistema de referencia utilizamos el cuerpo B: el cuerpo C^1 ha estado al mismo tiempo en los espacios B^4 y B^3. Por decirlo de otra manera, si bien tenemos que con respecto al cuerpo A, la parte B^4 pasa de estar en t = 0 a la altura de A^2, a estar en el tiempo siguiente t=1 a la altura de A^3, en ese mismo tiempo, en relación a C, la parte B^3 pasa a avanzar dos posiciones: podemos ignorar la posición intermedia, B^4 a la altura de C^1, pero únicamente bajo la condición de admitir una velocidad infinita: la que le permite a B^4 pasar por delante de C^1 sin que a su vez pase tiempo alguno.

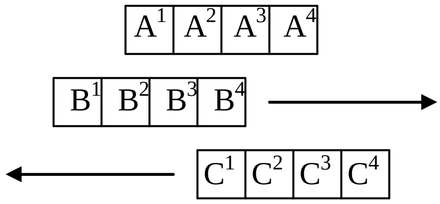
Podemos afinar nuestro reloj y ajustarlo de tal manera que se nos pueda manifestar lo que esta ocurriendo en ese salto de dos unidades de espacio que dan los cuerpos B y C entre sí. Es decir, podemos tomar unidades de tiempo tales que los cuerpos C y B se muevan a una unidad de espacio por una unidad de tiempo. Para ello, no hay mas que dividir nuestra originaria unidad de tiempo en dos: $t^*=t/2$. El problema que ahora surge es el inverso: conseguir dar cuenta de una velocidad menor que la velocidad unidad.

Efectivamente, en nuestro nuevo tiempo t^*, los cuerpos que se mueven a la velocidad mínima[369] son los cuerpos C en relación a B y B en relación a C. Si volvemos a representar la carrera bajo este nuevo supuesto, el primer momento de tiempo, t = 0, la situación no habrá cambiado:



En la siguiente unidad de tiempo, $t^* = 1$, los cuerpos estarán en la posición siguiente:

369 "Mínima" en el sentido arriba indicado de que se mueven a una velocidad de una unidad de espacio por una de tiempo.



Es decir, los cuerpos B y C se mueven una unidad de espacio entre sí, pero ninguna[370] con respecto a A: nuestra nueva unidad de tiempo permite dar cuenta[371] del movimiento entre los cuerpos B y C, pero hace que el movimiento de B con respecto a A y de C con respecto a A se manifieste como una suma de reposos. Nuestro nuevo tiempo resulta ser demasiado fino para el movimiento de los cuerpos B y C en relación a A.

El razonamiento de Zenón parece querer evitar al mismo tiempo a estas dos salidas. De otra forma no parece ser posible comprender la reproducción aristotélica del argumento:

su tiempo [el de C] frente a cada una de las BB es exactamente igual que frente a cada una de las AA[372]

Es decir, si el cuerpo B se mueve con respecto a A y C, lo hace por que en cada unidad de tiempo se desplaza una unidad de espacio[373]. Ahora bien si como resultado de ello, el cuerpo B se ha desplazado el doble de espacio con respecto a C que con respecto a A, ello se debe a que el tiempo se ha desplazado más rapidamente con respecto al primero. Lo extraño del razonamiento consiste en haber dilatado el tiempo en vez de haber hecho lo mismo con el espacio. Lo habitual sería decir que si con respecto a C se ha movido el doble de espacio que con respecto a A, entonces para un mismo tiempo el espacio que recorre con respecto a C es doble que el que recorre con respecto a A. Es decir, si se ha movido más rapido con respecto a C es por que su unidad de espacio es mayor[374]. Esta solución es menos defendible visualmente por que, a diferencia del tiempo, los espacios han sido representados[375] en el esquema. Éstos tienen una extensión fija. Si resulta que obtenemos un movimiento mayor con respecto a un cuerpo que con respecto a otro cuerpo, entonces el tiempo va más deprisa con respecto al primero que con respecto al segundo. Hay una dilatación del tiempo o, en el caso

370 Ninguna por que al ser el espacio discreto no hay algo así como una mitad de la unidad de espacio.

371 Si es que admitimos que la existencia de una relación bijectiva entre las unidades de tiempo y de espacio es dar cuenta del movimiento. De este modo, este segundo grupo de paradojas reproduce exactamente el esquema que tenía lugar en el primer grupo. En éste, el ataque del movimiento relativo dejaba en suspenso la contradictoriedad del movimiento en general demostrada en la primera parte de la paradoja. En este segundo grupo, a su vez, se supone que el que los cuerpos se muevan como la flecha se movía en la paradoja anterior, a una unidad de tiempo por espacio, es concebir el movimiento o al menos concebir una construcción no contradictoria.

372 Cf. Física 240a 15-16: "ἴσον χρόνον παρ᾽ ἕκαστον γιγνόμενον τῶν Β ὅσονπερ τῶν Α". La traducción, que ha sido alterada por motivos "técnicos", se encuentra en Arisóteles [1996] p. 196.

373 Ya hemos visto cuales son los sinsentidos de no aceptar esto. Por un lado una cosa cuyo movimiento es una suma de reposo, por otro, una cosa cuyo movimiento se traga unidades de espacio.

374 Es decir, una unidad como la que componen B^3 y B^4 que se movería con respecto al espacio compuesto por C^1 y C^2.

375 Si no fuera por ello, todo la argumentación de este apartado sería igual de representable si en vez del tiempo fuese el espacio el protagonista del mismo.

de que el resultado haya sido un espacio doblemente mayor, "la mitad de tiempo es igual al doble".

2.2.2 Las Aporias de lo uno y lo múltiple

Si hacemos caso a las palabras del joven Sócrates del diálogo *Parménides*[376], el dialéctico Zenón vendría a sostener las mismas tesis que Parménides aunque, a diferencia de su maestro, en vez de demostrar directamente que lo único que es es el Uno, se dedicaría a demostrar las contradicciones en las que incurrían los que afirman que las cosas son múltiples y de ahí concluiría la Tesis positiva de Parménides. En fin, según Sócrates, uno y otro vendrían a decir lo mismo: "Eso pues de que el uno diga que es uno y el otro que no muchos, y que cada uno de los dos de tal manera lo diga que en nada parezca que lo que ha dicho es lo mismo, siendo así que lo mismo más o menos vienen a decir, parece que es como que lo dicho estuviera dicho como una broma a costa de los demás"[377]. Las dificultades de esta lectura son varias:

1. Su incongruencia con el conjunto de los fragmentos transmitidos de Zenón en los que no se demuestra ninguna doctrina positiva. El que Zenón defienda uno de los polos de la oposición no es solidario de su actividad como dialéctico. De hecho, en *Phys*. p. 97, da cuenta Simplicio de una noticia que le llega del peripatético Eudemo de Rodas según la cual Zenón habría demostrado las contradicciones a las que la afirmación del Uno conducen. Simplicio mismo, en *Phys*. p. 139, parece estar dispuesto a admitir esta noticia basándose en la condición de dialéctico de Zenón[378].
2. El uso en el diálogo de giros como "tú [a Sócrates] la verdad del escrito no has llegado del todo a percibirla" o "y es que en modo alguno se permite tantos humos el escrito" por parte de Zenón.
3. El que no sea de entrada evidente que la relación entre los predicados "el ser es uno" y "el ser es múltiple" sea el de la exclusión. Sólo bajo esta condición de contradicción entre los dos predicados podemos de "el ser no es múltiple" concluir, utilizando el Principio de tercio excluso, la proposición "el ser es uno"[379].

El caso es que no se dispone de fragmentos en los que se dé cuenta de las aporías o razonamientos que emprendió Zenón contra el Uno. Por ello vamos a tener que conformarnos con estudiar los razonamientos relativos a lo múltiple.

Todos los fragmentos son transmitidos por Simplicio. Junto con el texto griego ofrecemos la traducción acompañada de un comentario.

1) *Phys*., 139, 18 y sigs: "...προδείξας, ὅτι οὐδεν ἔχει μέγεθος ἐκ τοῦ ἕκαστον τῶν πολλῶν ἑαυτῷ ταὐτὸν εἶναι καὶ ἕν" (*Trad*: "habiendo mostrado, que [ello] no tiene ninguna cuantía debido a que cada uno de los muchos es idéntico a sí mismo y uno"). Parece que el fragmento apunta a la imposibilidad de que haya lo múltiple (aquí bajo la figura de la cantidad o μέγεθος) debido a que cada uno que es parte de sí mismo es igual a sí mismo y eso

---

[376] Cf. 128a-e.
[377] Cf. 128b 2-5 Recogemos la traducción de García Calvo [1992] p. 58.
[378] "es verosimil (εἰκὸς) que Zenón, como uno que emprende el ejercicio [lógico] para cada uno de los contrarios (que es por ello que se le llama «de doble lengua»), lanzase tales argumentos en los que *problematiza* (ἀποροῦντα) sobre el uno ".
[379] Sobre este punto cf. García Calvo [1992] pp 62-72.

es algo que ocurre con todos ellos, luego todos son iguales y uno: no hay forma de distinguirlos. La pluralidad es así imposible. Veremos en su debido momento que este momento del razonamiento es lo que en la *Wissenschaft der Logik* se llama "atracción de los Unos".

2) *Phys*. p. 141,1 y sigs: "οὕτως εἰ πολλὰ ἔστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι". (*Trad*: "de este modo, si muchos es, por fuerza será pequeño y grande: de tal modo [será] pequeño que no tendrá extensión, de tal modo grande que [será] ilimitado/infinito"). Ya sabemos, por el fragmento 1), que lo múltiple no tendrá extensión. Lo que nos faltaba por ver era que, a su vez, tendrá una extensión ilimitada. Esta conclusión es presentada en un razonamiento que conservamos de Zenón y que no ha sido reproducido aquí[380]. Su contenido se reduce a lo siguiente: si algo es, tiene que tener una cierta cuantía, luego estará formado por unos, pero a su vez estos unos, si son algo, también tendrán una cierta cuantía etc. (ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν). La conclusión de todo ello es que la extensión de ese primer algo tendrá que ser finita debido a que está constituido de infinitas partes extensas.

Estos dos razonamientos serán utilizados a lo largo de la historia del cálculo contra el dudoso estatuto del infinitesimal. Si el infinitesimal tiene extensión, ¿cómo es que su infinita adición da lugar a magnitudes finitas y no infinitas? Por otro lado, si el infinitésimo no tiene extensión, ¿cómo es que da lugar a una extensión?.

3) *Phys*. 140, 29 y sigs: "εἰ πολλὰ ἔστιν, ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστι καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττονα. εἰ δὲ τοσαῦτά ἐστιν ὅσα ἐστί, πεπερασμένα ἂν εἴη" (*Trad*: "si muchos son, por fuerza son tantas cuantas son y ni más ni menos. Si son tantas cuantas son, habrán se ser finitas"). Un argumento que en principio parece "de perogrullo" no lo es tanto si atendemos a lo que se dice con el giro "ser tantas cuantas son". Podríamos traducirlo algo groseramente pero conservando el significado, con la expresión: "son tantas cuantas de hecho/en sí lo son". Este "de hecho" no se refiere al hecho de que alguien de facto las haya contado en un número determinado, sino a lo en sí en el que las cosas son las que son y cuantas son, con independencia de que alguien las cuente o sepa de ellas. Si de este modo los muchos tienen que ser ni más ni menos que los que son (porque son los que son independientemente de que alguien los haya contado más y otros menos) habrán de ser en número determinado, vale decir, finito.

4) *Phys*. 140, 29 y sigs: "εἰ πολλά ἔστιν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄν των ἐστί, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξύ. καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστί" (*Trad*. "si muchos son, los seres son ilimitados/infinitos: porque siempre hay en medio de los seres otros seres, y a su vez otros en medio de cada uno de ellos. De modo que los seres son infinitos/ilimitados") El argumento se parece a aquel del continuo que ha sido ya estudiado en el apartado anterior. El caso es que aquí no se alude ya a un substrato en el que se tienen las cosas (los puntos, los ahoras,...) dispuestas en una relación que permita hablar de lo que en medio de ellas haya. El que se hable de que entre unas cosas siempre hay otras puede deberse a que el argumento pretende ser válido para cualquier magnitud continua. En todo caso, volvemos a tener un ejemplo en el que un proceso iterativo caracterizado por el adverbio ἀεὶ, da lugar a lo ἄπειρον. Es asimismo interesante señalar que a finales del siglo XIX surgirá una nueva vertiente matemática que pretende hacerse cargo de las dos verdades que en los fragmentos 3) y 4) se expresan. Hablamos de la Teoría de Conjuntos de Cantor y

[380] Cf. Simplicio *Phys*. 140, 34 y sig.

sus conjuntos de distintos órdenes de infinitud en los que se pretende hacer valida al mismo tiempo la afirmación del fragmento 3) x=x para conjuntos infinitos o pertenecientes al fragmento 4). En fin, se trata de hacer valer el cuantificador "todo" en un universo de discurso infinito.

2.2. LA RESPUESTA DE ARISTÓTELES

Resulta oportuno aproximarnos siquiera brevemente al tratamiento aristotélico de las aporias de Zenón. Este análisis nos llevará inevitablemente a tener que dar cuenta del discurso de Aristóteles en lo que respecta el aspecto continuo del movimiento. Veremos que estos dos aspectos, el enfrentamiento con las paradojas y la defensa de la própia postura frente al movimiento, están directamente ligados en Aristóteles, tanto es así que el segundo es interpretable como una reacción al primero. Tal y como hemos avanzado más arriba, esta interdependencia se hace especialmente relevante cuando uno observa la cuarta paradoja. No es casualidad que sea la paradoja del estadio la que mayor atención recibe en la *Física*.

Como se sabe, el espacio y el tiempo son en Aristóteles, en tanto que[381] magnitudes (μέγεθος), entidades continuas. "Continuo" (συνεχὲς) es aquello "cuyos extremos son una sola"[382]. Esto implica que el continuo no está constituido de partes mínimas o átomos. El tiempo no está constinuido por ahoras (νῦν) ni el espacio (la recta) de puntos (στιγμή). Debido a que lo indivisible no tiene un exterior distinto de aquello de lo que es exterior el concepto de ἔσχατα (*extremos*) no es aplicable a lo indivisible. Por esta razón, en Aristóteles, dos puntos que se tocan no son dos sino uno[383]. Los puntos se encuentran entre dos opciones igual de insatisfactorias para las exigencias de la formación del continuo: "Zwei Punkte fallen entweder ganz zusammen oder lassen zwischen sich Raum für beliebig viele weitere Punkte"[384]. De este modo, si el continuo no está consituido de partes no continuas, estará constituido de partes que, a su vez, son continuas. El tiempo está constituido de tiempos, la recta de rectas, el movimiento de movimientos. Es decir, "lo continuo es divisible hasta el infinito"[385]: "εἰς ἄπειρον γὰρ διαιρετὸν συνεχές"[386].

---

[381] Cf. Aristóteles [1996] p. 169: "toda magnitud es continua" o Phys. 232a24-25: "μέγεθος ἐστὶν ἅπαν συνεχές".

[382] Cf. Aristóteles [1996] p. 166 para la traducción. El texto griego esta en Phys. 231a22: "συνεχῆ μὲν ὧν τὰ ἔσχατα ἕν".

[383] De este modo un supuesto continuo constituido por puntos seria algo así como el Infinito del entendimiento de Spinoza: entrar en un trecho así sería, al mismo tiempo, salir de ella: de este modo tendríamos un movimiento verdaderamente instantáneo, e. d., infinito. Cf. Schramm [1962] p. 13 "bei teillosen Elementen kann ja nur der zuletzt gennante Fall auftreten (der eine ganz den anderen ganz berühren)" pero de este modo no se podria producir de ellos ninguna magnitud (Größe). Todo esto se ve más claramente si atendemos a la definición del continuo de 227a11: "λέγω δ' εἶναι συνεχὲς ὅταν ταὐτὸ γένηται καὶ ἕν τὸ ἑκατέρου πέρας οἷς ἅπτονται" (cf. la trad. en Aristóteles [1996] p. 151: "llamo "continuo" a algo cuando los extremos con los que dos objetos están en contacto son uno y el mismo"). Es decir, si el continuo estuviese constituido de puntos atómicos, todos sus puntos se tocarian entre sí, teniendo como resultado algo parecido al mundo lleno del Descartes de *Le monde* en el que la imposibilidad de introducir el tiempo no era más que la otra cara de que en él, el que pasara una cosa era lo mismo que pasaran todas: el comienzo del mundo era, al mismo tiempo, su final.

[384] Cf. Wieland [1970] p. 283.

[385] Cf. Aristóteles [1996] p. 9.

[386] Cf. Phys. 185b10.

Al igual que el Zenón de la flecha, Aristóteles descarta[387] la concepción de un movimiento discreto. El razonamiento de Aristóteles se basa en los dos presupuestos siguientes:

1) Que “todo tiene que estar necesariamente o en reposo o en movimiento”. Aristóteles parece querer refutar la paradoja de la flecha basándose para ello en el Principio de tercio excluso. Y, sin embargo, esta premisa no hace más que preparar la base sobre la que se hace uso del Principio de no contradicción. Es este último Principio el que no se cumple en la aporía de la la flecha: ésta está “continuamente (συνεχῶς) en reposo y simultáneamente en movimiento”[388]. El movimiento discreto es así contradictorio.

2) Que lo que se mueve no puede estar moviéndose (κινεῖσθαι) y haberse movido (κεκινῆσθαι) simultáneamente (ἅμα)[389]. Si esto es así, si primero hay que estar moviéndose para luego haberse movido, no habrá átomos de espacio y tiempo. Con respecto a un espacio A, habrá tenido lugar un estar moviéndose y un haberse movido que obligaría a dividir este espacio así como el tiempo en el que el moverse ocurre: “si lo ha recorrido después de atravesarlo, sería divisible, pues en el momento en que estaba atravesando, ni estaba en reposo ni lo había recorrido, sino que estaba en medio”[390]. Argumento éste que bien nos recuerda el de la divisibilidad de Zenón: para que una cosa llegue a haberse movido (el “haberse movido” o “haber caminado a Tebas” de Aristóteles) es preciso que haya estado moviéndose (“el estar caminando a Tebas”). Para que una cosa llegue a A, es preciso que haya llegado a su mitad. Y, sin embargo, Aristóteles está lejos de concluir de ello la imposibilidad del movimiento sobre un fondo continuo.

Para ver la razón de ello tenemos que saltar al libro VIII. Aristóteles rechaza en él[391] la posibilidad de que se pueda hablar de que algo “ha estado” (γεγονέναι) o “ha dejado de estar” (ἀπογεγονέναι) cuando se trata del movimiento continuo. Ello se debe a que en caso contrario el movimiento consistiría en una sucesión de reposos: en el mismo punto B, el móvil A habrá, en distintos tiempos, estado y dejado de estar en B. Unas líneas más arriba[392], el mismo problema ha llevado a Aristóteles a distinguir entre estar en el ahora (ἐν τῷ νῦν) y estar en el tiempo (ἐν χρόνῳ)[393]. El problema consiste en que, sobre la base de la

[387] Cf. Phys. 231b19 y sig.
[388] Cf. Aristóteles [1996] p. 168. Nótese que la contradicción no se da, digamos, una vez, sino que es sucesiva o, como dice Aristóteles, el “al mismo tiempo” de la contradicción se da continuamente. Algo que para Hegel es la definición misma del movimiento.
[389] Cf. Aristóteles [1996] p. 167: “si lo que se mueve de un sitio a otro no puede, necesariamente, estar moviéndose y haberse movido simultáneamente hacia donde se movía en el momento en que se movía” (cf. Phys. 231b28-30: “εἰ δὴ ἀνάγκη τὸ κινούμενον ποθέν ποι μὴ ἅμα κινεῖσθαι καὶ κεκινῆσθαι οὗ ἐκινεῖτο ὅτε ἐκινεῖτο”). Aristóteles pone un ejemplo para mostrar lo absurdo de la tesis opuesta: la simultaneidad de estar caminando a Tebas y haber caminado a Tebas. Nótese que el punto (espacio) discreto de ahora es el camino entero.
[390] Cf. Aristóteles [1996] p. 168.
[391] Cf. Phys. 262a30 y sig.
[392] Cf. Phys. 262a27-30.
[393] La misma división es la que, con otro término para el primero, tiene lugar en Phys. 262b20-21 entre “estar en una división de tiempo” (ἐν τομῇ χρόνου, *al. Zeitschnitt*) y “estar en el tiempo” o “por un tiempo” (ἐν χρόνῳ, *al. Zeitabschnitt*). El que el primero es divisible lo muestra su uso: un cuerpo lanzado al aire está en reposo en el punto más alto G. Ello se debe a que el móvil habrá utilizado este punto como si fueran dos; una vez como el punto de llegada y otra vez como punto de partida. Es el sentido lo que hace del punto G un punto en acto. Del mismo modo, es la aceleración, algo que establece distinciones de sentido en la recta de movimiento, lo que hace imprescindible hablar de puntos de la recta o, más acertadamente, de cociente de diferenciales. El que en

indivisibilidad del espacio, la divisibilidad del tiempo hace del movimiento una suma de reposos. Cuando el móvil está en B no lo está en un tiempo sino que lo está en un ahora. De esta forma, se evita hablar de reposo en B. Para que esto no implique caer en la paradoja de la flecha, va a ser necesario introducir una dimensión potencial en estas divisiones espacio-temporales.

Y es que, ¿cómo compaginar el rechazo de Aristóteles a entender el movimiento sobre la base del ahora[394] y la afirmación de nuestro parágrafo anterior[395] según la cual el movimiento tiene lugar en un ahora[396]? es decir, ¿cómo hacer que algo que se mueve en un ahora no lo haga como lo hace la flecha de Zenón? Parece que la solución es afirmar que el móvil se mueve en este lugar y en este ahora pero sólo en parte. El ahora es ahora pero sólo provisionalmente; el punto es el punto pero sólo provisionalmente. Los dos, el ahora y el punto, son divisibles e indivisibles: son indivisibles hasta que no se demuestre lo contrario[397]. Y este "demostrar lo contrario" consiste en lo siguiente:

Supongamos[398] que tenemos dos móviles *A* y *B*, el primero de ellos con una velocidad mayor que el segundo. Imaginemos que el móvil A recorre en un tiempo indivisible *D* el espacio *G*. Luego en ese mismo tiempo *D* el móvil *B* habrá recorrido un espacio H menor que *G*. Lo que significa que *G* no era, en contra de lo que habíamos supuesto, indivisible. Pero hay más: para recorrer el espacio *H* el móvil A habrá utilizado el tiempo *I* menor que *D*, luego, en contra de lo que habíamos supuesto, tampoco *D* es indivisible. Lo que tenemos como resultado son dos pares de unidades de espacio-tiempo cada uno apropiado para describir el movimiento continuo de un móvil *A* (*B*) sobre el punto *G* (*H*) en el ahora *D* (*I*). El que el movimiento lo sea sobre la base de un continuo que es siempre divisible significa así que las unidades indivisibles de cada caso lo son sólo provisionalmente. Obtenemos de esta forma una distinción entre dos sentidos de decir indivisible; uno que lo es en potencia y otro

---

Aristóteles los puntos intermedios de una trayecto de A a B lo sean únicamente en potencia (cf. 262a20-24) es así solidaria de que en él no sea posible que haya el movimiento del movimiento, la acelaración: "οὐκ ἔστι κινήσεως κίνησις οὐδὲ γένεσεως γένεσις, οὐδ᾽ ὅλως μεταβολῆς μεταβολή" (en Phys. 225b14-15. Cf. la traducción en Aristóteles [1996] p. 145 "[...] no hay movimiento del movimiento ni generación de la generación, ni, en general, cambio del cambio"). El poder hablar de un momento de tiempo que no sea estrictamente igual al indivisible "ahora", permite a Aristóteles evitar la contradicción que consiste en afirmar que la cosa ha llegado a G y ha partido de G al mismo tiempo; si fuese así, la cosa estaría en G y, al mismo tiempo, no estaría en G.

394 Cf. por ejemplo Phys. 234a24-25: "οὐθὲν ἐν τῷ νῦν κινεῖται" (Aristóteles [1996] p. 175: "nada se mueve en el ahora").

395 Cf. Aristóteles [1996] p. 262: "[...] cuando [A] se translada continuamente [sobre B] está en B en el ahora" o Phys. 262a 27-30: "ὅταν δὲ συνεχῶς φέρηται [...] τὸ Α κατὰ τὸ Β [...] εἶναι ἐν τῷ νῦν".

396 O, también se podría decir, el que haya ahoras en el tiempo: "tal cosa [el ahora] se da en cualquier periódo de tiempo" (en Aristóteles [1996] p. 174) es decir, "ἐν ἅπαντι τὸ τοιοῦτο [τὸ νῦν] χρόνῳ ἐν υπάρχειν" (en Phys. 233b33-34).

397 El carácter provisional de cada "ahora" en cuestión que, como hemos visto, se debe a que divide provisionalmente, es decir, potencialmente el tiempo, es afirmado expícitamente por Aristóteles en Phys. 222a14: "[Τὸ νῦν] διαιρεῖ δὲ δυνάμει [τὸν χρόνον]. καὶ ᾗ μὲν τοιοῦτο, αἰεὶ ἕτερον τὸ νῦν" (cf. trad. en Aristóteles [1996] p. 132: "Y divide en potencia. Conque como tal es siempre diferente"). El que esto último sea interpretado como si dijera "al ser el tiempo siempre otro también lo será su límite", es rechazable por el hecho de que el ejemplo de esta siempre *otridad* que nos propone viene del ámbito de las matemáticas, es decir, un ámbito donde no hay, digamos, ese fluir: el punto de una recta es sucesivamente diferente. Es más, el carácter de límite y de unión del ahora da lugar a su identidad y no, como esta opinión defendería, a su diferencia (cf. Phys. 222a15).

398 Reproducimos en lo que sigue la refutación del movimiento en el "ahora" ofrecida por Aristóteles en Phys. 234a21 y sig. Para la traducción véase Aristóteles [1996] pp. 175 y sig. El argumento no es más que una variación de la paradoja del estadio.

que lo es en acto[399]. El grupo de las segundas paradojas, la que se basa en tiempos y espacios discretos, corresponde a esta segunda acepción de los indibisibles. Es decir, la afirmación unilateral de lo discreto significa que esos indibisibles no pueden serlo más. Era precisamente esta imposibilidad la que sostenía la segunda variante[400] de la paradoja. Afirmación unilateral equivaldría pues a indivisibilidad actual, absoluta. En este intento de resolución, Aristóteles pretende reconciliarse con ello con los dos polos: con la divisibilidad –por que el movimiento es continuo– y con lo discreto –por que este continuo lo es sólo en potencia y en esa medida "hay" indivisibles en el continuo. El ser *dynamis* de lo continuo es así la manera que tiene Aristóteles de *Aufheben*, de superar, la contradicción entre lo discreto y lo continuo[401].

Al mismo tiempo, este procedimiento del comienzo del libro VI muestra que el continuo es más una estructura que, por así decir, únicamente aparece cuando se relacionan tiempos con espacios y no tanto un propiedad del tiempo o del espacio considerados por sí mismos[402]. El continuo es un concepto como construcción y no meramente como suma de notas. La "transferencia" de la propiedad del continuo entre distintas modalidades de la magnitud es afirmada en abstracto en el libro VI:

---

[399] Solamente desde esta distinción se puede entender que en 233b 32- 234a 24 Aristóteles concluya el carácter constitutivo del tiempo por ahoras. Es decir, del mismo modo que el ἄπειρον puede decirse que es en δυνάμει o que es en ἐντελεχείᾳ, también el νῦν puede decirse de dos formas: en δυνάμει y en ἐντελεχείᾳ. Esta lectura que aquí estamos ofreciendo, aunque no está explícitamente expresada en Aristóteles, nos parece imprescindible para salvar la coherencia de las siguientes tres afirmaciones de Aristóteles: 1) El continuo no está constituido por partes indivisibles. 2) El tiempo (el espacio) es una magnitud continua. 3) En el tiempo (el espacio) hay indivisibles. Para esta última afirmación véanse Phys. 234a 22-23: "ἔστιν τι ἐν τῷ χρόνῳ ἀδιαίρετον, ὅ φαμεν εἶναι τὸ νῦν, δῆλόν ἐστιν..." (trad. en Aristóteles [1996] p. 175: "hay una parte indivisible en el tiempo, la que llamamos "ahora""). Cf. también Phys. 263a 12: "χρόνον ἄπειρα ἔχει ἐν αὑτῷ" (trad. en Aristóteles [1996] p. 263: "el tiempo contiene en sí mismo infinitas partes"). Veremos más adelante a favor de esta tesis que Aritóteles habla de que, en cierto sentido, el infinito potencial es actual: a saber, como el día. Este día es precisamente el indivisible discreto provisional que, si es necesario, se vuelve a descomponer en horas que, de este modo, llegan a ser actuales, lo mismo que estos que en potencia son divisibles, pueden llegar a dividirse a su vez efectivamente etc.

[400] No ya de lo discreto sino de lo "más" discreto.

[401] Del mismo modo, la *dynamis* (δύναμις) era a lo que recurría Platón para hacer que no resulte imposible (ἀδύνατος) el encuentro de los unilaterales Ser y No-Ser en los problemas de la alteridad y del movimiento. Cf. Sofista 247e: "τὰ ὄντα ὡς ἔστιν οὐκ ἄλλο τι πλὴν δύναμις" ("los seres no son otra cosa que *dynamis*"). En Aristóteles, la resolución del problema del "cambio" como μεταβολή es análoga a la del "cambio de lugar". Así, en Phys. 263b 9-264a 6 se estudia el problema del devenir o llegar a ser (γίγνομαι) para un objeto que pasa de tener la propiedad blanco a tener la propiedad de lo no-blanco. Aristóteles se pregunta por el estado del objeto en el "momento" mismo del llegar a ser. El poder preguntarse por este estado o, mejor dicho, el poder responder sin contradicción a esta pregunta implica la divisibilidad del tiempo. El objeto no es en ese momento blanco y no-blanco; pero tampoco ni blanco ni no-blanco, el objeto es en ese momento, divisible: una parte de él es blanca y otra parte de él no-blanca. De ahí que diga Wieland (en Wieland [1970] p. 309) que "die sich wandelnde *Sache selbst* nur *kontinuierlich* die Wandlung vollziehen zu lassen, so daß es während der Wandlung immer sowohl einen Teil gibt, der sich schon Verändert hat, als auch einen Teil, bei dem das nicht der Fall ist". Es decir, no es que la cosa sea en un momento blanca y no-blanca, ni que sea ni blanca ni no-blanca, sino que la continuidad afecta a la cosa misma que cambia de tal modo que en todo cambio una parte de ella no ha cambiado, mientras que otra parte de la cosa lo ha hecho: una parte es blanca y la otra no-blanca. O dicho con Aristóteles (en Phys. 234b 15-17): "ἀνάγκη οὖν τὸ μέν τι ἐν τούτῳ εἶναι, τὸ δ᾽ ἐν θατέρῳ τοῦ μεταβάλλοντος· οὔτε γὰρ ἐν ἀμφοτέροις οὔτ᾽ ἐν μηδετέρῳ δυνατόν" (trad. en Aristóteles [1996] p. 177: "necesariamente, entonces, una parte de lo que cambia estará en un extremo y otra en otro, pues no es posible que esté ni en ambos ni en ninguno").

[402] Es decir, "die Struktur der Kontinuität für Aristoteles erst dann relevant wird, wenn man (räumliche) Größen und Zeiten oder Größen und Bewegungen *aneinander* mißt" (en Wieland [1970] p. 282-283). Más aun, "Die aristotelische Kontinuitätsannahme gründet mithin in der Tatsache, daß es in der natürlichen Welt Bewegung gibt" (en Wieland [1970] p. 289).

Y es que si uno es divisible, lo serán todos[403]

Donde con “todos” y “uno” se refiere a los distintos divisibles mencionados en 235a 15-17, a saber: 1) χρόνος (tiempo) 2) κίνησις (movimiento) 3) κινεῖσθαι (el ser movido) 4) κινουμένος (el móvil) y 5) ἐν ᾧ ἡ κίνησις (aquello en donde el movimiento es). En donde este último incluye el espacio. La interdependencia es explícitamente formulada por Aristóteles en el libro IV para el caso del tiempo y el movimiento:

Y no sólo medimos el movimiento con el tiempo, sino también el tiempo con el movimiento por el hecho de que se delimitan recíprocamente. [404]

La primera afirmación se basa en la conclusión a la que ha llegado Aristóteles unas líneas más arriba:

el tiempo es número del movimiento conforme al antes y al después; y que es continuo, porque lo es de lo continuo[405]

Y, sin embargo, el tiempo no es número en el sentido de “aquello con lo que numeramos” (ᾧ ἀριθμοῦμεν), sino en el sentido de “lo numerado” (τὸ ἀριθμούμενον)[406]. Y ello, por dos razones. Primero por que si fuese “aquello con lo que numeramos” sería un uno indivisible[407]. Segundo por que el tiempo no sólo mide el movimiento sino que, a su vez, el movimiento mide el tiempo[408]. El que la unidad de tiempo sea dependiente del movimiento con el que lo hayamos delimitado hace que sea imposible decir que el tiempo es número en el sentido de “aquello con lo que numeramos”[409]. Ocurre lo contrario que con el contar caballos: al ser estos siempre el mismo al numerarlos, podemos hablar de un “aquello con lo que los numeramos”. Por ello, dice Aristóteles, el tiempo de antes y de después no es el mismo:

[...] el tiempo que hay simultáneamente en todas partes es el mismo, pero antes y después no es el mismo, porque también el cambio presente es uno, pero el que ha pasado y

---

[403] Cf. Aristóteles [1996] p. 179 y Phys. 235a35-36: “ἑνὸς γὰρ διαιρουμένου πάντα διαιρεθήσεται”.
[404] Cf. Aristóteles [1996] p. 129 (original en Phys. 220b14-16: “οὐ μόνον δὲ τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει τὸν χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὑπ᾽ ἀλλήλων·”).
[405] Cf. Aristóteles [1996] p. 128 (original en Phys. 220a24-25: “ὁ χρόνος ἀριθμός ἐστιν κινήσεως κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον”).
[406] Cf. Aristóteles [1996] p. 125 y Phys. 219b6-7.
[407] Es en este sentido de “número” en el que Aristóteles puede decir que el uno es también un número, a saber, el menor de todos. Sin embargo, en el sentido de “numerado” el número menor es el dos: “el número mínimo de una línea es el dos o el uno en cantidad” (en Aristóteles [1996] p. 128).
[408] En este sentido, podría decirse que el tiempo es aquello con lo que numeramos el movimiento y aquello numerado por el movimiento.
[409] A no ser que el movimiento que hayamos utilizado para ello sea siempre el mismo; p. e., el movimiento del paso de las estaciones: “en el sentido en que es posible que se dé una y otra vez uno y el mismo movimiento, en ese sentido es ello [a saber, que el tiempo pasado y el futuro no sean distintos] posible también con el tiempo: por ejemplo el año, [midiéndolo por] la primavera y el otoño”.

el futuro son distintos y (δὲ) el tiempo no es el número con el que numeramos, sino lo numerado [...] [410]

Todo lo cual se puede ilustar si observamos, por ejemplo, un reloj de agua de Ctesibo[411]. En él, es el tiempo que tarda el sol en atravesar el horizonte el que define una unidad de movimiento con el que se miden las partes del día[412]. Al no ser iguales los movimientos del sol en invierno y, por ejemplo, en primavera, tampoco lo serán los tiempos de entonces y de ahora. Una hora de invierno va más rápido que una de verano[413]. Claro que para poder afirmar esto hemos tenido que suponer una base igual desde donde comparar estos dos movimientos. Esta base, aquello que para los modernos marca el tiempo, es, por ejemplo, la velocidad de caída del agua, siempre igual sea verano, sea otoño. Para nosotros, lo que de entrada hay es el tiempo uniforme desde donde poder medir cualesquiera movimientos. En Aristóteles no hay tal reducción: dependiendo del tiempo del movimiento de cada caso obtenemos distintas unidades de movimiento con las que medir el tiempo.

En cualquier caso, lo relevante de todo ello para la problemática del continuo es que se haya puesto de manifiesto la necesidad de contar con una unidad para poder llegar a medirlo. Medir el continuo es hacerlo de alguna manera discreto. Medir es considerar la línea no ya como magnitud (μέγεθος) sino como pluralidad (πλῆθος)[414]: con respecto a la magnitud la recta no tiene un mínimo, con respecto a la pluralidad sí, a saber, "el dos o el uno"[415]. Lo continuo es así algo propio de la magnitud, y no de la pluralidad. Sin embargo, podría uno intentar aproximarse a la divisibilidad de la magnitud haciendo uso de una unidad menor que la previamente dada obteniendo así un mayor divisibilidad[416]. El que el intento sea un fracaso continuado es, sin embargo, su éxito[417]. Y ello debido a que la forma en la que la magnitud puede ser continua admite dos perspectivas distintas que se basan en los dos sentidos que hay de decir "infinito".

[410] Cf. Aristóteles [1996] p. 128. Se podría traducir la partícula δὲ por algo así como "y es que" con el fin de insinuar siquiera alguna conexión tipo fundamento-fundamentado y evitar que la última frase quede "descolgada" de la principal.

[411] Para el dibujo cf. Solis y Sellés [2005] p. 160.

[412] Un tiempo que medirá el movimiento que lo medirá todo: "[...] el tiempo [...] mide al movimiento por delimitar un determinado movimiento que lo medirá todo" (en Aristóteles [1996] p. 129 y Phys. 220b31-221a2). O también: "nos referimos a "mucho" o "poco" tiempo midiéndolo con el movimiento" (en Aristóteles [1996] p. 129 y Phys. 220b17-18: "καὶ λέγομεν πολὺν καὶ ὀλίγον χρόνον τῇ κινήσει μετροῦντες").

[413] De ahí que la hora no sea una unidad de tiempo sino, de acuerdo a la nota anterior, de movimiento: "es también evidente que del tiempo no se dice "rápido" y "lento" ". (en Aristóteles [1996]p. 128 y Phys. 220a32-220b1).

[414] Cf. Wieland [1970] p. 303: "Das Unbegrenzte kann man nur durchmessen, wenn man darauf verzichtet zu teilen und die Teilung zu zählen". Wieland parafrasea un pasaje de la Metafísica (994b23 y sig.) en donde *Das Unbebrenzte* en cuestión es una línea.

[415] La respuesta doble hace referencia a la distinción previamente introducida entre el número en cuanto "numerado" y el número en cuanto "aquello con lo que numeramos": en el primer respecto la respuesta es dos, en el segundo uno. Cf Aristóteles [1996] p. 128: "el número mínimo de una línea es el dos o el uno en cantidad (πλῆθος), pero en magnitud no existe mínimo porque toda línea se divide indefinidamente" (cf. el original en Phys. 220a27-29).

[416] El que de esta forma siempre esté asegurada la medición es algo que resulta del Axioma de Arquímedes encargado de definir las magnitudes finitas. Cf. Aristóteles [1996] p. 82: "[...] toda cantidad finita es agotada por una cantidad determinada cualquiera" (Phys. 206b10-11: "τὸ πᾶν πεπερασμένον ἀναιρεῖσθαι ὁτῳοῦν ὡρισμένῳ").

[417] Y es que, como dice Wieland (en Wieland [1970] p. 287) "das Schwergewicht liegt nicht auf dem Teil als solchen, sondern auf der Teilung".

Esto nos lleva directamente a la distinción aristotélica entre infinto por la divisibilidad (ἄπειρον κατὰ διαίρεσιν) y el infinito en relación a los extremos (ἄπειρον τοῖς ἐσχάτοις) de la que nos habla Aristóteles en 233a23-25[418]. Éstas son las dos formas que se tienen de decir que el continuo[419] es infinito. Pero es únicamente la primera de ellas, la infinitud por la divisibilidad, la manera en la que es infinita la continuidad[420]. Como se sabe, la distinción entre lo infinito por la divisibilidad y el infinito en relación a los extremos es la que permite a Aristóteles enfrentarse al argumento de la dicotomía: una extensión infinita es recorrible en un tiempo infinito si por por infinitud se entiende lo infinito por la divisibilidad. Aristóteles presentará una segunda variante de esta paradoja al final del último libro de la *Física*. En él[421] ya no se pregunta por la posibilidad de recorrer una infinitud de trechos de espacio, sino por la posibilidad de contar (ἀριθμέω) infintos tiempos. Es decir, cuando surge el problema de la infinitud en relación al tiempo mismo, esto es, cuando surge el problema de la infinitud del acto de contar[422], es cuando Aristóteles tiene que recurrir a la distinción entre infinito en potencia (δυνάμει) y en acto (ἐντελεχείᾳ)[423]:

Por consiguiente, a quien pregunte si es posible recorrer partes infinitas ya sea en el tiempo, ya en extensión, habrá que responderle que en un sentido es posible y en otro no[424]

Estos dos modos de responder a la pregunta dependen pues de los modos posibles en los que se puede decir que una cantidad es ilimitada o infinita: en δυνάμει o en ἐντελεχείᾳ· Si, como hemos dicho, al continuo le corresponde la infinitud en el primero de estos sentidos, debemos preguntarnos por su modo de ser: ¿puede ser algo que nunca[425] llegar a ser?. ¿qué significa que el infinito lo es en potencia?

En el tercer libro de la *Física* se discuten expresamente estas preguntas. En él[426], Aristóteles contrapone la forma de ser en potencia de una estatua a la forma de ser en potencia del día o de la competición. En el primer caso la actualización puede ser llevada a cabo, en el segundo caso el infinito consiste en el ser algo siempre otro y otro y otro etc.:

---

[418] Cf. Phys. 233a 24-26: " διχῶς γὰρ λέγεται καὶ τὸ μῆκος καὶ ὁ χρόνος ἄπειρον, καὶ ὅλως πᾶν τὸ συνεχές, ἤτοι κατὰ διαίρεσιν ἢ τοῖς ἐσχάτοις" y Aristóteles [1996] p. 172: "Y es que tanto la extensión como el tiempo se dicen "infinitos" en dos sentidos- y en general todo lo que es continuo: ya sea por la divisibilidad o en relación a los extremos".

[419] Y cuando dice continuo, dice el tiempo y la extensión (τὸ μῆκος).

[420] Aristóteles pasa así de hablar de fomas de decir sobre algo a formas de ser ese algo. Nótese que hemos extrapolado para el continuo lo que en el texto se argumenta para el tiempo.

[421] Cf. Phys. 263a17-21: "ἂν γάρ τις ἀφέμενος τοῦ μήκους καὶ τοῦ ἐρωτᾶν εἰ ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ ἐνδέχεται ἄπειρα διεξελθεῖν, πυνθάνηται ἐπ᾽ αὐτοῦ τοῦ χρόνου ταῦτα (ἔχει γὰρ ὁ χρόνος ἀπείρους διαιρέσεις), οὐκέτι ἱκανὴ ἔσται αὕτη ἡ λύσις" (trad. en Aristóteles [1996] p. 264: "Si se prescinde de la extensión y de preguntar si es posible recorrer partes infinitas en un tiempo finito, y se indaga esto sobre el tiempo mismo (pues el tiempo contiene infinitas divisiones), ya no será suficiente esta solución").

[422] Acto de contar que lo será de algún "sujeto": el término que utiliza Aristóteles para referirse a ese que va a ejercer de contador o sumador es el pronombre indefinido en nominativo femenino-masculino, τις. (263 a 23).

[423] Cf. Phys. 263a 29.

[424] Cf. Aristóteles [1996] p. 264. Otra posible traducción sería: "luego frente a los que preguntan si es posible (ἐνδέχεται) recorrer lo infinito o en el tiempo o en el trecho [respondemos] que en un modo (ὡς) si, en otro modo no".

[425] Y es que, recuérdese, el continuo es divisible en "elementos **siempre** divisibles" (en Aristóteles [1996] p. 167 y Phys. 231b16. Sub. nuestro).

[426] Cf. Phys. 206a9 y sig. y Aristóteles [1996] p. 81 y sig.

lo mismo que el día "es" y la competición "es" por el hecho de producirse sucesivamente un suceso y otro, así también acaecerá con lo infinito[427]

Es decir, no es que por un lado esté lo infinito como potencia y por el otro lado lo infinito como actualidad, sino que, más bien, la forma de ser en acto de la infinitud de, pongamos por caso, las magnitudes, la forma de ser en acto de la infinitud en potencia es como el del día y la noche[428]:

Sólo así, y no de otra manera, pues, existe lo infinito: en potencia y por disminución (aunque también lo es en actualidad en el sentido en que decimos que el día, o la competición, lo son)[429]

De este modo, parecería que Aritóteles corrige la afirmación de Phys. 204a20[430] en el que se dice que "no es posible que lo infinito exista como "siendo en actualidad"". El problema es así el de compaginar estas dos afirmaciones: una que afirma que el infinito es en actualidad –en el sentido en que el día lo es–, y otra que afirma que no es posible que el infinito sea en actualidad[431]. La infinita divisibilidad es en actualidad en cada estadio dividido lo mismo que el día es en actualidad hoy. Y sin embargo, la infinita divisibilidad, como la materia (ὕλη) [432], no es en potencia por sí misma (καθ᾽αὑτό):

Y es "en potencia" lo mismo que la materia, no "por sí mismo" como lo finito[433]

De ahí que, una infinitud en potencia que lo fuese por sí misma sería una infinitud en actualidad. El que no sea "por sí mismo" se debe a que lo es por algo otro, un algo[434] que no es otro que el entendimiento (νόησις)[435]. Por esta razón, en Aristóteles, el motivo de que algo

---

[427] Cf. Phy. 202a20-23: "ὥσπερ ἡ ἡμέρα ἔστι καὶ ὁ ἀγὼν τῷ ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο γίγνεσθαι, οὕτω καὶ τὸ ἄπειρον".

[428] Sólo así se puede entender la afirmación de la Metafísica 1049b5: "φανερὸν ὅτι πρότερον ἐνέργεια δυνάμεώς ἐστιν", primero en cuanto a la οὐσία. Es decir, "l'acte préexiste à la puissance comme révélateur de sa pontencialité" (en Aubenque [2002] p. 443).

[429] Cf. Aristóteles [1996] p. 82 y Phys. 206b12-14: "οὕτως δ᾽ ἔστι τὸ ἄπειρον, δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει (καὶ ἐντελεχείᾳ δὲ ἔστιν, ὡς τὴν ἡμέραν εἶναι λέγομεν καὶ τὸν ἀγῶνα)".

[430] El texto grigego dice "φανερὸν δὲ καὶ ὅτι οὐκ ἐνδέχεται εἶναι τὸ ἄπειρον ὡ ἐνεργείᾳ ὂν". Cf. para la traducción Aristóteles [1996] p. 75.

[431] Para esta tesis cf. también Met. 994b25: "καὶ ἀπείρῳ οὐδενὶ ἔστιν εἶναι".

[432] Es más, en Phys. 207b35 afirmará Aristóteles que lo infinito es "causa como materia" (ὡς ὕλη τὸ ἄπειρον αἴτιόν ἐστι"). Esto último es bien conocido para los encargados de crear los Generadores de los "verdaderos" Números aleatorios (los físicos, "materialistas" o generados por Hardweres) frente a los pseudo-números aleatorios formados por distintos algoritmos (los generados por softwares in-formáticos), tan en boga en la criptografía. La imposibilidad de conocer la materia (cf. Met. 1036a8: "ἡ δ᾽ ὕλη ἄγνωστος καθ᾽ αὑτήν") implica así la posibilidad de dar con una serie de números (absolutamente) azarosos. Sobre la distinción entre lo absolutamente azaroso, es decir, contingente en Kant y en Hegel, remitimos al lector a la nota 178.

[433] Cf. Aristóteles [1996] p. 82.

[434] Que es el mismo algo/alguien (τις) de la nota 422.

[435] Cf. Wieland [1970] p. 303: "Der unendlichen Teilbarkeit des Kontinuums entspricht ein Geist, der unbegrenzt teilen und zählen kann".

sea infinito en δυνάμει es que lo es tal en el entendimiento[436]. Es más, en tanto que su naturaleza es el numerar, sin el entendimiento del alma (ψυχὴ) no puede haber tiempo[437], con lo que tampoco puede haber ni movimiento ni lo numerado. Por ello, la infinita divisibilidad y con ello, el continuo, serán remitidos al entendimiento. Además de ello, si tenemos en cuenta que lo infinito es lo primero que se manifiesta en el continuo[438], parece probable que Arisóteles llegue a afirmar la efectividad del infinito en el pensamiento, de tal modo que el siguiente pasaje de la Metafísica[439],

τὸ δ ἄπειρον οὐχ οὕτω δυνάμει ἔστιν ὡς ἐνεργείᾳ ἐσόμενον χωριστόν, ἀλλὰ γνώσει

pueda traducirse con [440]

El infinito en potencia es como acto solamente en el pensamiento pero no separado

Con ello volvemos a tener una δύναμις que es en modo de ἐνέργεια. La razón de ello es que únicamente de esta forma nos es posible conocer lo infinito:

φανερὸν ὅτι τὰ δυνάμει ὄντα εἰς ἐνέργειαν ἀγόμενα εὑρίσκεται[441]

es decir,

Sólo llevando a la actualidad lo que esta en potencia se lo descubre.

De este modo, la contraposición entre la δύναμις y la ἐνέργεια no es, como acaso cabría esperar, absoluta[442]. La, por así decir, compenetración entre ellas era ya proclamada en

[436] Cf. Aristóteles [1996] p. 74: “por el hecho de no cesar en el pensamiento parecen ser infinitos tanto el número de las magnitudes matemáticas como lo de más allá del cielo” (original en Phys. 203b23-25).

[437] Cf. Phys. 223a25-28:” “εἰ δὲ μηδὲν ἄλλο πέφυκεν ἀριθμεῖν ἢ ψυχὴ καὶ ψυχῆς νοῦς,ἀδύνατον εἶναι χρόνον ψυχῆς μὴ οὔσης” (trad. en Aristóteles [1996] p. 136: “Y si no hay ninguna otra cosa, sino el alma y el entendimiento (νόησις) del alma, que tenga en su naturaleza el numerar, es imposible que en no habiendo alma haya tiempo”).

[438] Recuérdese la cita de Phys. 200b15-17: “δοκεῖ δ᾽ ἡ κίνησις εἶναι τῶν συνεχῶν, τὸ δ᾽ ἄπειρον ἐμφαίνεται πρῶτον ἐν τῷ συνεχε” (trad. en Aristóteles [1996] p. 63: “Parece que el movimiento pertenece a las cosas continuas y lo infinito es lo primero que se manifiesta en lo continuo”).

[439] Cf. Met. 1048b14.

[440] Seguimos así la propuesta de Wieland (en Wieland [1970] p. 298) y contraponemos ἀλλὰ γνώσει a ἐσόμενον χωριστόν, y no únicamente a ἐνεργείᾳ. Esta útlima propuesta es la de Ross (en Aristóteles [1966b] p. 252-253).

[441] Cf. Met. 1051a29.

[442] Cf. al respecto Met. 1048b15: “τὸ γὰρ μὴ ὑπολείπειν τὴν διαίρεσιν ἀποδίδωσι τὸ εἶναι δυνάμει ταύτην τὴν ἐνέργειαν, τὸ δὲ χωρίζεσθαι οὔ”, que se podría traducir como sigue: “el no cesar la división hace que esta actualidad sea en potencia, pero no que sea separada”.

la definición del movimiento aristotelíco[443]. En él[444], el movimiento se define como “el acto de lo que es en potencia, en cuanto tal”. Para comprender la clave de la definición aristotélica del movimiento, para comprender ese “en cuanto tal” (ᾗ τοιοῦτον), vamos a detenernos en un ejemplo que propone Aristóteles: el humor[445] del hombre está enfermo en potencia, pero la actualización del humor del hombre no es lo que constituye el enfermar, sino que es la actualización del humor del hombre en tanto que humor del hombre lo que define el movimiento denominado enfermedad. De lo contrario, nos dice Aristóteles, serían lo mismo enfermar y sanar, por que aquello que es actualizado, el humor, es en los dos casos lo mismo. Conforme a esto, podemos hacer uso de la fórmula para el movimiento y aplicarla sobre el movimiento denominado “enfermar”:

Enfermar es el acto[446] *de lo que es enfermable (el humor) en tanto que es enfermable (el humor como enfermable)*

De modo que hasta la primera parte de la definición, es decir sin el añadido de ᾗ τοιοῦτον, la definición de los movimientos de enfermar y de sanar coinciden:

Sanar es el acto de lo que es sanable (el humor) en tanto que es sanable (el humor como sanable).

Llegamos así a una definición del movimiento con el que podríamos intentar entender el movimiento que se convertirá en “El movimiento”[447]; hablamos del movimiento de lugar o φορά. En él, un móvil D se mueve de A a B sobre la base de un fondo continuo o infinitamente divisible. La actualización de su potencia podría consistir en que el móvil recorre todas las partes de su recorrido. Sin embargo esto implicaría que el móvil habría estado (γεγονέναι: perf. inf. act.) en las partes de su recorrido. Ya hemos visto más arriba[448] que Aristóteles rechaza tal posibilidad. Ahora no tenemos más que enlazar esta imposibilidad con la definición del movimiento. Para ello, debemos distinguir entre acto (ἐνέργεια) y actividad (πρᾶξις). El primero de ellos es expresado por verbos en perfecto, mientras que las

---

[443] Frente al acto puro divino, lo que caracteriza precisamente al movimiento (sublunar) es que “se caractérise par ce que la scolastique appellera la «composition» d’acte et de puissance” (en Aubenque [2002] p. 440).
[444] Cf. Phys. 201a10-11 y Phys. 201b4-5.
[445] Decimos humor como podríamos decir sangre, huesos, etc.
[446] Es en la definición del movimiento en donde se hace presente la imposibilidad de intercambiar ἐντελέχεια por ἐνέργεια. En efecto, si hacemos caso a la distinción del libro Θ de la Metafísica (cf. Met. 1047a30-32), el primer término significa algo así como “tenerse en el fin” mientras que el segundo tiende a, se dirige al primero (el συντείνω de Met. 1050a22: “διὸ καὶ τοὔνομα ἐνέργεια λέγεται κατὰ τὸ ἔργον, καὶ συντείνει πρὸς τὴν ἐντελέχειαν”). Como dirá Heidegger (en Heidegger [2002] p. 296), el ἐντελέχεια es *Fertigsein* de algo mientras que ἐνέργεια es su *Fertigwerden*. De este modo ἐνέργεια es el término que tiene Aristóteles para decir “devenir”. Por esto último es descartable la opinión de Ross (en Arisóteles [1936] p. 537) según el cual el movimiento sería “the *passage* from potentiality to actuallity”.
[447] Aunque bien es verdad que ya en Aristóteles la φορά es el movimiento por excelencia debido a que “es en la translación, entre los movimientos, en el que menos se aleja de su entidad aquello que se mueve” (en Aristóteles [1996] p. 258. Cf orig. en Phys. 261a20-21). Sin embargo, una cosa es priorizar un movimiento entre los demás y otra reducir los demás a un movimiento. Cf. al respecto Stallmach [1959] p. 215 y sig.
[448] Véase el comentario a Phys. 262a30 y sig.

actividades[449] son a la vez (ἅμα) ser (tema en presente) como haber sido (tema en perfecto). El movimiento, al distinguirse de la práxis, distingue en sí los momentos de moverse y haberse movido. Un móvil no se ha movido cuando se mueve ni se mueve si ya se ha movido. A diferencia de “vivir”, uno puede distinguir entre los momentos del moverse y del haberse movido del móvil. Hacer algo análogo con “vivir” supondría interrumpirla (παύω)[450]. Dentro de este esquema, el problema del movimiento local consiste en mantener la distinción entre el momento en el que se ha movido y el momento en el que se movió[451]. El hacer del punto sobre el que se mueve un móvil un fondo sobre el que éste se ha movido es hacer del movimiento del móvil una actividad: en el punto el móvil se ha movido y se mueve. Una conclusión tal acarrearía el derrumbe de la distinción aristotélica entre movimiento local y actividad por lo que el móvil no puede haberse movido por los puntos de la recta en Aristóteles, o al menos no lo ha hecho estrictamente. Un cuerpo que recorre una magnitud habrá recorrido una infinitud de partes por concurrencia (κατὰ συμβεβηκὸς), pero no estrictamente (ἁπλῶς):

el que se mueve continuamente ha recorrido partes infinitas por concurrencia, pero en sentido absoluto, no.[452]

De este modo, la potencia del cálculo infinitesimal se puede expresar haciendo uso de terminología aristotélica diciendo que hace de todo cambio y todo movimiento una práxis, es decir, que hace que el moverse del móvil sea igual a su haberse movido. Para ello, deberá hacer que el móvil que se mueve continuamente recorra las partes infinitas en sentido absoluto, es decir, será necesario que haga de los puntos intermedios por donde pasa unos puntos en ἐνέργεια[453]. Por todo ello, el cálculo hace del movimiento imperfecto terrestre uno que es análogo al movimiento inmóvil celeste. Para el movimiento de translación *infinitesimalizado*, haberse movido significa moverse. El cálculo hace así del movimiento sublunar uno que bien podría subsumirse bajo la definición del movimiento eterno y circular celeste.

---

[449] Los ejemplos de arisóteles son “ver”, “pensar” y “vivir”. Cf. Met. 1048b20 y sig.
[450] Cf. Met. 1048b25: “εἰ δὲ μή, ἔδει ἄν ποτε παύεσθαι”.
[451] Haciendo así que, frente a la práxis, el movimiento sea algo imperfecto.
[452] Cf. Aristóteles [1996] p. 264 y Phys. 263b5-6.
[453] Pero para ello habrá que redefinir, entre otras cosas, la noción de punto.

3. CAPÍTULO

EL LUGAR DEL DIFERENCIAL EN LA *WISSENSCHAFT DER LOGIK*

En este capítulo concluiremos la odisea que habíamos iniciado en el primer capítulo de la tesis, cuando nos habíamos propuesto seguir el proceso de mediación lógica que llegaba hasta el coeficiente de diferenciales. La importancia de acometer un viaje tal se debía al carácter de génesis que era propio del discurso hegeliano. Esto último hacía imposible entrar *in medias res* en el movimiento de la *Wissenschaft der Logik* sin violentar y tergiversar la tarea que acometía Hegel. De este modo, atender al contenido de un concepto resultaba tan importante como mostrar su origen. Y esto último, a saber, mostrar su origen, era lo mismo en Hegel que deducirlo. Esta empresa demostrativa no dependía sólo del pasado, sino que apuntaba, a su vez, hacia el futuro. El fín del movimiento de la *Wissenschaft der Logik* era inmanente al movimiento mismo. Y esto, no porque hubiese un programa que se dirigiera a la ejecucción de un fín, sino porque el programa mismo era ya el fin: el camino se hacía y, por lo tanto, era el andar. El absoluto era ya el comienzo. Este segundo aspecto de la lógica de Hegel, la marca, digamos, prospectiva de la *Wissenschaft der Logik* es aquello con lo que nos ocuparemos, dentro de los marcos que permite una tesis, en el capítulo 5.

Tal y como se hizo en el primer capítulo, volveremos a ilustrar el contenido puramente conceptual del desarrollo con referencias a Kant en aquellos casos en los que consideremos que hay una comunidad temática relevante. De este modo intentaremos mostrar las diferencias entre Kant y Hegel a la hora de tratar el problema de las magnitudes extensivas e intensivas. El primero de estos diálogos nos llevará a enfrentarnos con el problema de la noción de número en Hegel, acercándonos, con ello, a la problemática del continuo –en el sentido habitual del término– en Hegel. Además de ello, con motivo del apartado dedicado al concepto de relación cuantitativa, nos ocuparemos del instrumento principal con el que Euler, por un lado, y Lagrange, por el otro, acometen la tarea de obtener la derivada de una función. Nos referimos a la serie de potencias. La importancia que tiene esta serie en la interpretación del cálculo infinitesimal de Hegel no puede ser exagerada. Esta es la razón por la que nos volveremos a encontrar con ésta en el siguiente apartado.

Cerraremos el capítulo con una rápida digresión en la que intentaremos mostrar la afinidad entre la noción moderna de estructura y la relación cuantitativa de la *Wissenschaft der Logik* –figura a la que llega Hegel al final de la categoría de la Cantidad. Para ello, será necesario mostrar que aquello que define la noción de estructura, a saber, la noción de isomorfismo entre dos realizaciones distintas de la misma, puede tambíen estar involucrado en la noción de relación cuantitativa. La puesta en marcha de esta tesis tendrá lugar en aquel lugar de la *Wissenschaft der Logik* en el que opera la relación cuantitativa: la categoría de la

Medida. Esto hará posible que en el capítulo 5 podamos leer conjuntamente[454] partes del primer tomo del *Das Kapital* de Marx con el último capítulo del primer tomo de la *Wissenschaft der Logik* de Hegel.

Volviendo a este tercer capítulo, comenzaremos por concluir aquello que quedaba pendiente al final del primer capítulo. Del mismo modo en que la Cualidad terminaba por determinarse en la figura del Ser-ahi, la Cantidad tendrá una figura determinada en el Cuanto. La diferencia entre estas dos determinaciones estriba en que, como veremos, en el segundo caso la determinación le es indiferente al Algo, mientras no se trate de una determinación que tenga ver con la medida, al Algo le es indiferente el tener un Cuanto u otro Cuanto. Esta negación de la Cantidad, la Cantidad determinada o el Cuanto, será así la perdición de la Cantidad. Con ello, tendremos que un fracaso interno a la Categoría será el que de lugar a su negación o, en la medida en que la negación lo es de algo mediado, negación de la negación.

3.1 LA LIMITACIÓN DE LA CANTIDAD: EL CUANTO (*Quantum*)

La limitación de la Cantidad[455], el que la Cantidad tenga inherente un límite, va a ser la perdición de la Cantidad misma. Antes de ver de qué modo tiene esto lugar, observemos el paralelo de este momento de la *Wissenschaft der Logik* con el momento previamente analizado bajo la categoría de la Cualidad. La analogía consiste en que, del mismo modo que la negación o limitación del Ser era, en la Cualidad, el Ser-ahí, ahora, la limitación o primera negación de la Cantidad será el Cuanto. A su vez veremos que la dialéctica en la que esta negación derivará tiene la forma del proceso al infinito o mala[456] infinitud. La mala infinitud será ahora, a diferencia de la mala infinitud cualitativa, una infinitud cuantitativa. La superación de esta contradicción, es decir, la negación de la negación o momento especulativo de esta categoría, vendrá dada, a su vez, por un Ser-para-sí particular. El Ser-para-si que tiene lugar bajo la categoría de la Cantidad es el Ser-para-uno o la Relación Cuantitativa (*Das quantitative Verhältnis*). Una vez llegados a este punto, estaremos en disposición de comprender la noción de la Medida o, dicho en terminología moderna, la noción de estructura. Pero vayamos por partes.

Comencemos por ver cómo tiene lugar la limitación de la Cantidad en la *Wissenschaft der Logik*. Habíamos visto ya que la Discreción y la Continuidad eran dos aspectos bajo los que se podía considerar la Cantidad. Obteníamos así uno u otro aspecto de la Cantidad dependiendo de si era la Continuidad aquello que era únicamente en sí y había que poner la Discreción o era lo contrario lo que ocurría: la Discreción era lo inmediato o lo en sí y, de ahí, se pasaba a poner la Continuidad[457]. En el primer caso, el algo cuantitativo era considerado

[454] Siempre, claro está, dentro de los límites en los que se mueve nuestro tema.

[455] La terminología del que hace uso Hegel ahora se distancia de la de Kant y es, en cierto sentido, una inversión de la misma. Si para el primero el *quantum* es la limitación o negación de la *quantitas*, para el segundo el *quantum* es la condición de posibilidad de que tenga lugar, mediante la sucesiva síntesis en la intuición, la producción de la *quantitas*. El *quantum* es, en Kant, lo *Größhafte* (lo *magnificable*). Cf. al respecto Heidegger [1984] pp. 198 y 199. Teniendo esto en cuenta, podríamos decir que el *quantum* kantiano se aproxima a la función que cumple en Hegel la *quantitas*. A su vez, el *quantum* hegeliano, el que algo tenga una determinada magnitud, es lo que se expresa en Kant con el predicado de "tener una *quantitas*".

[456] El profesor P. Stekeler-Withofer hace notar que en el alemán contemporáneo a Hegel *schlecht* conservaba aún el significado de *schlicht* o *schlechtweg* y que esto hablaría a favor de interpretar esta infinitud como aquella que es inmediata. Esto encaja con el hecho de que el infinito verdadero o de veras sea el infinito resultado de una mediación. Cf. Stekeler-Weithofer [1992] p. 221.

[457] Cf. Hegel [1985] p. 190.

bajo el aspecto de la Continuidad mientras que en el segundo caso el algo cuantitativo era considerado bajo el aspecto de la Discreción. El hecho de que partiendo de uno de los dos aspectos terminaba uno poniendo el otro aspecto era algo cuya posibilidad era necesaria, interna, a la cosa. Esto significa que, en el caso de tomar la Continuidad como lo inmediato, el aspecto Continuo tenía en sí el principio de la Discreción. Lo mismo ocurría, *mutatis mutandis*, si lo que se tomaba como inmediato era la Discreción. Recordemos que la Discreción tenía como principio el Uno (*das Eins*), mientras que el principio de la Continuidad era la Unidad (*die Einheit*). Pues bien, el Cuanto (*Quantum*) consitirá en poner tal diferencia entre lo Discreto y lo Continuo superando con ello la Diferencia que es únicamente presente en sí en el traspaso recíproco de los aspectos Discreto y Continuo de la Cantidad[458]. Esto tiene lugar como sigue: la Discreción que, digamoslo así, ha realizado el viaje de ida, es una Discreción cuyo principio, el Uno, no lo es como algo inmediato, sino como superación del principio de la Continuidad, es decir, como superación de la Unidad. Del mismo modo, la Unidad de la Continuidad no inmediata será una unidad que tiene a sus espaldas la superación del principio del Uno. Viendo el movimiento, el retorno, desde la dirección descrita en primer lugar, tendremos que el Uno es la negación de la Unidad. El Uno es, de este modo, límite de la Unidad. A su vez la Continuidad constituirá aquello que ha sido limitado. El Uno que es límite de la Unidad es lo que Hegel llamará el Cuanto. Podríamos haber obtenido el mismo resultado si el movimiento fuese contemplado desde la segunda de las direciones[459]. En este caso obtendremos una Unidad que ha dejado atrás el Uno o el límite. La continuidad es así un ir sobre sí el Uno o un ir sobre el límite[460]. A su vez, contemplando todo el movimiento en su totalidad, tenemos que el Uno que se refiere a la Unidad, al ser esta Unidad resultado de la superación del Uno, se refiere a sí mismo. De este modo el Uno no solamente limita, sino que, en su limitar, circunda (*umschlißen*). Visto desde la Unidad, el más allá en el que aterriza en su huida, no resulta ser más que ella misma, la Unidad. El Cuanto entra así en un proceso al infinito que, como veremos, Hegel denominará la mala infinitud cuantitativa.

Hemos obtenido como resultado de ello no ya la Cantidad sino una Cantidad, a saber, la Cantidad limitada o el Cuanto. Esto último equivale, como decíamos, al movimiento en el que pasábamos mediante la negación del Ser al Ser-ahí. La diferencia con respecto al límite de la Cualidad consiste en que[461], en la Cantidad, el límite no será algo distinto a lo limitado. Ello se debe a que lo circundado por el Uno *son*, en última instancia, también Uno. Pero, visto desde la continuidad, decir esto es lo mismo que decir que, en la Cantidad, el límite es, en cuanto tal, algo indiferente: si el contenido no se distingue de lo que hay fuera de él, entonces, el continente es algo indiferente o arbitrario.

---

[458] Cf. *Enz.* § 101 Zus (Hegel [VIII] p. 214). No se trata ya del paso de A a B o de B a A, sino del movimiento completo que se cierra en sí.

[459] Algo que Hegel mismo no hace en las dos ediciones de la *Lehre vom Sein*.

[460] Cf. Hegel [1978] p. 123: "ist das Sein, das begrenzt ist, wesentlich hier als Kontinuität, die über die Grenze und dieses Eins hinausgeht".

[461] Una diferencia que, para ser justos, sólo tiene lugar si comparamos el límite tal y como es para la Cualidad en su inmediatez con el límite tal y como es para la Cantidad en su inmediatez. Esta diferencia se borra cuando consideramos el límite de la Cualidad, no ya, en el punto de partida, sino, en el punto de llegada del límite en la Cualidad. En efecto, el resultado del límite de la Cualidad era que "das Etwas sein Dasein nur in der Grenze hat" (Hegel [1985] p. 115).

3.1.1 El Número

El Número (*Die Zahl*) es el Cuanto en el que el límite no es ya abstracto sino que tiene una determinación concreta: la determinación de la pluralidad. Este volverse más concreto una determinación es, en el lenguaje de Hegel, volverse algo más perfecto. De ahí que considere Hegel que el Número es el Cuanto con una perfecta determinidad[462]. Esta *concretización* no puede, sin embargo, adquirir cualquier contenido o dirección, sino que tiene que ir en la dirección que le ha sido marcado por el Cuanto. Recordemos en este punto que 1) el Uno que ejercía como límite estaba, en la medida en que las Unidades que él limitaba eran Unos superados, referido a sí, que 2) esto implicaba que el Uno circundaba a una pluralidad de Unos que tienen la misma Unidad y 3), que este Uno, a la vez que circundaba, excluía fuera de sí a otros Unos. Pues bien, en el Número la misma pluralidad es el límite. Esto significa que cada uno de los muchos Uno de la pluralidad puede ejercer de límite de la su pluralidad[463]. Tenemos así un límite que tiene su determinación en los muchos Uno. Con ello se cumple la dirección marcada por el primero de los puntos: el Uno no es que únicamente se refiera a sí en su referirse a los muchos Uno, sino que los muchos Uno, cada uno por su cuenta, quedan referidos a los restantes Uno en su papel de ser en cada caso límite. Con ello tendremos un límite que no se encuentra frente a los Unos[464]. A su vez, si cualquiera de los Uno puede ejercer de límite, será por que cada uno puede llegar a circundar a los demás. El punto 2) también se perfecciona. Por último, si el poner el límite en los muchos Uno ha supuesto hacerlo diferente de la Unidad[465], entonces el papel de hacer de límite del Uno frente a la Unidad exterior se acentúa. Con ello se camina también en la dirección marcada por el punto 3).

Pues bien, a la pluralidad de Unos como momento constitutivo del Número lo llamará Hegel el Valor numérico (*Anzahl*). El Valor numérico es el representante de la Discreción en la esfera del Número. A su vez, el representante de la Continuidad segirá llamándose Unidad. Que el Número tenga como sus momentos el Valor numérico y la Unidad significa que el Número no es ni el Valor númerico ni la Unidad, sino la Unidad de ambos: el Número es la Unidad de la Unidad y el Valor numérico. Como resultado de la recíproca remisión de la Continuidad y la Discreción, la Unidad y el Valor numérico del Número podrán ser también mutuamente intercambiables. Así podemos concebir el número 6 como formado por la regla, "tres veces la unidad dos", o por esta otra "dos veces la unidad tres". El hecho de que podemos tomar una pluralidad como unidad –el dos en la primera regla y el tres en la segunda–, ha dado lugar a sistemas numéricos posicionales en los que la base del sistema hace las veces de una pluralidad que es tomada como unidad. Esta base no será identificada mediante la asignación de una cifra, sino mediante la posición[466]. En la base, se da una unión entre la Unidad y el Valor numérico: diez es tanto Unidad[467] como Valor numérico.

[462] Cf. Hegel [1978] p. 145, Hegel [1985] p. 194 y *Enz.* § 102 (Hegel [VIII] p. 214 y sigs).

[463] La Idea es bien sencilla. Se trata de ver que en un Número cualquiera, pongamos el 9, el elemento que se coloque en la novena posición y cierre –límite– así el Número 9 puede ser, en principio, cualquiera de los unos contados.

[464] Cf. Hegel [1985] p. 194: "Aber diese [die Grenze] ist nicht gegen sie [die Eins]".

[465] Cf. Hegel [1985] p. 194: "Das vollständige Gesetztsein liegt in dem Dasein der Grenze als Vielheit und damit ihrem Unterschiedensein von der Einheit".

[466] Así, en el sistema decimal con base diez, la representación del número diez no hace uso de una cífra propia sino de dos cifras previamente definidas, el 1 y el 0. Así, que el sistema sea posicional significa que el significado de las cifras depende del lugar que ocupen. Por este motivo, el significado del "uno" es distinto en 10 que en 21. Vemos con ello que el sistema numérico posicional necesita del cero como marca que indique la ausencia o el no darse del llenado, una marca que indica, no ya, cuánto de lleno está algo sino que marca el lugar –la posición– mismo que podría haber estado lleno.

[467] En el sistema decimal.

Veíamos al final del parágrafo anterior que en virtud de la continuidad el Uno de la Discreción era desbordado en su tarea limitadora. Esto lo resumíamos diciendo que el límite era algo arbitrario o indiferente al Cuanto. Ahora, en el Número, estra contradicción[468] se expresa de esta manera: tener un límite en general no le es indiferente al Cuanto[469] pero sí el tener este límite u otro límite[470]. Esta arbitrariedad del límite, digamos, particular, es resultado en cada caso, dice Hegel, de la reflexión exterior[471]. El número es lo absolutamente determinado, lo que no admite margen de duda en su determinación[472], lo que está determinado en sí mismo[473] y aquello cuya determinación es algo completamente exterior[474]. El desarrollo de esta contradicción es lo que tiene lugar en las futuras determinaciones del Cuanto:

Dieser Widerspruch der Zahl oder des Quantums überhaupt in sich ist die Qualität des Quantums, in deren weiteren Bestimmungen sich dieser Widerspruch entwickelt[475]

3.1.1.1 Sobre la diferencia entre el concepto de Número en Hegel y Kant

Cuando en el parágrafo anterior hemos hablado de “número”, se ha podido pensar que estábamos queriendo decir “número natural”. Si esto fuese así, Hegel habría pasado abruptamente del parágrafo sobre el Cuanto al parágrafo sobre el Número perdiendo en el camino algo específico de la Cantidad en cuanto tal, a saber, su traducibilidad en términos de los números reales. Toda la complejidad de la recta real se habría perdido y nos quedaríamos, siempre en el supuesto de que esto fuera así, con el burdo sustituto de los números naturales. Es más, no habría inconveniente alguno para pasar a considerar todo el tercer apartado, el apartado de la Cantidad, como un ensayo sobre la Cantidad en cuanto que es expresable en números naturales. En efecto, era el equilibrio entre la atracción y la repulsión de los muchos unos, el Ser-para-sí de ellos, lo que había dado lugar a la Cantidad. De este modo, al estar el Uno en el origen mismo de la Cantidad, no podría evitar pensarse que a lo que Hegel se refiere cuando habla de Cantidad es, como hemos dicho, la Cantidad, digamos, natural.

Debido a la brutal poda que esto supondría para la *Wissenschaft der Logik*, consideramos que resulta importante defender una lectura alternativa que logre evitar esta empobrecedora restricción. La lectura que proponemos empieza por hacer notar que todo

---

[468] “Contradición” en la segunda edición. En la primera Hegel llama a esto “Infinitud” (*Unendlichkeit*). Cf. Hegel [1985] p. 195 y Hegel [1978] p. 127.
[469] El límite es la expresión del momento de la Discreción en el Cuanto y, como tal, es esencial en la constitución del Cuanto. Cf. Hegel [1978] p. 126: “ist die Quantität selbst nicht gleichgültig gegen die Grenze; sie hat an ihr selbst die Grenze in ihrem Moment der Diskretion”.
[470] Cf. Hegel [1985] p. 193: “Die Quantität ist als das aufgehobene Fürsichsein schon an und für sich selbst gegen ihre Grenze gleichgültig. Aber damit ist ihr ebenso, die Grenze oder ein Quantum zu sein, nicht gleichgültig”.
[471] Es decir, de cualquiera que haga uso del número para contar o medir tal o cual cosa. Sobre el distinto papel de la reflexión en la *Lehre vom Sein* y en la *Die Lehre vom Wesen* cf. Duque [1998] p. 624 nota 1490.
[472] A diferencia de lo empírico que siempre será 2.3±0.1 o 2,316±0.002 etc., dependiendo del margen de error del instrumento de medida utilizado.
[473] Por que, recordemos, tiene el límite en sí.
[474] Y no en otro algo –y menos en una cosa. En este caso el límite no sería ya arbitrario.
[475] Cf. Hegel [1985] p. 195.

número racional con decimal finito[476] es traducible a un Valor numérico de una pluralidad de Unidades representado sobre la base de una pluralidad de Unos cuyo número es igual a 10^n, donde n expresa el número de posiciones necesarias para expresar ese número[477]. Por ejemplo, para expresar el número 20.67 necesitamos 10000 Unidades que tienen, en relación al Uno “natural”[478], una relación como de 10000 a 1. El número 20.67 vendría a ser expresado por un conjunto (*Menge*) de 2067 Unos de los así definidos[479]. Tendremos con ello que un número no entero es definible como un Valor númerico de Unos. Recordemos que esto era algo que, en principio, sólo parecía ser posible para los números enteros. Frente a ello, la lectura que defendemos permite considerar el razonamiento de Hegel con un radio de acción mucho más amplio[480].

Una vez sentado esto, va a resultar neceario pasar a explicar brevemente la noción kantiana de número para, de ahí, poder entender mejor en qué consiste la postura de Hegel. La comprensión del número en Kant exigirá entrar en la discusión de si el juicio 5+7=12, por seguir el ejemplo de Kant, es analítico o sintético a priori.

Comencemos por esta última cuestión[481]. Para ello empezaremos recordando el par de opuestos cartesianos de lo claro/obscuro y lo distinto/confuso. Como se sabe[482], esta distinción es heredera[483] de la distinción griega entre la cuestión del ὅτι ἐστιν (si algo es) y la cuestión del τί ἐστιν (qué es ese algo), respectivamente. Así, decimos que algo es claro cuando no es posible dudar de su existencia. A su vez, decimos de algo que es distinto cuando es posible diferenciarlo mediante un conjunto de notas frente a otros algo.

Una vez asumida esta distinción, pasemos ahora a considerar este otro problema. Desde un punto de vista exclusivamente lógico[484], no hay forma de explicar la diferencia que puede haber entre un Uno y otro Uno de los cuales decimos que son dos. La diferencia entre un Uno

[476] El caso de los números transcendentes y de los racionales con decimal infinito como, por ejemplo, 1/3, es más complejo. La incorporación de estos casos al esquema de los unos hegeliano tendría que suponer una pasta homogénera de Unos que estuviese, en esto consiste la diferencia, absolutamente parcelizado en Unos. Es decir, habría que suponer que los muchos Unos son infinitos no ya en potencia, sino presentes (*Gegenwartig*) o *in actu*. Sólo así podría la razón incorporar bajo su dominio a esta clase de números. Como veremos cuando lleguemos a Kant, el problema de afirmar una infinitud tal consiste en que dependiendo de la unidad alcanzada tendríamos mayores o menores Infinitos. El sujeto de este posible objeto de conocimiento sería un sujeto absoluto, infinito él mismo, no afectado por la limitación de tener el tiempo como su forma del sentido interno. Sobra decir que este posible objeto de conocimiento sería un imposible objeto de conocimiento para Kant. Sólo desde Hegel, sólo desde una ontología de cuyo seno el tiempo ha sido desterrado, puede defenderse un tal sujeto absoluto y un tal posible objeto de conocimiento. Haciendo uso *naivmente* de la terminología del Idealismo, podríamos decir que *en sí* existe el *monas* que hace de Unidad de, por ejemplo, 1/3, pero que esta infinitud no es alcanzable mediante el proceso al infinito o la mala infinitud –por que con esto sólo tendríamos 0.33 o 0.333 etc.– sino mediante aquello que es su superación : la relación cuantitativa –en nuestro caso, la expresión 1/3–. Hay que utilizar por ello formas de *deixis* que no se basen en la notación meramente cuantitativa. Volveremos sobre este punto en el parágrafo 3.2. dedicado a la relación cuantitativa.

[477] Por ejemplo, para expresar 2 necesitamos una posición, para expresar 21.3 tres posiciones etc.

[478] Es decir, en relación a la Unidad con respecto al cual se ha definido el número 20. 67.

[479] De hecho, considerar al número 20.67 como un Monto o Valor numérico de 2067 Unos es algo que implícitamente suponemos cada vez que lo sumamos con otro número.

[480] Teniendo en cuenta que el conjunto de los números irracionales tiene una mayor cardinalidad que el de los números racionales, podemos decir que este radio de acción se podría verse ampliado infinitamente si aceptáramos las tesis *absolutistas* presentadas en la nota 476.

[481] Seguimos en lo que sigue el trabajo del profesor Juan Jesús Rodríguez Fraile (en Rodríguez Fraile [2002] pp. 1-10)

[482] Cf. Marzoa [1991] pp. 34 y 35.

[483] Dicho brevemente, la distinción entre la postura moderna y la griega consiste en que mientras que la primera localiza la distinción en la mente, la segunda lo hace en la cosa.

[484] “lógico” en el sentido dado a esta palabra por Kant.

y otro Uno no es lógicamente explicable[485]. Ante este problema de inexplicabilidad, el filósofo que se mantiene dentro de la órbita extrictamente lógica tendrá que negar tal diferencia, aquello que le era inexplicable. Esto lo podrá hacer o bien negando la diferencia simple y llanamente, o bien, diciendo que todo lo que hay es diferencia. Es decir, puede decir que esas dos cosas no son en verdad dos sino una sola y misma cosa. Pero puede también decir que esas dos cosas no son una cosa, no tienen ninguna mismidad, porque son absolutamente dos, absolutamente discernibles. Como vemos, estas dos posturas absolutizan un polo de la problemática expresión: dos uno. Los primeros dicen que no hay dos sino solo Uno. Los segundos afirman que sólo hay dos, absolutamente distintos *de iure*, no Uno. Los primeros que lo que se nos aparece como dos es, en verdad, Uno. El primer ámbito de discusión es el del "si es" (el enunciado del problema afirma que han sido dos veces uno, el filósofo intenta resolver la situación diciendo que ha habido solo un Uno). En el segundo caso la discusión se juega en el terreno del "qué es": unos afirman que las dos cosas tienen un mismo qué y por eso son, las dos, un Uno. Los filosofos afirman que esto no tiene ni pies ni cabeza -dos que son, al mismo tiempo, Uno- y que si analizamos bien -es decir, en sí- nos daremos cuenta que hay una nota que termine distinguiendo a las dos Unos absolutamente con lo que serán única y exclusivamente dos.

La posición de Kant es, de alguna forma, heredera de estas dos respuestas dadas al problema. Recordemos que unos afirmaban que frente a la aparencia de dos como uno, tiene que poder llegar a aparecer como dos, porque sino no serían dos sino, única y exclusivamente, Uno[486]. Las dos posturas filosóficas que hacían frente al problema de la identidad en las expresiones como "dos unos", coincidían en el hecho de considerar la apariencia como algo que es *de facto*. Esto significaba que esta apariencia era, en principio, eliminable. Si se consideraba que lo que ocurría en "dos unos" era que dos se nos aparecían como uno (identidad aparente) entonces es que tienen que poder ser aparecibles como dos[487]. Si, por el contrario, se consideraba que en "dos unos" lo que se estaba diciendo era que uno aparece como dos, entonces se decía que tienen que poder ser aparecibles como uno[488]. Frente a esto, la postura de Kant es considerar la apariencia como algo que es *de iure*. Con este movimiento consigue Kant evitar el absolutismo, o, si se prefiere, hace de la apariencia lo absoluto[489]. Con ello, Kant consigue quedarse con la Diferencia y con la Identidad, sin tener que limitarse a la Diferencia absoluta o a la Identidad absoluta.

Así, las cosas no es que sean en sí mismas absolutamente distintas y a nosotros se nos muestran como más o menos confusas. Eso absolutamente distinto, diría Kant, se nos aparece *de iure* confuso. Esto es lo que permite, mediante un proceso de abstracción, borrar las diferencias que impedían hablar de identidades lógicas universales. Esto en lo que se refiere al plano del τί ἐστιν.

---

[485] Como tampoco lo es la diferencia entre un talero y otro talero, entre un esto y otro esto, etc.

[486] Cf. Rodríguez Fraile [2002] p. 3: "cualquier *identidad o diferencia lógica aparente* que nosotros establezcamos entre las cosas acabará resultando, llevada al terreno de las cosas tal y como son *en sí mismas*, una atribución lógicamente contradictoria, puesto que a medida que se desarrolle nuestra representación y avancemos en su análisis ha de llegar un momento en el que podamos hacer ver que eso que hemos presentado como *aparentemente idéntico*, puede presentarse al mismo tiempo y en el mismo sentido (a saber en el momento y en el sentido de su *aparecer*) como diferente, como *aparentemente diferente*, puede hacérselo aparecer desde cierto punto de vista desde el cual aparezca como diferente, puesto que en caso contrario no se trataría de cosas *singularmente* distintas, de cosas *en sí mismas* diferentes, sino que se trataría de *lo mismo*, en cuyo caso tampoco se trataría de cosas *aparentemente idénticas*, de "dos" cosas aparentemente idénticas, sino de la misma cosa *aparentemente diferente*, de una misma y sola cosa que nos habría parecido, a *nosotros* ser "dos"".

[487] Por que, de lo contrario serían uno, no dos.

[488] Por que, de lo contrarío serían dos, no uno.

[489] Cf. Marzoa [1976] p. 102: "en el sentido en que Engels parece manejar esta expresión [a saber, como "posible objeto de conocimiento"], la alizarina siempre ha sido y será una «cosa en sí», es decir: un fenómeno".

En relación al ὅτι ἐστιν ocurre algo análogo. Negar las posiciones absolutistas implica defender que el modo oscuro en el que se nos presentas las cosas no esconde un más allá en el que las cosas nos sean absolutamente claras. Las cosas, tal y como se nos presentan, se nos presentan *de iure* oscuramente. Esto quiere decir que frente a la identidad absoluta de una cosa consigo misma y de otra también consigo misma etc., frente a esto que hace que toda cosa sea igual a toda otra, siempre vemos una diferencia consistene en que una se da ahora y otra después. Esta diferencia no lógica tiene, en Kant, el nombre de intuición pura o tiempo.

Una vez asumido esto, podemos entender qué quiere decir Kant cuando dice que el juicio “7+5=12” es sintético a priori. El carácter de sintético responde al hecho de que la diferencia entre los Unos a contar no es algo lógico, algo regido por el Principio de no contradicicón, sino que hay que recurrir a algo que se encuentra más allá de lo lógico. El juicio es, sin embargo, un juicio a priori por que a eso a lo que recurrimos no es nada sensible, sino que es la forma misma de lo sensible. Contar es algo que siempre lo hacemos recurriendo al tiempo[490] aunque sea para contar nuestro acto mismo de contar. La diferencia inmediata que introduce el tiempo entre cada fenómeno en cuanto que surge en el plano del ὅτι ἐστιν, no sólamente resulta compatible con la identidad del plano del τί ἐστιν sino sólo bajo esta identidad es ella posible. La identidad (en el plano lógico[491]) y la diferencia (en el plano sensible) son rescatados a la vez sin que haya peligro de entrar, con ello, en contradicción.

En Hegel no tendrá ningún sentido recurrir al tiempo como aquello inmediato en donde se nos presentan las diferencias de las cosas lógica y universalmente idénticas. El tiempo no es un elemento que tenga que ser justificado en la doctrina del pensamiento puro sino, más bien, algo que se deduce al comienzo de la filosofía de la naturaleza[492]. Pero esto no significa que el tiempo así deducido sea finito, temporal. El concepto de tiempo, como todo concepto, es eterno (*ewig*). Lo eterno no es lo que es, ha sido siempre y será después, sino lo que es absolutamente presente. Hay que distinguir así entre el tiempo de las cosas finitas representada por el mal infinito, del tiempo del que dice Hegel que es eterno[493]. Pues bien, en la *Wissenschaft der Logik* ninguno de estos dos tiempos tiene cabida. El primero, el tiempo del mal infinito, no tiene cabida en la *Wissenscchaft der Logik* por que toda tarea filosófica es un conceptuar atemporal (*zeitlos*)[494]. El segundo, por que el concepto de tiempo tiene lugar en la Idea en forma de exterioridad, en la Naturaleza, y no en la *Wissenschaft der Logik* donde la

[490] La ingenua crítica que, por parte de Frege (en Frege [1988] pp. 17 y 18), se hacía a Kant cuando creía poner como contrargumento ejemplos del tipo “180415987409+918870983274=1099286970683”, ingora el papel que tiene en la argumentación kantiana el concepto de, expresándolo con Hegel, “valor numérico que es unidad”. Es más, no se trata sólo de que Frege no ha leido a Kant, sino de que parece no haber entendido en qué consiste la escritura numérica posicional. Cf. al respecto *KrV* B104: “so ist unser Zählen (vornehmlich ist es in größeren Zahlen merklicher) eine Synthesis nach Begriffen, weil sie nach einem gemeinschaftlichen Grunde der Einheit geschieht (z.E. der Dekadik)”.

[491] Con esto no queremos afirmar que toda diferencia tenga únicamente lugar en el plano de la forma de la intuición. No es que sea siempre necesario introducir todas las ovejas en la cueva para contarlas según se sacan una a una de ella, o que tengamos que ponerlas a todas de tal forma que las podamos abarcarlas de un vistazo sin que, sea como sea, lleguen a moverse. No es eso. La cuestión es que, si bien es verdad que conocer a las ovejas ayuda a contarlas, no contamos las ovejas en tanto que esta es así y la otra asá, sino que, en tanto que las dos son ovejas. De lo contrario terminaríamos contando cualquier cosa con cualquier otra lógicamente distinta, sin criterio o base alguno –sin identidad alguna sobre el que se manifiesten sucesivamente los ejemplares.

[492] Algo que veremos en el apartado 9.2 de este trabajo.

[493] Cf. *Enz*. §247 Zus (Hegel [IX] p. 24 y sigs.).

[494] Recuérdese la crítica de Hegel a los que interpretaban el paso –o el no paso– del Ser al Devenir como algo temporal (en Hegel [1978] p. 45).

Idea es en y para sí. El recurso a la intuición interna en filosofía es la perdida de la pretensión científica de la misma[495]: la caída en el psicologísmo.

Por este motivo, no nos es permitido recurrir al tiempo de las cosas finitas kantiano para explicar la diferencia inmediata. Esto no significa que este tiempo, bajo la figura del mal infinito, no vaya a estar presente de alguna forma en la *Wissenschaft der Logik*. En efecto, el proceso al infinito cuantitativo consiste en que un Cuanto siempre puede encontrar fuera de sí a otro Cuanto. El proceso al infinito es, como el mismo nombre indica, algo interminable, un siempre poder encontrar un otro, y otro, y otro, etc. De este modo, podríamos asimilar este proceso al significado que adquiere el tiempo bajo el esquema de la magnitud[496]. Sea o no correcta esta aproximación de algo que tiene lugar en la *Wissenschaft der Logik* a otro algo que tiene lugar en la *Kritik der reinen Vernunft*, el problema de no poder fundamentar en nada temporal el concepto de número hegeliano sigue en pie. Y esto no sólo por que el proceso al infinito cuantitativo venga, en el orden lógico, después de lo debería fundamentar, sino, más bien por que el concepto de la mala infinitud no es, hegelianamente hablando, ningún concepto. El proceso al infinito es un momento de aquello que es su verdad: el infinito de verdad (*das wahrhafte Unendliche*). El proceso al infinito es algo unilateral, no completo, relativo, y no un nombre del absoluto.

Aquello sobre lo que se asienta el concepto de número en Hegel es el equilibrio alcanzado por los Unos entre la atracción y la repulsión. Hemos visto ya que estos dos momentos del Ser-para-si van a dar lugar, respectivamente, a los momentos de la continuidad y la discreción dentro de la cantidad. Pues bien, la clave de la cuestión está en comprender que es el equilibrio (*Gleichgewicht*) entre los dos momentos, lo que introduce el elemento de la *Gegenwärtigkeit* en la infinidad de Unos. Esta presencialidad es lo que distingue al infinito de veras del infinito, digamos, potencial. Este último infinito es el del proceso que nunca llega a ser del todo presente[497]. Frente a ello, el estado de equilibrio entre la atracción y la repulsión impide que los Unos se dispersen en la nada, o que se contraigan todos ello en un punto. Traducido al lenguaje que hemos utilizado en la exposición de la doctrina kantiana del número, el equilibrio es el estado en el que los Unos no se han perdido en la absoluta diferencia –repulsión–, ni en la absoluta identidad –atracción. Los Unos son cada uno Uno, es decir, diferentes, pero hay al mismo tiempo una Unidad que hace que todos ellos guarden una identidad. La Discreción remite a este no haber más que muchos Uno, es el lado de la diferencia. La Continuidad es el que los muchos Unos sean todos de una misma Unidad, es el lado de la identidad. Unilateralizar uno u otro de los momentos es la caída en el proceso al infinito. Quedarse exclusivamente en el lado de la Discreción deriva en posiciones atomistas. A su vez, quedarse únicamente con el lado de la Continuidad es perderse en el proceso al infinito. La Cantidad, resultado del equilibrio entre la atracción y la repulsión, no es ni el siempre poder uno seguir econtrándose con Unos, ni la pura Unidad sin aquello con respecto al cual es Unidad. La Cantidad es la presencia o la actualidad del Todo de los Unos y la remisión de todos ellos a una Unidad.

Con la eliminación del papel jugado por el tiempo del discurso de la *Wissenschaft der Logik*, Hegel elimina el elemento finito de su filosofía. Hegel considera que el proceso al infinito es un producto del psicologismo kantiano. Este último habría recluido el infinito de verdad al ámbito de lo *en sí*, a un ámbito que, para ser rigurosos, no es ningún ámbito para Kant: el ámbito de aquello que está fuera de los límites de la experiencia posible. Eliminar el

---

[495] Cf. Hegel [1978] p. 7.
[496] Cf. *KrV* B182.
[497] Sobre la proximidad del concepto de *Gegenwärtig* al *actu* del infinito de verdad cf. Hegel [1978] pp. 143 y 144, Hegel [XX] p. 171 y 186, Hegel [1985] pp. 136, 220, 247 y 248.

papel del tiempo será así eliminar el residuo psicologista kantiano que hacía que su filosofía quedara incapacitado para el conocimiento del absoluto.

Todo esto no significa que Hegel discrepe de la postura kantiana según la cual el juicio “5+7=12” es un juicio sintético a priori. Si tenemos en cuenta el significado peculiar que tienen en Hegel y en Kant los términos “analítico” y “sintético” será posible entender que, cuando Hegel afirme la analiticidad del ejemplo kantiano, no está diciendo otra cosa que lo afirmado por Kant cuando afirma el carácter sintético a priori. El juicio “5+7=12” no puede ser un juicio sintético para Hegel por que lo sintético tiene que ver con aquello cuyo ámbito de juego es el concepto. Analítico es, por el contrario, aquel juicio cuya unidad es producto de la exterioridad[498]. Y cuando se dice “exterioridad” hay que tener en cuenta que[499] el término remite tanto a aquella exterioridad que es debida a que la representación tiene lugar en la intuición como a aquella que apunta a la actividad de la reflexión exterior[500]. El hecho es que ni 5 ni 7 son conceptos en el sentido que tiene este término en Hegel[501]. Para Hegel, un juicio sintético es aquél en el que la necesidad de ir de sujeto al concepto está regido por el concepto que hace de sujeto. Y dado que el número es la producción de una identidad meramente exterior[502], exclusivamente dada en la intuición, el movimiento que tienen lugar en el acto de sumar o en el de pasar de una línea a una línea recta[503] será algo que tendrá lugar fuera de la necesidad del concepto. La Identidad o Unidad de los cinco Unos no es algo que esté presente en el concepto del número cinco, sino que es algo exterior, algo puesto por la reflexión. Esto no quiere decir que esto exterior sea para Hegel, al igual que para Kant, algo que tenga que ver con la sensación[504]. Contar es algo que tiene lugar en la forma de la intuición, en términos de Kant, o, en términos de Hegel, en la intuición abstracta. Por esta razón, cuando el segundo de ellos dice que los juicios de la matemática son analíticos no está afirmando nada distinto a lo afirmado por el primero cuando mostraba el carácter sintético *a priori* de los juicios de la matemática.

La *Anmerkung* de la segunda edición concluye con una exposición sistemática[505] de las operaciones elementales de la aritmética que ahora venimos a exponer. Numerar es el concepto general que utiliza Hegel en su exposición. Numerar consiste en aplicar la operación que ha dado lugar a los números sobre los mismos números[506]. La suma es así un numerar afectado del carácter de la inmediatez en el que los elementos contados, al no tener ninguna relación entre sí, no tienen por que ser meramente Unos. Lo sumado o restado son números sin relación, sin igualdad. Frente a esto, la multiplicación es la operación en la que los números que han de sumarse son iguales entre sí. Debido a esta igualdad el número a

---

[498] Cf. Hegel [1985] p. 198: “Die Zahl is um ihres Prinzips, des Eins, willen ein äußerliches Zusammengefaßtes überhaupt, eine schlechthin analytische Figur”.

[499] Cf. como prueba de esta afirmación Hegel [1985] p. 199: “Fünf is allerdings in der Anschauung gegeben, d.h. ein ganz äußerliches Zusammengefügtsein des beliebig wiederholten Gedankens Eins; aber Sieben ist ebensowenig ein Begriff”.

[500] Como veremos, esta segunda acepción de “exterioridad” o arbitrariedad de la Unidad es la que explicará la variabilidad de la noción de variable.

[501] Cf. Hegel [1985] p. 199.

[502] Cf. Hegel [1985] p. 200.

[503] Este ejemplo se encuentra también en la *Anmerkung* de Hegel que estamos ahora analizando.

[504] Cf. Hegel [1985] p. 199: “Zählen ist allerdings keine Empfindungsbestimmung, die für das **a posteriori** nach der Kantischen Bestimmung von Anschauung allein übrigbleibt, und Zählen ist wohl eine Beschäftigung auf dem Boden des abstrakten Anschauens”.

[505] Exposición que no tendrá nada que ver con la deducción que tiene lugar a lo largo de la entera *Wissenschaft der Logik*. Cf. Hegel [1985] p. 202: “Von der angegebenen Fortbestimmung der Rechnungsarten kann gesagt werden, daß sie keine Philosophie über dieselben, keine Darlegung etwa ihrer inneren Bedeutung sei, weil sie in der Tat nicht eine immanente Entwicklung des Begriffs ist”.

[506] Cf. Hegel [1985] p. 198: “Die durch das Numerieren entstandene Zahlen werden wieder numeriert”.

multiplicar es una Unidad. Las veces por las que se debe multiplicar la Unidad son expresadas por el nombre valor numérico[507]. La multiplicación es así el numerar en el que las unidades a numerar son, al mismo tiempo, valor numérico. El restar y el dividir son definidos como la inversa de, respectivamente, sumar y multiplicar[508]. Por último, tiene lugar la igualdad no ya de los números mismos, sino de las dos formas bajo las se manifiestan los números: La Unidad y el Valor numérico. En este caso, a saber, cuando el valor numérico es igual a la Unidad, tiene lugar la potenciación[509].

3.1.2 La Magnitud extensiva e intensiva

A diferencia de las Determinaciones de la Discreción y la Continuidad, las Determinidades "magnitud extensiva" y "magnitud intensiva" no se refieren a la Cantidad como tal, sino al Cuanto[510]. Esto significa que, como veremos a continuación, un Cuanto será extensivo o intensivo dependiendo de la forma que adquiera su límite cuantitativo[511]. No obstante, la alternativa entre ser intensivo y ser extensivo no es excluyente en Hegel. Y, en efecto, la representación vulgar que imagina que puede haber por un lado objetos que son meramente extensivos y, por otro lado, objetos que son únicamente intensivos, es atacado por Hegel en la primera de las dos *Anmerkungen* de las dos ediciones de la *Wissenschaft der Logik*[512]. Esta aparente paradoja se disuelve si tenemos en cuenta lo que sigue a continuación.

Visto desde fuera el movimiento de la *Wissenschaft der Logik*, es posible encontrar figuras lógicas que, por su unilateralidad, no tienen el carácter de verdad que tiene el Concepto en Hegel. Podemos decir incluso que la entera *Wissenschaft der Logik* no es más que un encadenamiento de continuados fracasos[513] en el camino hacia el Absoluto. Desde esta perspectiva, no supone ningún problema econtrarse con algo que, como el número, tiene como Determinidades, al menos inmediatamente, sólo uno de dos Momentos puestos en juego. En el caso de que el algo en cuestión haya sido deducido antes que las Determinidades, es incluso necesario que esto sea así. Algo distinto ocurre si lo que tenemos enfrente es algo que ha dejado a sus espaldas las Determinidades de las que se trata. En este caso, el objeto será, al mismo tiempo, la Determinidad A y su contradictoria no A. Como se sabe, la forma

---

507 Como hemos visto, es indiferente cuál de los dos números por multiplicar se identifique con la Unidad y cual con valor numérico. Por ejemplo, en 5·6 podemos entender que 5 es el número que está afectado por la igualdad y es, por ello, la Unidad o que la Unidad es el 6 y 5 el valor numérico.

508 La indiferencia de la que se hablaba en la nota anterior vuelve así a manifestarse en la división. De este modo, podemos entender que en 15/5=3, 1) 15 es el valor numérico y 5 la unidad o que 2), 15 es la Unidad y 5 el valor numérico. En el primer caso se trata de encontrar cuántas veces está contenido el número 5 en el número 15. En el segundo caso la tarea tendría como objetivo encontrar la magnitud de la parte (Unidad) que surge cuando dividimos la Unidad 15 en cinco partes iguales. En el primer caso tenemos Quotient/Divisor = Anzahl/Einheit = Anzahl. En el segundo, Quotient/Divisor = Einheit/Anzahl = Einheit.

509 La igualdad entre el valor numérico y la Unidad consiste en que las veces que hay que multiplicar la unidad es igual a la Unidad. Así, para obtener $6^2=36$ hay que multiplicar 6 (la unidad) 6 veces (el valor numérico).

510 De ahí que, hegelianamente hablando, cabría acaso mejor decir "Cuanto intensivo" y "Cuanto extensivo". El hecho es que Hegel mismo usa sólo cinco veces el término "extensive Quantum" a lo largo de su obra publicada. El término "intensive Quantum" aparece cuatro veces. La razón de ello estriba en que al Cuanto cuyo límite es intensivo no se le llamará Cuanto sino Grado.

511 Cf. *Enz.* §103 (Hegel [VIII] p. 216). "Der Unterschied der kontinuierlichen und diskreten Größen von den extensiven und intensiven besteht darin, daß die ersteren auf die Quantität überhaupt gehen, diese aber auf die *Grenze* oder Bestimmtheit derselben als solcher. - Gleichfalls sind die extensive und intensive Größe auch nicht zwei Arten, deren jede eine Bestimmtheit enthielte, welche die andere nicht hätte; was extensive Größe ist, ist ebensosehr als intensive, und umgekehrt".

512 Cf. Hegel [1978] p. 135 y sig. y Hegel [1985] p. 214 y sig.

513 O, se podría también decir, "una continuada concretización en el acierto del inicio".

que tiene el algo de ser la Determinidad A y su contradictoria es el de la superación (*Aufhebung*). Así, si lo que tenemos delante es, por ejemplo, un objeto (*Gegenstand*) y no, meramente, un Algo, tendremos delante nuestro, además de Algo, una cosa que podrá ser, por ejemplo, extensiva e intensiva.

Ya hemos mencionado en el párrafo anterior que el Número es, en su manifestación inmediata, un Cuanto extensivo[514]. Que en su inmediatez el Número sea una magnitud extensiva significa que su Límite tiene la forma que es propia a un Cuanto extensivo. Recordemos ahora brevemente lo que habíamos obtenido como la definición de Número. El Número era la Unidad de la Pluralidad y la Unidad en el que la Pluralidad, cualquiera de los Unos, puede ejercer de Límite. El Número tiene así el límite y, con ello, la distinción en relación a otro Número, dentro de sí[515]. Esta forma de tener un Cuanto el límite es a lo que se refiere Hegel cuando habla de "magnitud extensiva" (*extensive Größe*). La magnitud extensiva es aquél Cuanto en el que el límite se refiere simplemente a sí[516]. El que la referencia a sí sea simple significa que no hay todavía mediación de un otro en esta referencia. La magnitud intensiva será precisamente producto de este acto de mediación que tendrá lugar en la referencia. Es más, veremos que la referencia a un límite exterior es a lo que Hegel llama "magnitud extensiva", mientras que el retorno a sí desde lo exterior, la referencia mediada a sí o el Ser-para-sí cuantitativo, es la variabilidad del Cuanto. Este último momento será el preludio de la infinitud Cuantitativa. Veamos todo ello con algo más de detalle.

La diferencia entre la magnitud extensiva y la intensiva se basa en la diferencia de los momentos del Número: la Unidad y el Valor numérico[517]. El número que expresa una magnitud extensiva es un número en el que la pluralidad o el valor numérico ejerce de límite del número desde dentro de sí. Estos muchos Uno no son, sin embargo, única y exclusivamente diferentes, sino que tienen algo en común, tienen una Unidad. A este último movimiento lo llama Hegel "la superación de los Unos exteriores a sí en tanto que indiferentes"[518]. El Grado consistirá en considerar el Número, no ya, como una pluralidad dentro de sí, sino como una mayoría (*Mehrheit*). La pluralidad tiene dentro de sí los muchos unos y es el número tal y como es considerado por la magnitud extensiva. El número como una mayoría es, en cambio, el Número como Uno[519]. Bajo "Número como Uno" entiende Hegel el número que es resultado de la reflexión del número dentro de sí. Esta reflexión no es otra cosa que la arriba mencionada "superación de los Unos exteriores a sí". En esta especie de repliege de todos los Unos en la Unidad, la pluralidad deja de ser algo que el Número tenga dentro de sí y pasa a estar fuera. Con ello, el grado no se determina ya en sí mismo, sino que lo hace en relación a algo que tiene fuera. Algo que se determina en relación a otro algo es una Determinidad simple[520]. Pues bien, el Grado es una Determinidad simple porque se determina en relación a una pluralidad que tiene fuera de sí. El Grado, resultado de eso a lo que llamábamos reflexión, no es un mero retorno del principio del número, del Uno. El retorno del Grado es una reflexión y, como tal, tiene que incluir los momentos de los que retorna. Si, a raíz del repliegue, queda eliminada la posibilidad de encontrar dentro de sí, dentro del Grado, la pluralidad, entonces será que la pluralidad está fuera del Grado. Este encontrarse fuera la pluralidad significa dos cosas:

---

[514] Cf. Hegel [1985] p. 209: "[die] Zahl ist [...] unmittelbar extensives Quantum".
[515] Por ejemplo, el número 6 tiene el límite, cada uno de los seis Unos de los que se compone, dentro de sí.
[516] Cf. Hegel [1978] p. 132: "Das extensive Quantum […] ist an-sich-bestimmte und dadurch gleichgültige, einfach auf sich bezogene Grenze".
[517] Cf. Hegel [1978] p. 135.
[518] Cf. Hegel [1978] p. 132: "[die] Eins [...] als Gleichgültige, sich Äußerlich sind im Zurückgekehrtsein der Zahl in sich aufgehoben".
[519] Cf. Hegel [1985] p. 211.
[520] Cf. Hegel [1985] p. 212.

1) Significa en primer lugar que la pluralidad no está dentro, que el número por el que se representa el Cuanto no es un valor numérico, no es una suma de pluralidades. El Grado 10 no es la suma de los grados 1, más el grado 1, etc. Si fuera así, dirá Hegel[521], el grado sería una magnitud extensiva. No es ese pues el caso. Al contrario, el grado no es 10 sino el décimo. Con esto se quiere decir que no todos los Unos que hay en el conjunto 10 son igualmente representantes del Uno que cierra el conjunto 10. El Grado 10 sólo lo es un Uno[522]. En este sentido la pluralidad de Unos no está dentro del Grado 10. Por este motivo, a diferencia del Número como expresión del Cuanto extensivo, el Grado 10 no es un conjunto de Unos, no es conjunto.

2) Significa también que la pluralidad no ha desaparecido sino que ha sido superada. Ahora, en el Grado, la pluralidad seguirá siendo aquello que determina el Número[523] pero esta vez lo hará desde fuera. Que la determinación se haga desde fuera no significa, sin embargo, que sólo aquellos valores numéricos mayores que el representado por el número que representa el Grado determinan al Grado. No es esto. Son todas las pluralidades, tanto mayores como menores, las que determinan al Grado. Y estás pluralidades serán, en la medida en que son inmediatamente pluralidades y en relación al Grado que están determinando, una magnitud extensiva. Por ejemplo, el Grado utilizado en geometría queda determinado por la cantidad de partes iguales en las que se divide el movimiento de rotación del radio del círculo. Que las partes han de ser iguales significa que estamos delante de una Unidad que se repite. A su vez, que sea el entero círculo, la entera división de la misma, la que determina cada uno de los grados significa que es el entero espectro de la pluralidad, mayor o menor que el Cuanto representado por el Grado, lo que llega a determinar uno cualquiera de los Grados. Por último, cada uno de los cortes es en sí mismo intercambiable por otro: en su papel de determinador del Grado n-ésimo, cada uno de los 360 grados es una pluralidad con 360 partes iguales, es decir, son Unos que remiten a una Unidad, dentro de sí. De este modo, si las partes, los Unos, son intercambiables y si, además de ello, estos Unos constituyen una pluralidad que está dentro del Número, entonces, podremos concluir que cada pluralidad en relación al cual se define el Cuanto intensivo es un Cuanto extensivo[524].

---

[521] Cf. Hegel [1985] p. 210.

[522] Cf. Hegel [1985] p. 210: “es ist nur Einer, der zehnte, zwanzigste Grad”.

[523] Cf. Hegel [1985] p. 194: “die Bestimmtheit der Grenze fällt in [die vielen Eins]”.

[524] De todo esto que acabamos de decir se puede entrever la cercanía entre los conceptos de Grado y de número ordinal. Esta afinidad es señalada por Hegel quien, a lo largo del capítulo sobre el Cuanto extensivo e intensivo, hablará del “grado décimo” (*zehnte Grad*) (en Hegel [1985] p. 210 y Hegel [1978] p. 132) o de que el número es, aparte de ser el diez, el cien, etc., al mismo tiempo, el décimo, el centésimo, etc. (en Hegel [1985] p. 215). Los números ordinales, al igual que los Grados, necesitan de la totalidad del campo de los muchos en los que tienen lugar para poder ser definidos. Por ejemplo, no es sólo que no sea lo mismo llegar en segundo lugar en una carrera habiendo 2 que habiendo 2000 participantes, sino que, es que ni siquiera está definido qué es llegar en segundo lugar si no se sabe cuantos participantes hubo. De esto se sigue la vaciedad de expresiones del tipo “uno de los mejores libros sobre la batalla de los Melónidas”, en los que no sólo falta el denominado “campo de los muchos”, sino que, más grave aun, falta la asignación de un número al grado. Podría quizás objetarse que los números ordinales también necesitan de “campo de los muchos” para poder ser definidos; no es lo mismo que haya dos accidentes de aviación cada 2000 vuelos que haya dos accidentes por cada 2 millones de vuelos. Contra esta clase de ejemplos cabría decir lo siguiente: el hecho de haber dos accidentes está perfectamente definido sin que tengamos que recurrir al campo de los muchos. El problema es que si queremos comprender el significado de haber dos accidentes no ya, en términos absolutos, sino, en términos relativos, entonces ponemos los accidentes en relación al “campo de accidentes”. Pero esto último es pasar de considerar el número como Cuanto, a hacerlo como Grado. Por esta razón, cabría mejor hablar de “segundo accidente de 2000” si lo que queremos subrayar es su peso en relación a un todo, a un “campo de los muchos”.

El Grado es lo que es en relación a su exterioridad o, lo que es lo mismo, es relación a sí como relación a través de sí a algo exterior[525]. Este algo exterior hasta tal punto no le es indiferente al Grado que es incluso el que es en relación a él. No obstante, el que algo tenga su determinación en algo exterior a él, el que esta determinación exterior no sea ya indiferente, es lo que caracterizaba a lo Cualitativo[526]. El Grado es así el retorno de la Cualidad en el Cuanto o el Cuanto tal y como es en el Concepto. Ello se debe a que el Grado ha sido obtenido como resultado de la reflexión sobre sí del Número, del Cuanto inmediato. De ahí que, si resultaba que el Cuanto era el equivalente del *Dasein* en la Cantidad, ahora tenemos que el Grado es el Ser-para-si en el Cuanto[527]. Un ser que tiene fuera de sí algo que es él mismo. La tarea siguiente consiste así en ver en qué medida esto es así, es decir, en qué grado el Grado tiene en sí el valor numérico.

Para ello tenemos que pasar a la sección titulada por Hegel "Identität der extensiven und intensiven Größe"[528]. Parte del contenido de esta sección ya ha sido reproducida a lo largo de nuestra exposición precedente. En particular, hemos visto cómo pasaba un Cuanto a adquirir la forma de un Grado. Tenemos que ver ahora que el Grado, en su retorno, tiene que volver a aquello desde donde partió. Con ello se habrá visto que el retorno es, efectivamente, un Ser-para-si, es decir, un movimiento que tiene lugar de acuerdo al concepto. Este retorno de la magnitud intensiva a la magnitud extensiva consistirá en mostrar que el grado enésimo contiene en sí al Número n. Y, en efecto, el grado n-ésimo contiene en sí el valor numérico n si atendemos al hecho de que este Grado debe poder ejercer de aquello con respecto al cual se determina otro Grado cualquiera. Si resulta que el Grado contiene en sí un valor númerico, entonces sucederá que el Grado estará, desde esta perspectiva, en sí mismo determinado. Pero esto último es lo mismo que decir que la magnitud intensiva es la magnitud extensiva.

En última instancia, el viaje de ida de la magnitud extensiva a la magnitud intensiva y de vuelta desde ésta a la extensiva se basa en la unilateralidad y consiguiente traspaso mutuo de los momentos de la Discreción y de la Continuidad. Y es que el primer viaje, el que va de la magnitud extensiva a la intensiva, se debía a que los muchos Unos se replegaban en una Unidad sin que, debido a que se trataba de un viaje y no, más bien, del comienzo del viaje, llegase a desaparecer la pluralidad de estos Unos. A su vez, en la Continuidad, en la Unidad, no han desaparecido los Unos sino que están contenidos en el Grado[529]. Por esta razón, el Grado no sólo está determinado en relación a algo que está fuera de él, sino que, en tanto que es magnitud extensiva, está en sí mismo determinado.

En definitiva, hemos obtenido como resultado que el Grado está esencialmente remitido a la exterioridad en la medida en que esto exterior constituye su ser, pero que la exterioridad le es un límite indiferente. El primer aspecto, lo que Hegel llama la *Fürsichsein*, es el lado cualitativo del Grado. El segundo aspecto es la *Äußerlichkeit*, el lado cuantitativo del Grado. De este modo obtenemos una contradicción que dará lugar a la infinitud Cuantitativa. El Grado ha de determinarse en relación con algo exterior, pero este límite exterior le es indiferente, es incapaz de determinarlo. No es este o aquel Grado el que podrá determinar el Grado, sino que es la totalidad de los Grados los que son necesarios para tal determinación. El

[525] Cf. Hegel [1985] p. 211: "ist Beziehung auf sich als Beziehung durch sich selbst auf ein Äußerliches".
[526] Recordemos que, frente a la Cualidad, lo Cantidad era "das reine Sein, an dem die Bestimmtheit nicht mehr als eins mit dem Sein selbst, sondern als aufgehoben oder gleichgültig gesetzt ist" (*Enz.* §99 (Hegel [VIII] p. 209)).
[527] Veremos en el apartado 3.2 que el equivalente del Ser-para-sí de la Cantidad – no del Cuanto – es la relación Cuantitativa.
[528] Cf. Hegel [1978] p. 134 y sig., y Hegel [1985] p. 212 y sig.
[529] Cf. Hegel [1978] p. 134 y Hegel [1985] p. 212: "so enthält der bestimmte Grad sie [die zwanzig Eins] als Kontinuität".

Grado entrará, con ello, en un proceso al infinito de continuo fracaso de sus pretensiones de determinación. La necesidad de determinarse, el lado Cualitativo, se ve abortado sistemáticamente por el lado Cuantitativo. Pero este fracaso no tiene como resultado la mera nada. Si el Grado es el que es únicamente en relación a otro Cuanto fuera de él, entonces el Grado no es el que es sino que será aquel Cuanto gracias al cual es[530]. Pero si, además de ello, este Cuanto tampoco consigue determinarlo, entonces lo que tenemos es una continuo devenir del límite del Grado. De ahí que no es el Cuanto, en el modo de Grado, lo que se repele fuera de sí, sino que es el límite, la Determinidad del Cuanto lo que varía. No tenemos ahora unos Unos que se reproducen en su repulsión, sino un Cuanto que aumenta o disminuye junto con el límite. Este proceso de aumento y disminución es la Infinitud Cuantitativa (*Quantitative Unendlichkeit*).

3.1.2.1 El diferencial como Magnitud intensiva en Kant

Antes de continuar el viaje hacia el lugar que ocupa el cociente infinitesimal en la *Wissenschaft der Logik*, vamos a detenernos brevemente en una lectura de la tabla de las categorías kantiana en la que se asignará un papel especialmente relevante a los diferenciales. Esta lectura, obra del filósofo neokantiano H. Cohen, será expuesta por el autor en su libro *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte*[531].

Según Cohen, el aparente hueco que forma el concepto de Realidad entre la serie de las categorías es solidario de la falta de una fundamentación desde la "Teoría del Conocimiento" del concepto de diferencial en Kant[532]. Cohen se refiere con "vacio que forma el concepto fundamental de Realidad entre las categorias" al hecho de la imposibilidad de fundamentar este concepto en los correspondientes juicios afirmativos. Esto no significa que, de hecho, haya tal falta en la filosofía crítica, sino que la fundamentación de la categoría de la Realidad hay que buscarla en otro lugar.

Este lugar es el que ocupan en Kant, siempre según Cohen, las magnitudes intensivas. La Tesis de Cohen consistirá en defender la sinonímia en Kant, en particular, y en su época, en general, de los términos "infinitesimal" y "magnitud intensiva"[533]. Con ello, el significado de la noción de infinitesimal en Kant habría que buscarla en la segunda tríada de las categorías: Realidad (*Realität*), Negación (*Negation*) y limitación (*Limitation)* y, correspondientemente, en las anticipaciones de la percepción[534]. El cálculo infinitesimal hace las veces de puente entre la matemática y la física, haciendo posible el estudio matemático de las magnitudes continuas que nos son presentadas en la física. En este sentido, el calculo

---

[530] Cf. Hegel [1985] p. 138: "[der Grad] ist die einfache sich auf sich beziehende Bestimmtheit, welche die Negation ihrer selbst ist, indem sie ihre Bestimmtheit nicht an ihr, sondern in einem anderen Quantum hat; er ist also, indem er dieses bestimmte Quantum ist, vielmehr wesentlich nicht er, sondern ein anderes Quantum".

[531] Cf. Cohen [1968].

[532] Cf. Cohen [1968] p. 71: "der Mangel einer erkenntniskritischen Begründung des Differentialgegriffs zugleich der Grund für Lücke, die der Grundbegriff der Realität in der Reihe der Kategorien bildet".

[533] Cf. Cohen [1968] pp. 57-58: "[...] die Identiät der intensiven und der unendlichkleinen Größe zu Kants Zeiten eine allgemeine Annahme war". Cf. también p. 171: "Nur konnte er diese Identifizierung beider Begriffe nicht nachdrücklicher betonen zu müssen fühlen, da ihm für diese Ansicht der Sprachgebrauch bis von der scholalastischen Zeit her entgegenkam". Esta tesis de Cohen es también apoyada por Vuillemin (en Vuillemin [1955] p. 144): "Le principe des grandeurs intensives n'est rien d'autre que l'introduction du calcul infinitésimal dans l'édifice critique".

[534] Cf. algo más arriba: "...jene vermisste logische Begründung des Differentialbegrifs in einem erkenntniskritischen Grundsatze, und zwar in dem der Kategorie der Realität entsprechenden, mithin in dem Grundsatz der intensiven Größe oder der Antizipationen enthalten sei".

infinitesimal es la *mathesis intensorum* de la que nos habla Kant en los Prolegómenos. El cálculo infinitesimal sería la segunda de las aplicaciones posibles de la matemática a los fenómenos. Si el primero de los cálculos matemáticos consideraba a los fenómenos bajo el aspecto de la cantidad (*Größe*), el segundo lo hace bajo el aspecto de la intensidad. Este segundo cálculo es, según Cohen, el cálculo infinitesimal:

> *weswegen der Verstand sogar Empfindungen, welche die eigentliche Qualität der empirischen Vorstellungen (Erscheinungen) ausmachen, anticipiren kann vermittelst des Grundsatzes, daß sie alle insgesammt, mithin das Reale aller Erscheinung Grade habe, welches die zweite Anwendung der Mathematik (mathesis intensorum) auf Naturwissenschaft ist*[535]

Las anticipaciones de la percepción, tanto en su versión A, en la que se habla de la correspondencia entre lo real y la sensación, como en la edición B, en la que se habla ya de su identificación[536], afirman para todo lo real su inserción en una escala de intensiones. Toda sensación, dice Kant, es graduable desde el punto 0 correspondiente a la conciencia pura[537], a los grados siguientes correspondientes a la conciencia empírica. Una versión de las anticipaciones acaso más kantiana pero que no es del mismo Kant sería la siguiente: de acuerdo a la anticipación de la percepción, a toda sensación corresponde un grado. El hecho de que el grado sea uno u otro depende de la conciencia empírica o de la sensación en cuestión; el hecho de que la sensación siempre haya de tener uno u otro grado, no. Esto segundo es el aspecto formal o *a priori* de la conciencia en lo que a uno de los dos lados de la síntesis de lo homogéneo se refiere.

---

[535] Cf. Kant [VI] p. 307.

[536] En el sentido de que en la segunda edición desaparece de la tesis la *Empfindung* o sensación para aparecer después: la percepción en tanto que conciencia empírica, es al mismo tiempo, sensación. De tal modo que es en la instancia denominada conciencia en la que tiene lugar tal identificación entre la percepción y la sensación o lo real y la sensación. En la edición A el asunto quedaba algo enrevesado y abierto a desviadas interpretaciones, al tener que afirmar Kant el carácter de magnitudes intensivas tanto para la realidad como para la sensación –de ellas. Cf. al respecto Duque [2002] p. 70 n. 74: "Pero lo que tiene un grado sólo puede ser lo *real* (lo positivo, pesado y medido) del objeto (empíricamente lleno por una sensación), y no la sensación misma, que como tal –y aisladamente tomada–, no sólo es incognoscible, sino que podría decirse con toda razón que ella es –o al menos, procede de– la cosa en sí". Una lectura diferente es la que presenta Cohen: "Der Grad ist indessen eine Bestimmung nicht sowohl der Empfindung als vielmehr des reinen Denkens, und nur als solche des Denkens übertragbar auf die Empfindung, um diese in dem Grade zu apriorisieren" (Cohen [1968] p. 169). Cf. también la parte en donde Pierobon (en Pierobon [2002] p. 187) comenta el momento en el que Kant (en B210) habla de la Realidad como causa de la Sensación : "La difficulté que nous visons ici est celle de l´Idealisme transcendental, difficulté selon laquelle il faut tenir d´une part que le réel est ce qui cause réellement la sensation et d´autres termes, au niveau de la *réalité empirique,* qui est celui du fait, la sensation est l´effet d´une cause, mais au niveau de l´*idealité transcendentale*, qui est celui de la connaissance, cette causation ne constitue pas le contenu des représentations mais seulement ce par quoi il y a représentation". Volveremos sobre esta tesis de Pierobon más adelante.

[537] Sobre la trabazón entre lo originario o lo puro y el grado cero de intensidad es ilustrativo el siguiente texto de Hölderlin:"Die Bedeutung der Tragödien ist am leichtesten aus dem Paradoxon zu begreifen. Denn alles Ursprüngliche, weil alles Vermögen gerecht geteilt ist, erscheint zwar nicht in ursprünglicher Stärke nicht wirklich sondern eigentlich nur in seiner Schwäche jedes Ganzen angehört. Im Tragischen nun ist das Zeichen an sich selbst unbedeutend, wirkungslos, aber das Ursprüngliche ist gerade heraus. Eigentlich nämlich kann das Ursprüngliche nur in seiner Schwäche erscheinen, insofern aber das Zeichen an sich selbst als unbedeutend =0 gesetzt wird, kann auch das Ursprüngliche, der verborgene Grund jede Natur sich darstellen. Stellt die Natur in ihrer schwächsten Gabe sich eigentlich dar, so ist das Zeichen wenn sie sich in ihrer stärksten Gabe darstellt" (En Hölderlin, [1998] p. 93).

Así, si los axiomas de la intuición nos dicen lo que algo es en tanto que es, las anticipaciones de la percepción nos dicen lo que algo es en tanto que ese algo es un qué. Si los primeros acentúan el que las cosas sean, las segundas acentúan el qué sean esas cosas. En la lectura de Cohen tanto los primeros como los segundos necesitan de una unidad. La síntesis en la categoría de la cantidad necesita de una unidad que encontrará fuera de la conciencia[538]. La síntesis en la categoría de la cualidad necesita de una unidad que proporcionará el infinitesimal:

Qualität im Sinne der mathematischen Naturwissenschaft beruht auf der Bestimmung derjenigen Art von Realität, zu welcher die Infinitesimalrechnung die Maßeinheit liefert[539]

El carácter de realidad es expresada por el infinitesimal, mientras que la síntesis en la cantidad extensa queda sujeta a la más temible relatividad debido a su carácter convencional ya aludido. El problema de las magnitudes extensivas es que nos son peligrosamente subjetivas. Si no hubiese otra forma de acceso a la realidad que el proporcionado por los *cuanta* extensos, el carácter de certeza de la ciencia, según Cohen, se tambalearía. Esta afirmación es altamente problemática. Del hecho de que no haya, en términos de Hegel, “medidas naturales”, no se sigue que la ciencia construida sobre una medida convencional haya de ser una ciencia afectada de relatividad. Y es que, ¿qué se quiere decir cuando se afirma que la ciencia “está construida sobre” una medida convencional?. La convencionalidad es introducido en el discurso científico cuando se decide sobre el Cuanto de una unidad de medida[540]. Es este acto de convención el que, precisamente, permite a la teoría salir del mundo de las *similitudo* leibniziana y poder hablar de esto que tenemos aquí a la derecha o esto otro que está delante mio. El procedimiento por el cual se llega a anclar una teoría en la *realidad* es es el uso de los deícticos. Esta carácter convencional no supone ninguna perdida de pretensión de verdad o caidad en *Relativitäten* para el discurso científico. Y ello porque la convencionalidad es, en principio, compartible por y comunicable a cualquiera. Es más, el lenguaje científico no es únicamente convencional sino que es, a su vez, arbitrario. A diferencia de lo que ocurre con un símbolo, no hay en el signo linguístico, en general, y en la unidad de medida, en particular, ningún enlace natural entre el significado y el significante[541]. Esta arbitrariedad es la que garantiza el carácter formal de los lenguajes[542], la que permite hablar de la independencia con respecto a la substancia real. La arbitrariedad es, por esta razón, más bien una garantía frente al relativismo y no una perdida en el mismo.

Con el fin de intentar comprender el posible significado de la identidad decretada por Cohen entre las magnitudes intensivas y los infinitesimales, resulta útil volver la mirada hacia el procedimiento que utilizaba Oresme para poder representar las magnitudes en el eje

---

[538] Cohen equipara la convencionalidad de este *Maßtab* con su relatividad, resaltando así el carácter de “Hebel alles Naturerkennens” del infinitesimal: “Denn alles Rechnen mit extensiven Zahlgrößen ist und bleibt ein Vergleichen mit dem relativen und willkürlichen Maßstabe der Einheit, welche selbst freilich in der Einsicht des Bewußtseins ihre Gewähr hat, darum aber auch in anderem Arten dieser Einsicht des Bewußtseins Ergänzung fordert und findet” (en Cohen [1968] p. 196 § 92).

[539] Cf. Cohen [1968] p. 87 § 44.

[540] Podría pensarse también en la existencia de *otra* convencionalidad, a saber, aquella que tiene lugar cuando elegimos, no ya, el cuanto de medida, sino, el qué que ha de medirse. No obstante, a diferencia del cuanto de medida, el qué que ha de medirse suele venir determinado por las necesidades internas de la teoría y no está afectado por ello del elemento convencional.

[541] La única diferencia entre los lenguajes naturales y los artificialas consiste, en este sentido, en que los primeros no son covencionales. Cf. Sobre este punto Saussure [1972] pp. 100 y 101.

[542] Cf. Saussure [1973] p. 157.

denominado *latittude*. Hemos[543] denominado por "analogía" el procedimiento según el cual dos intensidades son representadas por dos líneas, si entre ellas se dan las mismas "razones" que entre estas mismas líneas. Este método de con-figuración posibilitaba a Oresme representar algo, en principio, tan irrepresentable como lo son las cualidades. El caso es que podría afirmarse que las anticipaciones de la percepción efectúan un giro, cartesiano-copernicano, sobre la base del proceder *oresmiano*: si bien, como se ha visto, en la *longitude* se procede a representar o bien el sujeto –la cosa– o bien el tiempo –para el caso del movimiento–, en Kant, la intensión es la forma del contenido que tiene en cada caso el tiempo, digamos, del sujeto. Es decir, la consecuencia sobre el método de la *configurationibus* del giro que comienza con Descartes –y que consistente en que lo subyacente o *sub-jectum* es el Yo o la Razón– es que el sujeto no es ya la cosa misma con su superficie representada por la *longitude*, sino que el sujeto es el Yo o la conciencia y en la *longitude* se representa el paso del tiempo de ese Yo.

Así las cosas, se puede afirmar que la *latittude* representa, en Kant, las intensidades que en cada caso perciba el sujeto en cada instante temporal. Esta instantaneidad del padecer es algo que compartirá Kant con Aristóteles. En efecto, para el estagirita "no es posible moverse, sino en el tiempo, pero sí es posible gozar, porque lo que ocurre en el presente es un todo"[544]. El representarse lo que ocurre en *cada* presente como un todo es lo que permite el método de la *configurationibus* moderno. La forma de este método, es decir, el hecho de que vamos a tener siempre dos ejes para cada cualidad representada, es lo que expresan las anticipaciones de la percepción y los axiomas de la intuición.

Esta lectura del *configurationibus* de Oresme, aunque no está presente en el ensayo de Cohen[545], ilustra perfectamente el carácter de continuidad con el que intenta caracterizar el diferencial y, en particular, el carácter de temporalidad que subyace, según Cohen, en la continuidad. A su vez, queda representado por la versión moderna del *configurationibus* que aquí estamos defendiendo el hecho de que este carácter de continuidad es lo específicamente constitutivo de la conciencia: "Die Kontinuität bezeichnet einen allgemeinen Charakter des Bewußtseins, ähnlich wie die Identität"[546]. Efectivamente, el carácter continuo del tiempo queda reflejado en el carácter continuo que posee la recta de las *longitude*: la recta, al igual que la conciencia, *non facit saltus*[547].

Según Cohen, la idea de que el origen de la continuidad haya que buscarlo en el tiempo esta ya presente en Barrow[548]. Sin embargo, hay que decir que la continuidad no es, en Kant,

[543] Cf. el apartado 7.1 de este trabajo.
[544] Cf. Ética a Nicómaco 1174b 8-10. Nótese que frente a lo que Aristóteles defiende, sí podemos representarnos el movimiento en un momento concreto. En este caso, a diferencia de las intensidades que se dan en la conciencia, no se representan los cambios de la conciencia sino del objeto, aunque, esto no signifique que su estudio sea objeto de una ciencia empírica. Cf. KdrV B 155 nota: "Bewegung eines Objects im Raume gehört nicht in eine reine Wissenschaft, folglich auch nicht in die Geometrie, weil, daß Etwas beweglich sei, nicht *a priori*, sondern nur durch Erfahrung erkannt werden kann. Aber Bewegung als Beschreibung eines Raumes ist ein reiner Actus der successiven Synthesis des Mannigfaltigen in der äußeren Anschauung überhaupt durch productive Einbildungskraft und gehört nicht allein zur Geometrie, sondern sogar zur Transscendentalphilosophie". Entendemos que con ésta "rama" de la filosofía transcendental se refiere Kant a la foronomía.
[545] De hecho, no hay rastro de autores de la época medieval en su ensayo.
[546] Cf. Cohen [1968] p. 81.
[547] Cf. Cohen [1968] p. 83: "Das Prinzip der Kontinuität bedeutet die Voraussetzung: Conscientia non facit saltus. Diese Stütze des Bewußtseins bewährt sich in eminenter Weise an dem Infinitesimalbegriff".
[548] Cf. Cohen [1968] p. 91: "So geht er von der Kontinuität der Größen zwar aus, zugleich aber von derselben fort zu der Zeit. «<Ob magnitudinis> quippe <continuitatem> continuus est <motus>, et propter motum <tempus> quoque continuum est». Durch diese Konsequenz wird sachlich vielmehr des Begriff der Kontinuität

una propiedad exclusiva de las magnitudes intensivas: el hecho de que tanto la síntesis de la cualidad como la de la cantidad sean homogéneas, hace que tanto las magnitudes intensivas como las extensivas sean continuas[549]. La función fundamentadora de las primeras consiste, según Cohen, en unir la ciencia de la matemática, por un lado, y la "ciencia de la naturaleza" por el otro[550]; hacer que sea posible la ciencia como discurso posible sobre la "realidad". En definitiva, "um das sinnlich Subjektive objektiv zu machen, ist die Infinitesimalrechnung erfunden"[551]. Pero ya hemos visto que la objetividad del objeto de la experiencia posible no es algo que se *ganaba* en Kant únicamente con las anticipaciones de la percepción.

Por otro lado, si atendemos a la lectura de las anticipaciones de la percepción vistas a la luz de las magnitudes infinitesimales que nos ofrece Pierobon[552], el diferencial encuentra su razón de ser en el momento en el que la sensación pasa a ser la conciencia de una sensación, es decir, en el momento en que la sensación pasa a ser una percepción. Recordemos que en la definición kantiana[553] se hablaba de un "al mismo tiempo" en lo que se refiere a esta "transformación". Pierobon considera éste como uno de los polos, junto con el de la continuidad de los fenómenos, en el que se encuentra Kant en las anticipaciones: "le premirer pôle de cette circulation serait sa conception du phénomène comme grandeur intensive, sur le modèle du *moment*, c´est-à-dire du phénomène *appréhendé dans l´instant* (un intervalle de temps tandant vers zero), comme différentiel entre la conscience subjective empirique...et son aliment matériel, la sensation"[554]. De este modo, la lectura que nos propone Pierobon entiende que los infinitesimales son los encargados de eliminar el riesgo del realismo transcendental de la filosofía kantiana en aquellos delicados pasajes en los cuales se habla de una materia encargada de producir una sensación[555]. En particular, la magnitud intensiva es identificada con el diferencial entre la sensación y la sensación de la sensación o conciencia empírica[556].

Lo cierto es que esta lectura de Kant es dificilmente sostenible. Es verdad que Kant llama[557] momento de la aceleración a la velocidad causada por una fuerza móvil que ha sido ejercida sobre un cuerpo en un instante de tiempo. Este uso del término "momento" no es, en contra de lo que habitualmente se ha creido, fiel al concepto de momento usado por Newton[558]. La diferencia entre las dos posturas consiste en lo siguiente: Newton denomina

---

aus der Zeit abgeleitet; wie aus derselben vermittelst der Bewegung die räumlichen Größen erzeugt wurden. So vermittelt Barrow den Gesanken: die Kontinuität in der Zeit zu begründen".

[549] Cf. KdrV B 212: "Alle Erscheinungen überhaupt sind demnach continuirliche Größen sowohl ihrer Anschauung nach als extensive, oder der bloßen Wahrnehmung (Empfindung und mithin Realität) nach als intensive Größen".

[550] Cf. Cohen [1968] p. 58: "durch welchen [die intensive Gößen] die Verbindung von Mathemtik und Naturwissenschaft tatsächlich gestiftet und innerlich begründet wird". Cf. también Cohen [1968] p. 67: "Um die Dinge als physische Körper, als reale Gegenstände zu bestätigen, dazu bedurfte es infinitesimaler Zählung".

[551] Cf. Cohen [1968] p. 227.

[552] Cf. Pierobon [2003] pp. 185-185.

[553] Cf. KdrV B 207 "Wahrnehmung ist das empirische Bewußtsein, d.i. ein solches, in welchen zugleich Erfindung ist".

[554] Cf. Pierobon [2003] p. 188.

[555] Tanto es así que Pierobon habla en la p. 191 de un sentido metafórico de la palabra causación en el siguiente pasaje de Kant (*KRV* B 210): "Wenn man diese Realität als Ursache (es sei der Empfindung oder anderer Realität in der Erscheinung, z.b. einer Veränderung,) betrachtet; so nennt man den Grad der Realität als Ursache, ein Moment".

[556] Cf. Pierobon [2003] p. 187: "*la grandeur intensive est le différentiel*, classiquement réduit à l'instant, *entre une sensation* que l'on peut provisoriremente énoncer comme étant extérieruement causée par ce qu'il faudra bien appeler une réalité «extérieure», *et la sensation de la sensation,* c'est-à-dire la conscience empirique".

[557] Cf. Kant [IV] p. 551: "Die Wirkung einer bewegenden Kraft auf einen Körper in einem Augenblicke ist die Sollicitation desselben, die gewirkte Geschwindigkeit des letzteren durch die Sollicitation, so fern sie in gleichem Verhältniß mit der Zeit wachsen kann, ist das Moment der Acceleration".

[558] Cf. para esto último Newton [1999] pp. 646 y 647.

momento a lo que nosotros denominaríamos diferencial de una cantidad, mientras que para el Kant de los *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (*MAN*), el momento es el cociente de diferenciales. El problema de esta infidelidad es que Kant, siguiendo la advertencia de Newton en la que prevenía al lector de considerar los momentos como magnitudes infinitesimales, afirmará el carácter infinitesimal del momento "velocidad"[559]. Lo cierto es que no es la misma velocidad o, newtonianamente hablando, el cociente de los momentos, lo que ha de ser infinitesimal, sino los momentos mismos, es decir, el espacio y el tiempo[560].

Una vez sentado esto, podemos entrar a analizar la afirmación de Pierobon según el cual, como se ha dicho, la magnitud intensiva es el diferencial entre la sensación y la sensación de la sensación. Empecemos por ver que esta tesis no concuerda con la exposición de las anticipaciones de la percepción que nos ofrece el mismo Kant. En primer lugar, por que Kant utiliza el término de grado para denominar a la sensación, a la "réalité «extérieure»". Según esto, la magnitud intensiva no sería ya "le différentiel [...] entre une sensation [...] et la sensation de la sensation", sino que el grado sería algo de la sensación[561]. Pero asignar un grado a la sensación es, al mismo tiempo (*zugleich*), asignar un grado a la sensación de la sensación o conciencia empírica[562]. Es más, Kant considera que el grado de la Realidad es, en cuanto que es causa de la Sensación, un momento. Y ello, dirá Kant[563], por el hecho de que la aprehensión del grado no es algo sucesivo, sino algo instantáneo. El hecho de introducir un elemento de instantaneidad en la argumentación introduce un elemento temporal infinitesimal, que denominaremos *dt*, en la argumentación. Este infinitesimal será el denominador del cociente de diferenciales. De este modo, el tiempo *de la* conciencia cumple el mismo papel que cumplía la ley de la inercia[564] cuando lo que se pretendía explicar era el movimiento acelerado. El numerador del cociente del momento no es, en contra de lo que afirma Pierobon[565], la diferencia entre la sensación exterior y la sensación de la conciencia, sino el grado de llenado de la realidad del fenómeno en un tiempo dado. Podemos incluso ir más allá en la analogía entre lo que tenía lugar en las *MAN* y lo que se describe ahora en las anticipaciones de la percepción. En efecto, lo que en las *MAN* era la *Sollicitation* de un cuerpo sobre otro es, en la *KrV*, la Realität como causa de la sensación. La sensación, lo causado, es

---

559 Cf. Kant [IV] p. 551: "Das Moment der Acceleration muß also nur eine unendlich kleine Geschwindigkeit enthalten, weil sonst der Körper durch dasselbe in einer gegebenen Zeit eine unendliche Geschwindigkeit erlangen würde, welche unmöglich ist".

560 El problema para cuya solución afirmaba Kant el carácter infinitesimal de las velocidades era que, de no ser así, la velocidad final del cuerpo después de un número infinito de solicitaciones, es decir, la velocidad alcanzada después de cualquier aceleración, habría de ser infinita. Parece que Kant olvida aquí la distinción, introducida por él mismo, entre la forma de sumar las magnitudes extensivas y la forma de sumar las magnitudes intensivas. Cf. Kant [IV] p. 493: "es ist nicht für sich klar, daß eine gegebene Geschwindigkeit aus kleinern und eine Schnelligkeit aus Langsamkeiten eben so bestehe, wie ein Raum aus kleineren; denn die Theile der Geschwindigkeit sind nicht außerhalb einander, wie die Theile des Raumes, und wenn jene als Größe betrachtet werden soll, so muß der Begriff ihrer Größe, da sie intensiv ist, auf andere Art construirt werden, als der der extensiven Größe des Raumes".

561 Kant utiliza indistintamente los términos sensación (*Empfindung*) (en B208) y realidad (*Realität*) (en B210) para nombrar aquello que es capaz de tener un grado.

562 Cf. el comienzo del apartado de las anticipaciones de la percepción: "Wahrnehmung ist das empirische Bewußtsein, d.i. ein solches, in welchem zugleich Empfindung ist" (B207). Es decir, cuando tengo un bolígrafo en la mano no estoy percibiendo la sensación de un bolígrafo, sino que estoy percibiendo un bolígrafo.

563 Cf. B210: "Wenn man diese Realität als Ursache (es sei der Empfindung, oder anderer Realität in der Erscheinung, z.B. einer Veränderung) betrachtet: so nennt man den Grad der Realität als Ursache ein Moment, z.B. das Moment der Schwere, und zwar darum, weil der Grad nur die Größe bezeichnet, deren Apprehension nicht successiv, sondern augenblicklich ist".

564 Cf. Kant [IV] p. 553: "Diese *lex continui* gründet sich auf dem Gesetze der Trägheit der Materie".

565 Es más, Pierobon ni siquiera hará uso del cociente de diferenciales en su exposición si bien es verdad que define el momento (en Pierobon [2003] p. 191) como un *rapport différentiel*.

en las *MAN* un desplazamiento. Del mismo modo en que se postula la proporcionalidad entre la fuerza y el espacio[566], se postula también la proporcionalidad o, si llegamos a normar la proporcionalidad, la igualdad entre la magnitud de la Realidad y la sensación[567]. En el límite, es decir, cuando lo que tenemos es un cociente entre un desplazamiento infinitesimal y un tiempo infinitesimal, por un lado, el cociente entre un un llenado infintesimal y un tiempo infinitesimal, por el otro, lo que tendremos será la velocidad de la que se *compone* la aceleración, en un lado, y el grado de la consta la experiencia, por el otro. Si bien es cierto que en el límite el espacio recorrido tiende a cero, el cociente que expresa la velocidad puede tomar cualquier valor finito. Del mismo modo, al hacer el tiempo cada vez más pequeño, el grado de llenado será también cada vez más pequeño sin que el cociente del grado tenga por qué anularse.

Esta sería, frente a Cohen y Pierobon, nuestra lectura del papel del cociente de diferenciales en las anticipaciones de la percepción de Kant. Con ello estaríamos muy lejos de encontrar un trabajo filosófico del cociente de diferenciales en la filosofía crítica. No hay en Kant un lugar sistemático en el que situar el cociente de diferenciales. Con esto queremos afirmar que el uso del mismo en las anticipaciones de la percepción es mas bien ilustrativo. Se podría incluso preguntar si la introducción de los infinitesimales no llega a oscurecer el motivo principal de la Anticipaciones que es el de introducir la forma de la *quiditas* del fenómeno en la parte ontológica de la filosofía crítica. En efecto, como resultado de nuestra analogía entre las *MAN* y las anticipaciones de la percepción habíamos obtenido la expresión de una relación entre dos *magnitudes* evanescentes. Esto nos había llevado a rebasar los límites del marco categorial responsable de las anticipaciones de la percepción –las categorías de la cualidad–, situándonos dentro de las denominadas categorías de la relación. Esta intromisión en un terreno ajeno, daba lugar a la apariencia de la identidad entre el cociente de diferenciales[568] y el concepto de magnitud intensiva. Esta identidad, como ya hemos apuntado, no tiene lugar en el texto de la *Kritik der reinen Vernunft*. Es sólo cuando se introduce el elemento de la instantaneidad en la percepción del grado cuando la relación entre el grado y el tiempo en el que es percibido puede únicamente ser representado mediante el cociente de diferenciales. Esta introducción de la instantaneidad y su homólogo, la causalidad, eran solo mencionados por Kant de pasada (*beiläufig*) y no hacia más que desviar la atención sobre la verdadera naturaleza del concepto de grado en Kant.

Y es que, el Grado no es algo cuya magnitud tenga que ser infintesimal. El grado de realidad de algo puede ser expresado por cualquier número real. Para entender qué quiere decir Kant con eso de que el Grado es aquella magnitud cuya pluralidad es sólo representable por aproximación a la negación =0, no hay más que servirse de los ejemplos que él mismo introduce en la exposición de las anticipaciones de la percepción. El primero de ellos, un ejemplo cuyo papel en este apartado no ha sido comprendido por la literatura secundaria, es el de los 13 Taleros[569]. Estos trece taleros, nos dice Kant, pueden ser comprendidos como un Cuanto (*Quantum*) o como un Agregado (*Aggregat*). En el segundo caso, el mismo algo es considerado bajo el aspecto de la magnitud extensiva. Las trece monedas son contadas una tras otra, sucesivamente, y consideradas como un todo al final de la síntesis productiva. En el primer caso en cambio, el mismo algo es considerado como un Cuanto intensivo. La intensidad del algo es, en este caso, el grado de pureza de los taleros, a saber el grado de contenido en plata. El caso es que podemos imaginar un grado de pureza fijo, el de la plata

---

[566] Sirva como ejemplo Newton [1999] p. 418.
[567] Algo que se hace, como hemos visto, nada mas iniciar las Anticipaciones de la Percepción en su segunda edición.
[568] Algo que, como veremos, es propio de la categoría de la relación tanto para Hegel como para Kant.
[569] Cf. *KrV* B212.

pura, e ir obteniendo purezas menos puras mediante una regla ya conocida por la mecánica de los antiguos[570]: la nueva acuñación es tantas veces más impura cuantas más veces es capaz de producir una volumen[571] de masa monetizable. Con ello, obtenemos relaciones de intercambio equivalentes con distintos grados de pureza monetaria[572].

El mismo Kant, al final del mismo apartado[573], hace uso de otro ejemplo que es, en última instancia, exáctamente análogo al de los taleros. Esta vez, la magnitud extensiva es representada por una superficie iluminada y la luminosidad es la magnitud intensiva de la misma. En esta ocasión, Kant hablará de que podemos abstraer completamente la magnitud extensiva. Con ello no se puede querer afirmar que la superficie es, de facto, eliminable, sino que, más bien, podemos obtener la misma sensación de excitación (*Erregung*) dejando el lado de la magnitud extensiva constante y variando únicamente la luminosidad o intensidad de la luz[574]. De este modo, la sensación que obtenemos no es algo que tenga lugar sucesivamente, mediante una síntesis progresiva de lo homogéneo, sino, digamos, de golpe, de una sola vez o en una unidad[575]. La cantidad o pluralidad de la sensación así recibida no es representable más que comparando nuestra sensación inicial con grados distintos de la misma cualidad. Sin embargo, no es posible fijar la distancia con respecto a un grado menor o mayor de cualidad sin que tengamos una unidad de medida mediante la cual medir esta distancia. Esta unidad de medida, aquello que nos permitirá decir cuánto de cualidad tenemos en una sensación en terminos absolutos o en relación a otro grado de realidad, es únicamente obtenible representando el grado cero de llenado de la realidad y repartiendo la distancia entre este cero y la unidad primera en partes alicuotas. Cada una de las partes así obtenidas nos permitirá determinar la pluralidad de las magntidudes intensivas de la cualidad inicial[576]. Con ello no hacemos otra cosa que construir lo que se denomina una escala isótropa sobre los extremos de una cualidad inicial –p.e., el grado de temperatura en el que hierve el agua– y el grado cero de esa cualidad –el grado en el que llega a congelarse el agua[577]–, dividiendo la escala, por ejemplo, en 100 partes iguales.

---

570 En los antiguos se decía: en equilibrio, los pesos de la balanza son inversamente proporcionales a sus respectivas distancias al fulcro. En el caso de los 13 Taleros, el estado de equilibrio es transformado en el estado de intercambio justo: si me das una moneda cuatro veces mas impura que la mia, deberás darme cuatro de esas monedas. Del mismo modo en que, en la balanza, se supone que el peso es resultado de la atracción ejercida por un mismo cuerpo –a saber, la Tierra– y no dos –uno para cada cuerpo– , las condiciones del intercambio justo presuponen que el adulterante utilizado en la rebaja de la pureza es siempre el mismo. En fin, el peso y el grado de pureza representan la magnitud intensiva, mientras que la distancia y la superficie (volumen) representan la magnitud extensiva. Con esta lectura que aquí presentamos, es posible comprender las palabras, en un principio enigmáticas, de Kant cuando afirma lo siguiente: “Da nun bei aller Zahl doch Einheit zum Grunde liegen muß, so ist die Erscheinung als Einheit ein Quantum und als ein solches jederzeit ein Continuum” (en B212). Kant no afirma aquí otra cosa que la propiedad de la continuidad para la magnitud extensiva, en este caso, para la unidad de medida espacial que ha sido establecida para facilitar las cuentas.

571 Por motivos de simplicidad en la exposición, supondremos que la moneda es una realidad meramente bidimesional.

572 Suponiendo, obviamente, que ni la acuñación de la moneda ni la obtención del material con el que se la adultera suponen trabajo –socialmente necesario– alguno.

573 Cf. *KrV* B217.

574 Justo lo contrario de lo que ocurría, *de facto,* en el intercambio que hacía uso de la moneda acuñada en un metal precioso. En ésta, es la ley la que fija la intensidad o pureza del metal y, en base a ello, el volumen de la moneda será la expresión del valor. Tanto es así que el término “ley” pasará a identificarse con el de “pureza”, describiendo el porcentaje de oro o plata contenido en las monedas de oro y plata, respectivamente. La ley para el oro son los quilates –el oro puro tiene 24 quilates, siendo así un quilate equivalente a 41.66 milésimas–, mientras que la ley para la plata es el dinero –a la plata pura se le asigna una valor de 12 dineros, resultando así que un dinero equivale 83.33 milésimas.

575 Recuérdese, “die nur als Einheit apprehendiert wird”.

576 Recuérdese, “in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann”.

577 Grado cero de temperatura que no es, efectivamente, “ni frio ni calor”, sino, como todo el mundo sabe, frio. Ello se debe a que la temperatura no es una escala en la que se mida la sensación térmica, sino una en la que se

Como es obvio, todo este razonamiento en el que se ha supuesto como base extensiva el espacio es perfectamente aplicable al caso en el que lo extensivo es el tiempo mismo. Así, dice Kant en una nota de su ejemplar de la *KrV*[578], la sensación de comodidad es algo que puede ser más o menos extenso y, además de ello, más o menos intenso. La extensión se remite, en este caso, a la duración temporal de esta sensación de comodidad. La dificultad que muestran este tipo de sensaciones a la hora de ser representadas sobre una escala obedece a la dificultad de encontrar un juez veráz que de con la justa equivalencia entre distintas combinaciones de intensidades de la sensación "comodidad" y las respectivas duraciones[579].

En definitiva, hemos visto que las magnitudes intensivas no son identificables en Kant con las *magnitudes* infinitesimales, y que no tienen más que ver con los infinitesimales que las magnitudes extensivas. Ambas magnitudes, las intensivas y las extensivas, son magnitudes continuas, es decir, magnitudes que carecen de partes que sean indivisibles. Por esta razón, las dos magnitudes son igual de susceptibles de un tratamiento infinitesimal. La necesidad de un tratamiento tal es, como apuntaba ya Kant *beiläufig*, algo que forma parte, no ya, de la tríada de las categorías de la Cantidad ni de la Cualidad, sino de la categoría de la Relación. Con ello dejamos pendiente para otra ocasión la tarea de mostrar cómo el cociente de diferenciales es algo cuya *possibilitas* es, en efecto, formulada en la tercera tríada de las categorías del entendimiento. Con este desplazamiento del lugar del cociente de diferenciales desde la segunda tríada a la tercera no hacemos otra cosa que aproximar el planteamiento kantiano al de Hegel. Veremos así que este último autor localiza el cociente de diferenciales al final de la categoría de la Cantidad, en aquel lugar en el que ésta retorna mediada a la Cualidad. Este lugar no es ya, como en Kant, el de las categorías de la Relación, sino el de la Relación cuantitativa. Para ver cómo efectivamente esto resulta ser así, tenemos que ver cómo tiene lugar el traspaso del Grado, momento en el que habíamos dejado nuestra exposición de la *Wissenschaft der Logik*, a la Relación cuantitativa. Este será precisamente la tarea del siguiente apartado.

Antes de comenzar con ello, resulta oportuno subrayar las concordancias entre el movimiento de la *Wissenschaft der Logik* y el de la *Kritik der reinen Vernunft*. Resulta fácil pasar por alto este paralelismo si se atiende únicamente a los epígrafes de estas dos obras. Así, se ha llamado la atención sobre el hecho de que el orden de las categorías de la Cantidad y de la Cualidad en la *Wissenschaft der Logik* está invertido en relación al orden[580] que tiene en la *Kritik der reinen Vernunft*. Con ello se olvida que la forma de la categoría de la Cualidad, a saber, el Grado, es algo que en Hegel forma parte de la Cantidad. Desde esta perspectiva, no hay una inversión de las dos primeras triadas de categorías kantianas en Hegel, sino, más bien, la incorporación de una nueva cuyo papel tiene más que ver en la *WL* con el de la forma de la sensibilidad en la *KrV*[581]. Por otro lado, el que el orden de la *KrV* no sea uno generativo

---

mide el calor físico. La sensación térmica depende de variables como la humedad, la velocidad del viento, el calor que produce el propio cuerp o el abrigo que proporciona la grasa del cuerpo de uno. Una escala en la que 0 fuese "ni frio ni calor" sería así una escala distinta para cada una de estas variables de las que depende la sensación térmica, es decir, sería una escala no válida para cualquiera.

[578] Cf. Kant [XXIII] p. 29: "Daher geht der Begriff einer extensiven Größe auch nicht blos auf das, worin Extension ist, d.i. blos auf äußere Anschauung. Das Wohlbefinden hat extensive Größe nach der Länge der Zeit, die mit Annehmlichkeit verlebt wurde, aber auch *intensive* noch einen Grad dieser Annehmlichkeit".

[579] Algo que, en el caso de las mercancias, pretenden expresar las funciones de indiferencia del análisis microeconómico.

[580] Dentro de los márgenes en los se puede hablar de "orden" en la *KrV*. Este margen será el delimitado por la sistematicidad de la obra en cuestión y no, al menos en principio, por algo que tenga que ver con generación o movimiento interno del material tal y como ocurre en Hegel.

[581] En efecto, si bien no es éste el lugar ni la ocasión para sostener una afirmación tal, nótese el carácter inmediato tanto de la Cualidad en Hegel como de la intuición en Kant. Añádase a esto el marco de resolución de

no quiere decir que no haya un orden, digamos, sincrónico o de remisión entre las distintas partes de las que ésta está constituida. Así, por ejemplo, no es posible pensar la pluralidad –la intuición– sin la unidad –el concepto– ni viceversa. Tampoco es posible pensar la percepción de una sensación sin que haya un soporte extenso, sea éste temporal o espacial, en el que tenga lugar ese qué. Es decir, no se puede pensar la magnitud intensiva sin la magnitud extensiva ni viceversa[582]. En este sentido, ya hemos visto que cuando Kant hablaba de poder abstraer la magnitud extensiva no se refería a una eliminación total de la misma. Esta eliminación o, mejor dicho, la evanescencia de estas dos magnitudes tendrá lugar en la siguiente tríada de las Categorías, la de la Relación. Como veremos, el evanescer de algo no significará la simple desaparición del mismo, de modo que tampoco tendremos aquí una categoría que se desatiende de las demás.

Terminamos este apartado llamando la atención sobre la deuda de Hegel con respecto a Kant en relación a la idea de intercambiabilidad entre las magnitudes intensivas y extensivas dentro de cada espectro de excitación. Esta idea será conceptualmente fundamentada dentro de la *WL* en donde se demostrará la necesidad interna de que ello sea así. La magnitud intensiva y extensiva serán así momentos del Cuanto de modo tal que la magnitud de un algo tiene que manifestarse indistintamente en estos dos marcos que serán identificados con lo externo y lo interno en la primera observación del apartado *Identität der extensiven und intensiven Größe*[583].

3.1.3 La Infinitud Cuantitativa

Con el Grado habíamos obtenido una modalidad de Cuanto, el Cuanto que es para sí[584], cuya determinación era estar esencialmente en relación con algo exterior[585]. En este sentido el Grado era ya el retorno de la Cualidad a la Cantidad. Sin embargo, el Grado no dejaba de ser algo Cuantitativo, es decir, algo cuyo límite le es indiferente (*Gleichgültig*) o exterior (*Äußerlich*). Tenemos con ello dos lados dentro del Cuanto:

---

problemas de caracter ὅτι ἐστιν en el que ambos ámbitos se situan. Por último, aquello específico de la filosofía kantiana, la finitud humana, y de la hegeliana, la infinitud del saber absoluto, tienen su origen en estos marcos. En efecto, la finitud kantiana se fundamentan en la receptividad de la sensibilidad y en el tiempo, algo nunca dable en su totalidad, como forma del sentido interno. A su vez, la infinitud hegeliana tiene su primera aparición al final de la Cualidad, en el Ser-para-sí.

582 Resulta algo más problemático defender la inpensabilidad de la Cantidad sin la Cualidad en Kant. Así, cabría pensar que es algo muy distinto contar perros o piedras que contar unos. En este último caso, se diría, no hay nada *quiditativo* en la percepción de los unos. Sin embargo –se podría responder– el que algo no tenga ningún contenido quiditativo no significa que percibir eso sea lo mismo que no percibir nada. Tiene que haber algo que haga posible distinguir un otro y el siguiente otro de la nada que se interpone entre ellos. Si el contenido de este algo somos *nosotros* mismos, a saber, el sentido interno, quede aquí sin resolver. Responder con un sí a esto implicaría defender que la conciencia pura a la vez que produce el tiempo (Cf. B182) es capaz de darle un contenido que es, y aquí reside la dificultad, meramente formal. Otra posible solución iría en la dirección de afirmar que la diferencia formal quiditativa entre el uno y otro uno consiste en que éste ha sido el primero y el otro el segundo.

583 Cf. Hegel [1985] p. 215: "Die Größe eines konkreteren Gegenstandes stellt ihre gedoppelte Seite, extensiv und intensiv zu sein, an den gedoppelten Bestimmungen seines Daseins dar, in deren einer er als ein Äußerliches, in der anderen aber als ein Innerliches erscheint".

584 Cf. Hegel [1978] p. 138.

585 Nótese que decir que algo es para-sí y decir que algo está esencialmente determinado en su relación a otro es una y la misma cosa. En efecto, en los dos casos lo que hay es un retorno mediado o negación de la negación.

1) por un lado, el Cuanto es algo cuyo límite o determinidad le es indiferente. Esta determinidad superada o indiferente es la determinidad cuantitativa[586]. Este es el lado por el cual el Cuanto es algo finito.

2) por otro lado, el Cuanto es algo que tienen en sí el estar determinado o estar en relación con otro. A este lado se debe la infinitud del Cuanto, el que el Cuanto sea, como el *Dasein*, algo afectado por el deber (*Sollen*). En este caso, el deber es el de estar determinado en sí mismo.

En base a este segundo lado, el Cuanto, en su ir más allá de sí (*Hinausgehen*), se referirá a su más allá como algo a lo cual se opone. Ello se debe a que el límite cualitativo, a diferencia del cuantitativo, considera a los elementos limitados en una relación de oposición[587]. Este más allá del Cuanto, eso que es lo que él no es, es el Infinito. De ahí que, desde la perspectiva del límite cualitativo, el Cuanto tendrá como absolutamente opuesto lo Infinito. Sin embargo, el límite del Cuanto, en la medida en que es algo que tiene lugar en la Cantidad es algo que le es indiferente. En este sentido, la oposición entre el Cuanto y la Infinitud o más allá se disuelve. El Cuanto es unidad inmediata[588] con su más allá: aquello que era más allá es así, él también, un Cuanto. Este proceso de ir más allá de sí para no encontrarse en su más allá otra cosas que sí mismo es el proceso[589] infinito. Este proceso consiste en lo siguiente en la Cantidad: a saber, en que el Cuanto tiene en su concepto el tener un más allá de sí[590]. Hemos visto que el poner esto que estaba en el concepto del Cuanto era algo que tenía lugar en el Grado[591]. En la medida en que el más allá lo es no sólo para este u aquel Cuanto, sino para el Cuanto en cuanto tal, el más allá será el Infinito[592]. Pues bien, debido a que el límite del Cuanto es un límite superado, este más allá estará en continuidad con el Cuanto y será él mismo un Cuanto. Con ello el más allá será, a su vez, un Cuanto y por ello, algo que se encuentra más acá. A este proceso de repetido poner, superación del poner, reponer, etc. es a lo que llama Hegel el proceso Infinito.

Ya habrá notado el lector que Hegel utiliza el término Infinito dentro del mismo apartado con dos significados distintos. Sobra decir que ninguno de ellos es el infinito de veras con el que nos habíamos encontrado en la Infinitud cualitativa. Al contrario, estos dos Infinitos son, más bien, asimilables en la categoría de la “mala infinitud”[593]. El primero de ellos, el Infinito como más allá del Cuanto como tal, no es más que una ilusión resultado de haber olvidado que el límite del Cuanto es un límite cuantitativo. Este Infinito tiene lugar

---

[586] Puede ser útil ofrecer al lector la siguiente serie de igualdades que hemos obtenido basándonos en la primera edición de la *LS*: aufgehoben gesetzte Bestimmtheit = gleichgültige Bestimmtheit = gleichgültige Grenze = aufgehobener Unterschied = quantitative Bestimmtheit.
[587] Cf. sobre el límite cualitativo Hegel [1985] p. 126. Sobre la diferencia entre los dos límites, el cualitativo y el cuantitativo, cf. Hegel [1985] p. 220.
[588] No una unidad mediada por el concepto como en la Cualidad.
[589] Evitamos traducir el término alemán “Progreß” por “progreso” por que con el término alemán Hegel pretende expresar el carácter repetitivo en el que está atrapado el entendimiento en la relación cuantitativa sin que la repetición tenga ninguna connotación de avance (*Fortgehen*). Cf. al respecto Hegel [1978] p. 142: “Es ist nicht sowohl ein Fortgehen sondern ein Wiederholen von einem und eben demselben, Setzen, Aufheben und Wiedersetzen und Wiederaufheben”.
[590] Cf. Hegel [1985] p. 220: “Das Quantum hat es in seinem Begriff, ein Jenseits seiner zu haben”.
[591] De ahí que, recordemos, el Grado era el Cuanto tal y como es según su concepto. Cf. Hegel [1985] pp. 210 y 211: “das Quantum [ist] als intensives Quantum […] wie es seinem Begriff nach oder an sich ist”.
[592] Cf. Hegel [1985] p. 218: “Aber dieses ist das Andere nicht nur eines Quantums, sondern des Quantums selbst, das Negative als eines Begrenzten, somit seine Unbegrenztheit, Unendlichkeit”.
[593] Sobre la asimilación del proceso Infinito en la mala infinitud cf. Hegel [1985] p. 222: “Diese Unendlichkeit, welche als das Jenseits des Endlichen beharrlich ist, ist als die schlechte quantitative Unendlichkeit zu bezeichnen”.

cuando nos quedamos únicamente con el límite inmediato del Cuanto, el límite cualitativo, sin llegar a ver que en la Cantidad este límite ha sido ya superado. Quede sentado esto en lo que se refiere al primer Infinito. En relación al segundo cabe decir lo siguiente: este Infinito no es ya ningún polo de la referencia, sino la referencia misma. Este es el infinito del proceso o del entendimiento. Es el infinito malo en el que cada polo no hace más que remitir a su otro polo sin que el proceso llegue nunca a terminar. Este proceso Infinito es la primera negación del Infinito. Frente a estos dos Infinitos, el Infinito verdadero será dentro de la Cantidad aquel Infinito que se haga cargo de este proceso Infinito o mal Infinito. En este sentido, este infinito será la negación de la negación o segunda negación del primer Infinito. La asunción o superación que tienen lugar en el Infinito de veras consistirá en obtener una expresión en la que el Cuanto retorne mediatamente a sí y sea, con ello, un Cuanto cualitativo.

El proceso del Infinito cuantitativo es como tal una regla de construcción que, si es recogida en una expresión, puede tomar la forma de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Los dos se basan en la definición de la magnitud según el cual esta es aquello que puede aumentarse o disminuirse[594]. Lo infinitamente grande es aquello que entra en un proceso infinito de aumento. A su vez, lo infinitamente pequeño es lo que se encuentra en un proceso infinito de disminución. Lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande son expresiones de la contradicción y no la solución a la contradicción que ellas representan. Las dos expresiones son resultado de considerar como terminado o cerrado un proceso cuya infinitud consiste precisamente en no poder ser nunca consumible. Así, lo infinitamente pequeño pretende cerrar la serie de las síntesis sucesivas hacia el valor cero sin que llegue a tomar este valor. Es decir, lo infinitamente pequeño es la expresión contradictoria que consistente en afirmar, 1) que debe de ser un cuanto y no nada, no cero, y 2) que debe ser menor que cualquier cuanto dado y, por ende, no debe ser ya cuanto ninguno. Hegel se refiere a esta última exigencia cuando habla del deber ser Infinito de lo infinitamente pequeño[595]. Algo análogo ocurre con la expresión para lo infinitamente grande. La diferencia es que ahora la tarea consiste en conseguir dar con un Cuanto mayor que cualquier otro Cuanto sin dejar por ello de ser un Cuanto.

Nótese que la contradicción cuyas expresiones eran lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande era ya evidente en las expresiones mismas. Así, lo infinitamente pequeño es aquello cuya pequeñez no puede superarse. A su vez, lo infinitamente grande es aquello cuya grandeza es insuperable. La contradicción es, si cabe, más manifiesta en la expresión “proceso Infinito” origen de ambas expresiones. En efecto, el primer término, –“proceso”–, apunta a algo no terminado, a algo que es capaz de aumento o disminución, mientras que el adjetivo “infinito” significa perfección o acabamiento del proceso que cualifica[596]. La expresión “proceso Infinito” y sus respectivas variantes, lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, son, por ello, una *contradictio in adiecto*.

Esto último no significa que el proceso Infinito sea un resultado falso. No se trata de error o falsedad, sino de necesidad del desarrollo lógico. Haciendo uso de la terminología de la que más de una vez hemos hecho uso en este trabajo, cabría decir que el proceso Infinito es parte del momento dialéctico del movimiento de la Cantidad. La tercera y definitiva etapa con

---

[594] No nos interesa ahora detenernos en la acertada crítica que hace Hegel de esta definición. Cf. el apartado 4.2.3.3 para tal fin.

[595] Cf. Hegel [1985] p. 221: “Es [se refiere a “Unendlichgroße”, pero podría valer también para “Unendlichkleine”.J.Z.] ist nur der ins Engere gebrachte Ausdruck des Widerspruchs; es soll ein Großes, d.i. ein Quantum, und unendlich, d.i. kein Quantum sein”.

[596] En el sentido de que un infinito actual habla de cubrir la totalidad de los casos posibles del campo en el que se aplica el término “proceso”.

el que concluye la sección dedicada a la Cantidad, aquello que llamábamos lo especulativo, es la denominada Relación cuantitativa (*Quantitative Verhältnis*). Veamos cómo tiene esto lugar.

El proceso Infinito es ya aquello que es el concepto de Cantidad o la Cantidad en sí. Lo que ocurre es que el entendimiento no puede más que unilateralizar el movimiento circular[597] expresado por el proceso. De este modo, en el entendimiento tendremos una de dos: o bien se parte de un Cuanto para ir más allá de sí, o bien, partiendo de este más allá se retorna al Cuanto nuevamente. El problema, la limitación propia del entendimiento, consiste en que el retorno desde el más allá al Cuanto, la negación del más allá o de la Infinitud, no es una negación de la negación o superación de la superación. Esto significa que el retorno del Cuanto a sí no es un retorno mediado o para sí: el retorno no es algo cualitativo. El momento especulativo consiste en obtener un retorno mediado, una negación de la negación del más allá o una relación consigo mismo del Cuanto. Para ello resulta necesario no unilateralizar el movimiento circular del proceso, considerar el proceso de retorno como un tal proceso de retorno y no como un simple viaje de ida, en suma, obtener una negación de la negación y no, meramente, una negación abstracta. Se trata así de ver la unidad del proceso al Infinito, la unidad consistente en, por una lado la negación del Cuanto en su más allá y, por otro lado, la negación de este mismo más allá. Se trata, en definitiva, de obtener la figura en el que el Cuanto tenga una referencia a un más allá, es decir, esté determinado cualitativamente, y, además de ello, que este más allá no sea otra cosa que un Cuanto. El Cuanto debe poder determinarse en otro Cuanto en la etapa especulativa. Pero además de ello, si resulta que este otro Cuanto no es más que la negación del primero, tendremos que el primer Cuanto no hace más que referirse a sí en su exterioridad:

es bezieht sich durch sich selbst auf seine Äußerlichkeit; diese aber macht sein Ansichbestimmtsein aus, und die Natur seines Ansichbestimmtseins besteht in dieser Äußerlichkeit[598]

Es decir, el más allá o la Infinitud no es algo que el Cuanto tenga fuera de sí. Con ello no se quiere decir otra cosa que el Cuanto, en su concepto, es en sí mismo cualitativo[599]. Y por cualidad no se entiende otra cosa que el Ser-para-sí o retorno mediado al que habíamos llegado al final del movimiento de la Cualidad. Que el Cuanto es Ser-para-sí significa con ello que la referencia a sí es producto de la negación de la negación, es una negación mediada por lo que el Infinito no estará ya más allá del Cuanto porque la determinación del Cuanto no lo tiene en algo otro. Aquello que corresponde a esta figura, aquello que consiste en una Cuanta[600] en unión con otra Cuanta, una unión en la que el Cuantum se verá determinado, esto será la Relación cuantitativa:

[597] Cf. sobre el círculo expresado por el proceso Infinito Hegel [1978] p. 151: “Dieser Kreis ist das Wahrhafte, was im unendlichen Progreß gesetzt ist”.
[598] Cf. Hegel [1978] p. 152.
[599] Lo Infinito, dirá Hegel, no es de hecho otra cosa que la Cualidad. Cf. Hegel [1978] p. 153: “Das Unendliche [...] ist in der Tat nichts anderes als die Qualität”.
[600] Traducimos al español “Quanta” por Cuanta. Cada uno de los lados de la relación cuantitativa, en la medida en que, en su inmediatez, no están necesariamente remitidos uno al otro son denominados por Hegel Cuanta. El Cuanto de la Relación cuantitativa es el exponente.

Das Quantum ist hiermit gesetzt als von sich repelliert, womit also zwei Quanta sind, die jedoch aufgehoben, nur als Momente einer Einheit sind, und diese Einheit ist die Bestimmtheit des Quantums[601]

En efecto en la relación cuantitativa el Cuanto, el Exponente, es el que es en virtud de la Unión de los Cuanta entre sí. El Cuanto en sí no es ninguno de los dos Cuanta de la relación, sino Unión o la relación misma. A este Cuanto que expresa el valor de la Relación cuantitativa denominará Hegel el Exponente (*der Exponent*). Tenemos con ello, por un lado, dos Cuanta que se refieren una a la otra y la otra a la una y, por otro lado, la unión de ellas que consituye la Determinidad del Cuanto o exponente. La Relación cuantitativa inmediata tiene así la forma siguiente:

$$\text{Relación cuantitativa: } \frac{\text{Cuanta}_1}{\text{Cuanta}_2} = \text{Exponent (Quantum)}$$

En esta expresión podemos apreciar que el Cuanto o Exponente está determinado cualitativamente, es decir, mediante una Relación de un Cuanta a otro Cuanta que, en la medida en que los dos son lo que son en la unión, es una Relación de un Cuanta consigo mismo. El que, efectivamente, se trata de una referencia de un Cuanto a otro Cuanto es expresado por la parte izquierda de la expresión general de la Relación cuantitativa. El que la Unión constituye la Determinidad del Cuanto es algo reflejado en la parte derecha de la expresión.

La Relación cuantitativa, en su manifestación inmediata, es la relación directa. En ella el cociente entre dos varibles es siempre igual al exponente. Los dos lados de la relación directa son denominados por Hegel Cuanta, debido a que cada lado mantiene su significado fuera de la relación misma. Cuando esto no es ya así, cuando los lados de la Relación cuantitativa son los que son sólo dentro de la Relación cuantitativa, entonces, los lados no serán ya Cuanta sino Momentos. Esta Relación cuantitativa, digamos, *evolucionada* es el cociente de diferenciales. En el cociente de diferenciales el retorno de la Cantidad a la Cualidad estará consumado, el Cuanto de algo será estrictamente Cualitativo.

3.2 LA RELACIÓN CUANTITATIVA (*das Quantitative Verhältnis*)

Habíamos llegado a un punto de nuestra exposición en el que el Cuanto había alcanzado el momento cualitativo, es decir, un momento en el que en su remitirse a un otro fuera de sí no hacía más que referirse a sí. A esta nueva figura lógica se le llamó la Relación Cuantitativa. En la relación Cuantitativa habrá que recorrer las ya conocidas tres etapas que caracterizan cada piso del edificio lógico de la *LS*. De ahí que, junto con la manifestación inmediata de la Relación Cuantitativa, tengamos también una manifestación negativa o dialéctica y una especulativa o de retorno. La primera de ellas es la que tiene lugar en la relación directa. La segunda, la figura propia del entendimiento, es la expresada por la relación inversa. Por último, la relación de potencias es la relación exclusivamente especulativa y la que da lugar a la tercera y última categoría: la de la Medida.

[601] Cf. Hegel [1985] p. 236.

Antes de entrar con más detalle en el tema, podemos intentar hacer una especie de preludio[602] de lo que se expondrá en los siguientes tres subapartados. Para ello resulta de gran ayuda tener siempre presente el objetivo cuyo cumplimiento o ponencia propone consumar el apartado sobre la Relación Cuantitativa. Como no podía ser de otro modo, este objetivo no es otro que el de llegar a poner el resultado al que el apartado anterior había llegado. Recordemos que en el apartado dedicado al Cuanto, el Cuanto había terminado por volver sobre sí, se había cualificado. Esto equivalía a que el Cuanto se encontraba a sí mismo en su otro[603]. Este, digamos, reencuentro era lo que se denominaba la Relación Cuantitativa. Así, cuando decimos que el reencuetro tiene primeramente una forma inmediata, no queremos decir otra cosa que en él la diferencia del Cuanto consigo mismo es algo inmediato o indiferente. A su vez, en la relación inversa la diferencia del Cuanto tendrá la forma de una relación cuantitativa negativa. Por último, en la relación de potencias, la diferencia del Cuanto se elimina por lo que el otro del Cuanto será él mismo. Pero veamos qué es lo que quiere decir todo esto.

3.2.1 La Relación directa [y/x=a][604]

Comencemos por hacer notar qué es lo que entiende Hegel por "diferencia del Cuanto" y, por tanto, por "Cuanto" en todo este apartado. Con la diferencia del Cuanto, Hegel no se referirá a la posibilidad que tiene todo Cuanto de poder aumentar o disminuir. Esta determininación es algo exterior o indiferente del Cuanto de cada Cuanto caso. La diferencia no ya de este u otro Cuanto, sino del Cuanto en cuanto Cuanto, la diferencia que tiene el Cuanto en sí o la diferencia cualitativa, es la diferencia expresada por los términos que han sido denominados como "Unidad" (*Einheit*) y "Valor numérico" (*Anzahl*). Estas serán las dos Determinidades con las que habrá que contar si queremos seguir el desarrollo del apartado sobre la Relación cuantitativa.

En la Relación cuantitativa inmediata, es decir, en la relación directa, el límite de los dos Cuanta será ella misma inmediata. Este límite es aquello que determina el valor de cada Cuanto en relación a otro Cuanto y es el exponente *a* de la formula para la relación directa. Que el límite sea "Inmeditato" significa que el exponente es algo dado exteriormente, no definido desde dentro de la estructura "relación directa".

El exponente es, en su manifestación inmediata y preferentemente (*vorzugsweise*)[605], un Valor numérico particular. Este Valor númerico es igual al numerador de un cociente cuando el denominador es un Uno. Este exponente es el límite del numerador y el denominador. Por ello, podría parecer que cuando uno de ellos cambia el otro lo hacer en relación a él. Sin

---

[602] Un resumen muy recomendable del apartado *Die Quantitative Verhältnis* la ofrece el mismo Hegel en Hegel [1978] p. 186: "Im direkten Verhältnis ist diese Qualität des Quantums, der Unterschied seiner von sich selbst zu sein, nur erst überhaupt oder unmittelbar gesetzt, somit noch die Gleichgültigkeit der beiden Seiten des Unterschieds, nicht der Unterschied von sich, sondern von einem Äußerlichen vorhanden. Im umgekehrten Verhältnis ist das Quantum der Unterschied seiner von sich selbst als von seinem Nichtsein, das Verhalten zu sich als zu seiner Negation. Im Potenzenverhältnis endlich ist es der Unterschied seiner als von sich selbst; sein Anderssein durch es selbst bestimmt oder darein schlecht kontinuiert".

[603] Cf. la acertada expresión de la primera edición de la *WL*: "es [das Quantum] findet sich selbst in seinem Jenseits" (en Hegel [1978] p. 179).

[604] Aunque Hegel mismo no diga cuál es la expresión formal que está detrás de cada relación, podemos deducir el mismo en base a lo que en el texto de la *WL* se diga sobre él. Tendremos ocasión de comprobar en la segunda de las relaciones que esto no es siempre tan unívoco como cabría esperar.

[605] Éste es el término inhabitual utilizado por Hegel para denominar lo inmediato (en Hegel [1985] p. 314).

embargo, en una primera aproximación, ya se ha dicho que el exponente es igual al numerador cuando el denominador es un Uno. Esto tendrá que ser así, en la manifestación inmediata, incluso cuando tiene lugar la variación del numerador o del denominador. En efecto, podemos escribir la serie de variaciones de la Relación directa

$$25=25\cdot 1=50/2=75/3=...$$

como

$$25=25\cdot 1=25\cdot 2/2=25\cdot 3/3=...$$

Es decir, en la segunda serie, lo único que cambia es la unidad en la que se expresa el exponente. En relación a esta unidad el valor númerico permanece siempre el mismo:

Das eine, welches als Einheit genommen ist, bleibt, wie groß es werde, immer Einheit, und das andere, wie groß es ebenso dabei werde, muß dieselbe Anzahl jener Einheit bleiben[606]

Desde esta perspectiva, los lados de la relación son Cuanta incompletos. Estos lados no son así, cada uno, una unidad de Valor numérico y Unidad, sino o Valor numérico o Unidad. Son las dos las que hacen un Cuanto[607]. En el ejemplo, el Cuanto 25 hace de Valor numérico mientras que los Cuanta 1, 2/2, 3/3,... hacen de unidad. De este modo, la relación directa esta afectada de una deuda, deber, o negación por poner en el siguiente momento. Ésta consiste en que cada lado de la Relación cuantitativa se comporte negativamente en relación a su otro lado, siendo así que el aumento de uno sea la disminución de otro y viceversa.

Otra deuda de la cual está afectada la Relación directa es la siguiente. El exponente, la unidad de la Relación, debe de ser ella misma la unidad de las diferencias del Cuanto. El exponente debe ser así tanto el Valor numérico como la Unidad. Sin embargo, en la Relación directa no ocurre nada parecido a esto. En efecto, en una Relación tal, el exponente puede funcionar no ya como Valor numérico, como hemos visto, sino, a su vez, como Unidad. Esta indefinición afecta a los lados de la misma Relación. Haremos uso de la notación siguiente[608] para ilustrar esto último:

$$\text{C (exponente)}=\frac{\text{B (Zahler)}}{\text{A (Nenner)}} \qquad [1]$$

---

[606] Cf. Hegel [1985] p. 312. Cf. también Hegel [1978] p. 181: “es wird schlechthin nur das eine, die Einheit, verändert; das heißt, es wird schlechthin nur das eine, die Einheit, verändert, und die andere bestimmte Seite, die Anzahl, bleibt immer dasselbe Quantum”.

[607] Cf. Hegel [1978] p. 181: “Die beiden Seiten des Verhältnisses sind nicht nur bestimmt als Einheit und Anzahl; nach diesen Momenten machen sie nur Ein Quantum”.

[608] Que es la misma de la que hace uso Hegel en Hegel [1985] p. 313.

Pues bien, como decíamos, en esta expresión el exponente C puede hacer las veces de Valor numérico o de Unidad. En el primer caso, el exponente nos proporciona el valor de las veces en las que se mide el Cuanto B en la Unidad A[609]. A su vez, el exponente C puede interpretarse como una Unidad. En este caso, es A el que hará las veces de Valor numérico y C será la Unidad del Cuanto B[610]. De ahí que el exponente, dice Hegel[611], no es en la relación directa lo que debería ser en tanto que un Cuanto cualitativo: unidad de Valor numérico y Unidad.

La relación en el que se van a poner estas dos faltas o deberes que acabamos de mencionar, la relación en la que, 1) el exponente será la unidad del Valor numérico y la Unidad y, 2) la relación entre los Cuanta sea negativa entre sí será la relación inversa.

3.2.2 La Relación inversa o negativa [y+x=a][612]

A diferencia de la relación directa en la que, como hemos visto, lo variable era sólo uno de los lados de la relación, a saber, la Unidad, en la Relación inversa los dos lados de la relación serán variables. Ello se debe a que cada lado es la negación del otro. Pero esto equivale a decir que cada lado es negado por el otro. En este ser negado por el otro es cada uno lo que es. Por esta razón, la negación de otro no es más que negación de sí mismo. A esta negación de otro que, en tanto que retorno, no es más que negación de sí, habíamos llamado la continuidad de algo en otro algo que es sí mismo. El límite de este movimiento de retorno es el exponente. En efecto, el exponente es el límite dentro del cual varían los dos lados de la relación. El exponente es el límite de la limitación mutua de los lados de la relación[613]. Esto significa que cada lado tiene en el exponente el más allá hacia el que se aproximan infinitamente. Ello se debe a que el todo esta puesto doblemente en la relación inversa. Por una parte como suma de los dos lados. Por otra, como falta de cada lado de ser lo que el otro lado ya es. Esto responde a que a cada lado le falta para ser el todo tanto como es el otro lado.

La primera forma de estar puesto el todo es lo que da lugar al proceso infinito. Éste consiste en que cada lado tiene en el otro lo que necesita para ser aquello que es en sí: el exponente. Desde esta forma de estar puesta el todo, la cosa no puede tomar otra figura que el

609 Por ejemplo, en la expresión 25=50/2, 25 son las veces que hay la Unidad 2 en el Cuanto 50.

610 Así, en la expresión 25=50/2, 2 son las veces que hay la Unidad 25 en el Cuanto 50.

611 Cf. Hegel [1985] p. 313: "dieser Quotient ist als Exponent somit nicht als das gesetzt, was er sein soll, – das Bestimmende des Verhältnisses oder als seine negative Einheit".

612 No resulta del todo claro por el texto de las dos ediciones de la *LS* cuál es la expresión formal que subyace a la Relación inversa. Por frases como "um soviel die eine Seite vergrößert oder vermindert wird, um soviel auch die andere" (en Hegel [1985] p. 314) o "das Gesetztsein eines Quantums zugleich als Nichtsein dieses Quantums ist" (en Hegel [1978] p. 182), la expresión que se está presuponiendo parecería ser la de $y+x=a$ (a esta conclusión llega, por ejemplo, Moretto en Moretto [1984] p. 242). No obstante, afirmaciones como la siguiente, "worin [en la relación inversa] der Exponent die Bedeutung des Produktes derselben [de la Unidad y del Valor numérico] hat" (en Hegel [1985] p. 131) pueden llevar a entender que la expresión que subyace a todo el apartado "La Relación inversa" es la de $x{\cdot}y=a$. Frente a estas dos interpretaciones excluyentes, podría muy bien ser que lo que Hegel llama "Relación inversa" sea algo así como la forma lógica común de las relaciones matemáticas $y+x=a$ y $x{\cdot}y=a$. Independientemente de que esto haría más flexible la lectura del apartado sobre la "Umgekehrte Verhältnis", podría evitar además la sorpresa de encontrar expresiones como la siguiente en el texto: "im umgekehrten Verhältnis ist er, als Summe betrachtet, […]" (en Hegel [1978] p. 185). En él, Hegel parece suponer otras manifestaciones de la relación inversa además de la suma ($y+x=a$).

613 Así se expresa Hegel cuando define el exponente en Hegel [1985] p. 316: "[der Exponent, J.Z.] die Grenze ihrer gegenseitigen Begrenzung ist". Cf. también Hegel [1985] p. 315: "ist er [der Exponent, J.Z.] als die einfache Bestimmtheit, die negative Einheit dieser seiner Unterscheidung in die zwei Quanta und die Grenze ihres gegenseitigen Begrenzens".

del proceso infinito. Esto se debe a que el llegar a ser todo lo que cada lado tiene fuera de sí no haría mas que anular, no sólo el otro lado, sino a sí mismo. Y esto por que cada lado es el que es únicamente en la relación.

La segunda forma de estar puesta el todo es la que da lugar a la superación de proceso infinito y, con ello, la que da lugar al momento de la Relación inversa. Veamos como tiene lugar esto. La segunda forma de estar puesta el todo de la relación consistía en el retorno consistente en observar que cada uno no sólo niega a su otro, sino que este negar, al ser mútuo, es lo que constituye a él mismo. Habíamos expresado esto diciendo que aquello que le falta a cada uno para ser lo que es en sí es lo que es el otro lado. En este sentido, cada lado tiene en sí su otro lado, sólo que como falta. Con ello el más allá no está ya más allá sino que forma parte de cada lado de la Relación inversa.

El resultado es así la superación, el verdadero infinito, consistente en la unión entre el ser algo y su ser otro. Esto puede dar la impresión de ser un mero retorno a la primera de las tres Relaciones cuantitativas. En efecto, habíamos visto que esta consistía en la supresión de la indiferencia de cada Cuanto independientemente del otro. En la Relación directa cada Cuanto es indiferente sólo dentro de la Relación directa. Esto equivalía a decir que no había propiamente dos Cuantos. Esta Unión de un Cuanto con su otro Cuanto es a lo que podría parecer que hemos llegado al final de esta sección dedicada a la relación inversa. Si esto fuese así, estaríamos frente a una de las múltiples recaídas que amenazan a la *Wissenschaft der Logik*. Sin embargo, no es esto aquello a lo que hemos llegado a parar en el desarrollo de la relación inversa. Y ello, por lo siguiente:

Lo otro que ha sido absorbido en cada lado es el en sí de cada lado. No se trata de que, tal y como ocurría en el proceso al infinito, el más allá sea algo exterior al Cuanto y ahora resulta que la exterioridad se ha vuelto interior a cada Cuanto. Cada Cuanto es ahora el exponente mismo y sabemos que el exponente es la unidad de la Unidad y del Valor numérico. El otro que tiene el algo dentro de sí no es, por ello, algo cuantitativo, sino la diferencia cualitativa o momento del Cuanto. La superación del más allá es la negación del hecho de tener un Cuanto exterior que determine a cada Cuanto. Pero esto no es otra cosa que la negación de la exterioridad misma. Con esto habremos terminado con el inconveniente de tener que encontrar el exponente fuera de la relación. La relación en la que esto tendrá lugar es la Relación de potencias.

3.2.3 La Relación de Potencias [y/x=x]

La Relación de potencias es la culminación de la categoría de la Cantidad de la *LS*. Esta culminación consiste en el retorno de la Cantidad en la Cualidad. Si el movimiento desde la Cualidad a la Cantidad había consistido en la superación de la inmediatez de la Determinidad de la Cualidad, el retorno de la Cantidad a la Cualidad consistirá en la superación de la indiferencia de la exterioridad. Esta indiferencia de la exterioridad era aquello que hacía al Cuanto un Cuanto. Como todo movimiento de retorno, este movimiento de doble traspaso[614] es el momento Ser-para-sí, en este caso, del Cuanto.

Superar la indiferencia de la exterioridad significa que lo exterior cualitativo no es algo inmediatamente puesto, como en la Relación directa, ni algo negado, como en la Relación

[614] A saber, primer traspaso de la Cualidad en la Cantidad y segundo traspaso de la Cantidad en la Cualidad. La expresión *doppelte Übergang* se encuentra en la segunda edición (en Hegel [1985] p. 321).

inversa, sino algo que es puesto por la relación misma. Esto exterior cualitativo, aquello que Hegel llama “su diferencia que es de (*von*) él mismo”[615], es el exponente. En la Relación de potencias, el exponente no será ya exterior a la relación sino que pertenecerá a la relación misma. Esto significa que la diferencia del Cuanto, el Valor numérico y la Unidad, no serán ya exteriores sino que son diferencias que tienen lugar desde el Cuanto mismo. Con ello el en sí del Cuanto, su Determinación, coincidirá con el Ser-ahí o Hechura de él. La Determinación que ha tomado el Cuanto en la Relación de potencias es el de la Cualidad, el de algo que ha superado la indiferencia del límite. El lado de la Hechura de la relación cuantitativa expresa el hecho de que, en un primer momento, la Relación de potencias se manifiesta como una exterioridad del Cuanto, como un aspecto cualitativo del Cuanto y no como la superación del Cuanto mismo. Sin embargo, la exterioridad del Cuanto denominada “Relación de pontencias” es la superación de la Determinación del Cuanto que consiste, como hemos visto, en la exterioridad, en poder ser más o menos. Con ello el Cuanto retorna a la Cualidad, la exterioridad de la “Relación de potencias” es una referencia a sí o algo cualitativo.

Veamos todo esto más de cerca. Comencemos por escribir la formula que expresa la relación de pontencias:

$$y/x=x$$

La x del denominador, aquel que ocupa la posición de A en la fórmula [1], es denominado ahora como la Unidad que es en sí misma Valor numérico[616]. Ello se debe a que, como hemos visto en la relación directa, el denominador podía interpretarse tanto como Unidad como por Valor numérico. A su vez, la x que ocupa el lugar de C, lo que hemos llamado el exponente, es a lo que ahora llamará Hegel es Ser-otro (*das Anderssein*)[617]. Si hacemos uso de estos términos, la traducción de expresiones arriba utilizadas como el de “la exterioridad de la Relación de potencias es una referencia a sí” se expresa de la siguiente forma: el Ser-otro no es algo distinto de la relación, no es algo externo o inmediato, sino algo que es limitado por la misma Relación de potencias. Ello se debe a que el Ser-otro es igual a la Unidad que es en sí misma Valor numérico. Ésta idea queda expresada por Hegel de la siguiente manera:

im Potenzenverhältnis ist die Einheit, welche Anzahl an ihr selbst ist, zugleich die Anzahl gegen sich als Einheit ist[618]

Con “la Unidad que es en sí misma pluralidad” (*die Einheit, welche Anzahl an ihr selbst ist*) se refiere Hegel a lo que hemos llamado “Unidad que es en sí misma Valor numérico”. A su vez, la expresión “el Valor numérico frente a sí como Unidad” (*die Anzahl gegen sich als Einheit*) se remite al “Ser-otro”. Este Ser-otro no es más un Cuanto inmediato sino que es ella misma variable. La variabilidad no es algo que se establece desde fuera de la relación, sino que es determinada dentro de la relación. Si, además de ello, tenemos en cuenta que el exponente era el límite de la Relación, no será facil evitar la conclusión según la cual en la

[615] Cf. Hegel [1978] p. 186.
[616] Cf. Hegel [1985] p. 318: “die Einheit, welche Anzahl an ihr selbst ist”.
[617] Cf., por ejemplo, Hegel [1978] p. 185: “aber dieses sein Anderssein ist zugleich rein durch sich selbst begrenzt”.
[618] Cf. Hegel [1978] p. 185. Cf. también Hegel [1985] p. 318.

Relación de potencias el Cuanto, por así decir, se refiere a sí en su referirse a otro. Esto último lo expresa Hegel diciendo, por una parte, que la Relación de potencias se continúa en su Ser-otro. Si esto fuera todo, no se estaría afirmando más que el carácter cuantitativo de la Relación de potencias, el hecho de continuarse en su exterioridad. Pero hay algo más. Esta exterioridad ha sido superada en la Relación de potencias debido a que su Ser-otro no es algo que tenga fuera de sí, sino forma parte de la misma Relación de potencias. Esta exterioridad no exterior o no indiferente es lo que hace del Cuanto de la Relación de potencias algo cualitativo. El Cuanto no es más la Determinación exterior que le es indiferente a algo –al Cuanto–, sino una Determinación por el cual algo es lo que es:

das Quantum ist nunmehr nicht mehr gleichgültige oder äußerliche Bestimmung, sondern das, wodurch etwas das ist, was es ist[619]

El regreso de la Cualidad en la Cantidad no es, con ello, algo que sea un mero restablecimiento de la Cualidad. La Cualidad a la que ahora retornamos es una Cualidad que está afectada por la Cantidad. Una Cualidad afectada por la Cantidad es una Cualidad en el que el cambio cuantitativo hace cambiar el qué del algo. La Cantidad que es, al mismo tiempo, la Cualidad de algo es, en la terminología de Hegel, la Medida de algo.

3.2.4 Recapitulación

Puede resultar útil cerrar este apartado con un resumen de las tres Relaciones Cuantitativas, la Relación directa, la inversa y la de potencias, con el fin de poder abarcar de un vistazo el movimiento que les ha dado origen. Comencemos recordando el inicio y, a su vez, meta del apartado de la Relación cuantitativa. El resultado de la categoría de la Cantidad, a saber, la Relación cuantitativa, era caracterizado como el momento de la verdadera infinitud de la Cantidad. Esta infinitud consistía en lo siguiente: a saber, en que la Relación cuantitativa no tiene el más allá del Cuanto fuera de sí[620], sino dentro de sí. Este resultado al que había llegado la Cantidad es algo del que parte la Relación cuantitativa. Por ello, el contenido de la misma será en ella algo inmediato, algo que habrá que poner en la Relación de potencias.

La inmediatez del resultado de la Cantidad se manifiesta en la inmediatez del exponente de la Relación directa. Este exponente no es en la Relación directa, en contra de lo que debería ser, unidad de la Unidad y Valor numérico[621]. Bien al contrario, en la Relación directa el exponente es o Unidad o Valor numérico, no unidad de las mismas. El exponente está por esta razón indeterminado. Cada lado de la relación es incompleto en el sentido de que o bien hace de Unidad o bien hace de Valor numérico. Tenemos así una figura con dos faltas: 1), cada lado no es un Cuanto cualitativamente completo y 2), los lados no están cuantitativamente determinados[622]. La solución de la primera falta vendrá a cargo de la Relación inversa. A su vez, la Relación de potencias vendrá a solucionar la segunda falta. En efecto, en la Relación inversa cada Cuanto será un Cuanto completo o unidad de la Unidad y del Valor numérico. Lo que ocurre es que cada uno de estos Cuantos no es lo que él mismo es

[619] Cf. Hegel [1978] p. 187.
[620] Como ocurría en el momento anterior del Proceso infinito.
[621] Unidad a la que llama Hegel Unidad cualitativa (en Hegel [1985] p. 313).
[622] Algo que veíamos al observar que era únicamente la unidad lo que cambiaba y no el Valor numérico de la Relación numérica que, como tal, siempre permanecía constante e igual al exponente.

en en sí: cada uno de los Cuantos no es el exponte. No lo es, al menos, como presencia. En efecto, habíamos visto que había dos posibles modos de poner el todo. El primero es el que daba lugar al proceso infinito dentro de la Relación inversa. Cada Cuanto está atrapado en una contradicción consistente en que alcanzar su en sí es lo mismo que desaparecer. Pero la misma Relación inversa tiene en sí la superación de esta contradicción. Esto venía dado por la segunda forma de poner el todo. Recordemos que ésta era resultado de la doble negación con el que estaba afectada la Relación inversa: un Cuanto no es sólo negación del otro, sino que este otro es, a su vez, negación del primero. Cada uno no hace más que negarse a sí en su negar a otro. O, lo que es lo mismo, cada uno tiene a su otro en sí. Cada uno es así el todo o el exponente[623] o la negación de la negación. Con esto se superaba la Relación inversa y se pasaba a la Relación de potencias.

La Relación de potencias es la relación en la que no quedará nada fuera, nada por poner. Y esto será así en dos sentidos: Cada Cuanto será completo –unidad de la Unidad y del Valor numérico– y estará completamente determinado desde dentro de la relación misma. Esto llevaba a Hegel a hablar de la naturaleza cualitativa y cuantitativa del exponente. La primera consiste en la identidad de la Unidad y del Valor numérico que tiene lugar en la Relación de potencias. La segunda consiste en que el Cuanto es idéntico a sí en su ser otro[624]. Estas dos identidades se implican mutuamente en la Relación de potencias:

Im Potenzenverhältnis aber ist der Exponent ganz qualitativer Natur, einfache Bestimmtheit, daß die Anzahl die Einheit selbst, die Identität des Quantums in seinem Anderssein mit sich selbst ist[625]

En la Relación de potencias ocurren así dos cosas. La primera es que el cambio del exponente, un cambio cuantitativo, cambia también la relación, tiene un efecto cualitativo. Lo segundo es que este cambio del exponente es algo que es parte de la misma relación. La determinación no es indiferente –por la primera observación– ni externa –por la segunda. Esto hacía que la Relación de potencias fuese algo cualitativo. El retorno a lo cualitativo era mediato y, por ello, su unidad un nuevo momento. El resultado de la entera *LS* es así una negación de la negación que tiene como protagonistas a las Categorías de la Cualidad, la Cantidad y la Medida. Esta ultima será la negación de la negación o negación de la Cantidad: el retorno mediato de la Cualidad.

3.2.5 Lo cuantitativo y lo cualitativo de la relación de potencias en Leibniz

Vamos a mostrar ahora que el carácter peculiar de la relación de potencias, carácter que consiste en ser, como hemos visto, el lugar en el que la Cantidad retorna a la Cualidad, es perfectamente defendible desde la perspectiva de la filosofía de Leibniz. Esta nueva aproximación a la relación de potencias nos permitirá además clarificar, si cabe, aquello que hemos querido expresar cuando en nuestra exposición anterior decíamos que la relación de

[623] Con ello se negaba el Ser-fuera-de-sí del exponente. Cf. Hegel [1985] p. 317: “die Negation des Außersichseins des Exponenten”.
[624] Cf. Hegel [1985] p. 318: “das Quantum in seinem Anderssein mit sich selbst identisch ist”.
[625] Cf. Hegel [1978] p. 185. A esta identidad de la identidad cualitativa y cuantitativa se refería también Hegel en este pasaje del comienzo de la sección sobre la Relación cuantitativa: “im Potenzenverhältnis aber macht sich die in ihrem Unterschied sich auf sich beziehende Einheit als einfache Selbstproduktion des Quantums geltend; **dieses Qualitative selbst endlich in einfacher Bestimmung, und identisch mit dem Quantum gesetzt**, wird das Maß” (en Hegel [1985] p. 311. Subr. nuest.).

potencias era la unidad de la Cantidad y la Cualidad. El fin de esta sección es, en suma, el de mostrar que aquello que *de iure* podríamos decir haciendo uso de las nociones leibnizianas de la cualidad y la cantidad sobre la relación de potencias es lo mismo que aquello que *de facto* dice Hegel sobre ella.

Para ver esto tenemos que exponer en primer lugar qué es lo que entiende Leibniz por Cualidad y qué por Cantidad. Dos objetos que tienen la misma cantidad son dos objetos iguales (*gleich*)[626]. Dos objetos que tienen la misma cualidad son dos objetos similares (*ähnlich*). En Leibniz, la cantidad es algo que tiene que ver con la igualdad, mientras que la cualidad tiene que ver con la similitud entre los objetos[627]. El problema es ahora entender qué es similar y qué igual en Leibniz. Empecemos por esto último. Para que podamos decir que dos objetos son iguales o diferentes –uno mayor o menor que otro en relación a una cierta cantidad- necesitamos tener los dos objetos que queremos comparar cuantitativamente presentes. Esta presencia puede consistir en una presencia mediada o no mediada. La presencia no mediada es aquella en el que los dos objetos son efectivamente presentes al observador. La presencia mediada es aquella en el que se hace uso de la intermediación de un tercer objeto en relación al cual se realiza la comparación entre los dos objetos no efectivamente presentes. Por ejemplo, podemos realizar la comparación cuantitativa de la altura de dos jugadores de baloncesto poniendo uno al lado de otro y viendo que, efectivamente, uno le saca una cabeza al otro o, por el contrario, podemos utilizar en la comparación un objeto de mediación, pogamos por caso, una zapatilla de baloncesto, en relación al cual se realiza la comparación sin la necesidad de que tengamos efectivamente presentes, uno al lado del otro, a los dos jugadores. El resultado sería así algo del tipo, uno mide 12 zapatillas y el otro 13. Por último, es importante observar que, al igual que en la comparación cualitativa, el observador que realiza la comparación cuantitativa ha de realizarla con el ojo, digamos, del alma. Con ello evitaremos introducir distinciones no cuantitativas en nuestra comparación como la diferencia que existe entre la derecha y la izquierda[628]. Esto en relación a la comparación cuantitativa.

La comparación cualitativa es aquella comparación en la que se consideran a los objetos por sí mismos. No es que no sea necesario que los objetos estén presentes sino que, más bien, es necesario que los objetos no estén presentes. Además de ello, al igual que en la comparación cuantitativa, para no realizar comparaciones que no son estrictamente cualitativas es necesario que el ojo que ve cada objeto sea el ojo, por así decir, del alma[629]. Si, despúes de considerar al objeto por sí mismo, resulta que no encontramos ninguna nota que pueda distinguir a los dos objetos decimos que los dos objetos son similares. Como se ve, la comparación se realiza dentro de lo que habitualmente se suele llamar lógica. Son las caractarísticas de contenido, reales, o *quiditativas* las que se tienen en cuenta a la hora de realizar una operación de comparación cualitativa.

Veamos ahora qué aplicación tiene esto en la teoría de las funciones y, en especial, en la teoría de las proporciones. Si tenemos dos segmentos de recta para comparar entre sí, el

---

[626] Cf. Math. Sch. V. 179...

[627] Leibniz sigue en este punto a Aristóteles quien consideraba que lo propio de la cualidad era lo similar y lo disimilar. Cf. ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΙ 32 11a18-19 (en Aristóteles [1949] p. 32): "ἴδιον ἂν εἴη ποιότητος τὸ ὅμοιον ἢ ἀνόμοιον λέγεσθαι κατ᾽ αὐτήν".

[628] Diferencia que, como se sabe, no es algo lógico ni cuantitativo, sino, digamos, representacional. Es este último plano de diferencias el que es capaz de dar cuenta de la distinción entre figuras que son, al mismo tiempo, iguales y similares, cualitativamente y cuantitativamente las mismas, es decir, congruentes.

[629] Con esta última restricción conseguimos evitar que el cuerpo del observador introduzca un término mediador –por ejemplo el entero cuerpo de uno mismo– con el que se nos colarían determinaciones cuantitativas en la comparación.

resultado del exámen cualitativo nos dará siempre una similitud entre las dos rectas mientras que una comparación cuantitativa será no mediata y su resultado dependerá de cuál de las rectas es mayor o menor. Si lo que tenemos son tres segmentos de recta, podremos comparar cuantitativamente las tres rectas entre sí directamente o, haciendo uso de una de ellas como intermediario, comparar cuantitativamente las dos restantes mediatamente entre sí. Con cuatro segmentos de recta pueden pasar varias cosas. Supongamos primero que los cuatro segmentos son diferentes. En este caso podemos comparar cuantitativamente dos segementos por un lado y dos segmentos por el otro lado y, a continuación, proceder a comparar esta comparación entre sí. Esta segunda comparación, la comparación de la comparación cuantitativa, es un caso de lo que hemos denominado “comparación cualitativa”. En efecto, es la relación entre dos cantidades lo que estamos poniendo en relación con otra relación entre cantidades. Si lo puesto en relación fuese, por ejemplo, una substracción entre los segmentos, no tendríamos propiamente una relación de relaciones sino, al contrario, una relación entre segmentos. Esta relación entre segmentos es una comparación cuantitativa y no cualitativa. Sin embargo, una comparación entre relaciones es siempre cualitativa. Y esto debido a que podemos considerar cada relación por sí misma y decir si es igual o no a la otra relación. Veamos esto con un ejemplo.

Este ejemplo no puede ser sacado de otro lugar que de las proporciones. La comparación cualitativa entre la relación cuantitativa entre los segmentos *A*, *B*, por un lado y *C*, *D*, por el otro lado, es lo que habitualmente se escribe como:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

En esta proporción no se comparan cantidades sino relaciones. No se tiene en cuenta cuánto de grande es absolutamente un segmento con respecto a otro, sino en relación a *B* cuantas veces mayor es *A* y en relación a *C*, *D*. Al ser la comparación cualitativa y no cuantitativa nos es absolutamente igual si los patrones o unidades de medida utilizados, *A* y *C*, sean distintintos. No necesitamos una unidad de medida exterior que absolutice las mediciones por que lo que está teniendo lugar es una comparación cualitativa y no cuantitativa. Puede que si trazamos los segmentos lo veamos mejor:

A ____________________
*B*________________________
*C*__
*D*______________________

Pues bien, la relación que hay entre el segmento *A* y el segmento *B* no es la misma que la relación que hay entre el segmento *C* y el segmento *D*. Esto es algo que podemos afirmar considerando la relación entre el segmento *A* y el segmento *B* por sí mismo y, por otro lado, la relación entre el segmento *C* y el segmento *D* por sí mismo. Es decir, no se trata de una comparación cuantitativa entre la relación entre los segmentos sino de una relación cualitativa[630]. Si asignamos a los segmentos unos valores proporcionales a sus longitudes obtenemos las siguientes expresiones:

A=18
B=22
C=2
D=20

con lo que

$$\frac{A}{B}=\frac{18}{22}\neq\frac{2}{20}=\frac{C}{D}$$

Es decir, en las proporciones no se tiene en cuenta el valor absoluto de la unidad en relación al cual se calcula la proporción sino la proporción misma. Sobra decir que si lo importante fuese el valor absoluto de la unidad sería necesario tener presentes, inmediata o mediatamente, los dos segmentos que hacen de unidad en cada lado de la proporción para realizar la comparación. Pero esto último no sería otra cosa que realizar una comparación cuantitativa. Así, si la relación entre relaciones fuese una relación entre dos segmentos que son substraidos entre sí tendríamos algo así como esto:

B-A=D-C

y si hacemos uso de los valores del ejemplo anterior,

B-A=4≠18=D-C

Esta última comparación presupone algo que no presuponía la comparación entre proporciones, a saber, el que los números “4” y “18” deban tener la misma unidad. Es decir, la comparación que ahora se esta realizando es una comparación cuantitativa, un comparación entre segmentos[631] y no entre relaciones entre segmentos[632].

Una vez que ha quedado claro esto, a saber, que en la relación entre proporciones lo que tiene lugar es una comparación cualitativa y no una comparación cuantitativa, podemos dar el siguiente paso. Este paso consiste en mostrar que puede haber una relación entre proporciones que además de cualitativa sea, en sí misma, cuantitativa. Para ello será necesario encontrar

[630] Este concepto de comparación cualitativa con el que es posible afirmar la similitud entre dos proporciones no se distingue del concepto utilizado en geometría en la que se afirma, por ejemplo, que dos triángulos que tienen los mismos ángulos son similares entre sí. En los dos casos se trata de considerar a los objetos por sí mismos. De ahí que rechacemos la siguiente afirmación de Wolff: “Leibniz legt hier [en las proporciones] einen Begriff der Ähnlichkeit zugrunde, der deutlich von dem herkömmlichen geometrischen Ähnlichkeitsbegriff abweicht, der nur für Figuren definiert ist” (en Wolff [1986] p. 246). No es que haya cambio de concepto de similitud sino que, más bien, el concepto se aplica en dos campos distintos.
[631] Entre el segmento B-A y el segmento D-C.
[632] Es decir, no una comparación entre la relación entre A,B, por un lado y la relación C,D, por el otro.

una proporción en la que, por así decir, se rompa el carácter estanco de las proporciones[633] de la comparación. Es decir, necesitamos que la comparación cualitativa siga teniendo lugar, es decir, que la comparación sea una comparación entre proporciones, pero, al mismo tiempo, que sea posible una comparación cuantitativa entre las mismas. Para ello, para obtener una relación cualitativa y, a la vez, cuantitativa, será necesario introducir un término medio[634] entre las proporciones con el que se realizará la comparación cuantitativa. Si el término medio forma parte de la proporción misma podremos decir además que el carácter cuantitativo no le es ajeno a la proporción sino que forma parte de él. De este modo, vemos que la única forma de cumplir estas condiciones es introduciendo un segmento que forme parte de las dos propociones. Este segmento será el medio o puente entre las proporciones. Es decir, el segmento común a las propociones será aquello sobre lo que se realizará la comparación cuantitativa. Haciendo uso de las notaciones ya habituales en esta sección, asignemos al segmento *B* el papel de intermediación entre las proporciones. Las dos nuevas proporciones serán con ello:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \qquad [2]$$

En esta nueva expresión, se mantiene la comparación entre dos relaciones –la relación entre *A* y *B* se compara con la relación entre *B* y C–, se trata así de una comparación cualitativa. Además de ello tenemos un elemento común en la proporciones –el segmento *B*–, elemento que hace posible la comparación cuantitativa entre las proporciones. Por ello, la expresión a la que hemos llegado es una expresión de una relación que es, a la vez, cuantitativa y cualitativa. Pero resulta que esta expresión es la formulación en lenguaje de proporciones de lo que con Hegel hemos llamado relación de potencias[635]. En efecto, si asignamos un valor arbitrario a *A* y consideramos que *B* y *C* son las variables, la expresión [2] adquiere la forma siguiente:

$$AC = B^2$$

o, en la notación más usual:

$$y=ax^2$$

[633] Con “romper el caracter...” queremos expresar lo siguiente; la comparación entre proporciones se realizaba considerando una relación por un lado, digamos, por sí, con otra relación que era también considerada por sí. Hemos visto que el hecho de que las relaciones eran consideradas en sí, hacía que la comparación fuese cualitativa. Pues bien, “romper el caracter ...” significa trazar un puente entre las proporciones sin que se vea imposibilitado por ello la comparación cualitativa.

[634] La relación cuantitativa directa entre proporciones es algo imposible de realizar por que falta la masa homogénea sobre la que comparar la totalidad de una proporción con la totalidad de la otra proporción. Es decir, falta la substancia sobre la que tendría sentido hablar de dichas totalidades.

[635] Para ser precisos, la expresión [2] es la versión tridimensional de la relación de potencias. En ella el eje z será aquél en el que se representen los distintos valores del coeficiente *a* en $y=ax^2$. El resultado será un gráfico con dos figuras, una definida en z>0 y otra en z<0, antisimétricas entre sí tanto en relación al plano *y*=0 como en relación al plano *z*=0.

que es la versión generalizada de la relación de potencias. Si normamos la expresión haciendo a=1 obtendremos la formula sobre la que se ha basado nuestra lectura de la sección sobre la relación de potencias de Hegel. Con ello hemos mostrado que el carácter a la vez cuantitativo y cualitativo de la relación de potencias es algo a lo que inevitablemente llegamos si asumimos las definiciones leibnizianas de lo cualitativo y lo cuantitativo. Este resultado coincide con aquél que había obtenido Hegel al final del despliegue de la categoría de la Cantidad. La coincidencia llega hasta tal punto que incluso el hecho de que la unidad común a ambas proporciones[636] fuese una unidad que comparten las dos proporciones, llegará a tener su traducción en la formulación de la relación de potencias por Hegel. Esta interioridad a las proporciones del segmento común con el que realizar la comparación cuantitativa entre las mismas era lo que hacía de la relación de potencias un algo cuantitativo que tiene en si lo cuantitativo. El segmento *B* era la variable, lo cuantitativo, que en su variar hacía cambiar la relación misma y, por ende, la forma cualitativa de la relación. Además de ello, el segmento *B* era algo que formaba parte de la misma relación, es decir, no era un exponente inmediato, dado o exterior. Esto se expresaba en la proporción diciendo que el segmento *B* era común a las dos proporciones. Por esta razón, el cambio de valor de *B*, suponiendo a los segmentos *A* y *C* constantes, hacía cambiar las dos proporciones. Hay que notar que frente a esto, en la expresión para la relación de potencias, las dos proporciones se habían reducido a una sola y que ello se debía meramente a que la misma había sido normalizada[637].

3.3 LA IMPORTANCIA DE LA RELACIÓN DE POTENCIAS

Puede extrañar al lector de Hegel el papel central que ocupa la expresión para la relación de potencias en la filosofía del cálculo diferencial de éste pensador. Al fin y al cabo, se podría decir, la relación de potencias no es más que una de las posibles funciones que los algoritmos de diferenciación permiten derivar y los de integración integrar. Por esta razón, puede parecer extremadamente limitado y parcial el análisis que ofrece Hegel sobre la derivación de las funciones. Frente a este parecer, trataremos de hacer ver la manera en que funciones que no son la función potencial son expresables por una suma de funciones potenciales. Para ello será necesario introducir nociones elementales en el análisis matemático como el de serie de potencias o de función analítica. Veremos que, en última instancia, la relevancia que va a adquirir en nuestra exposición la noción de función analítica es resultado de la deuda de Hegel con los trabajos matemáticos de Lagrange[638]. Antes de entrar de lleno en el problema, comenzaremos el apartado con una sección dedicada a mostrar las razones por las cuales Hegel considera carente de sentido el hecho de diferenciar funciones lineales. Es decir, comenzaremos el apartado viendo no ya cómo de hecho están las funciones que parecía que no estaban, sino, cómo los que parecía que sí lo estaban resulta que, de hecho, no lo están.

3.3.1 Abusos del formalismo: la derivación de las funciones lineales

En un principio, nada nos impide obtener la derivada de una función lineal haciendo uso para ello de la definición de la derivada en un punto x_0:

[636] A saber, el segmento *B* de nuestra exposición.
[637] La expresión no normalizada es expresable como $by=x^2$ donde $b=1/a$.
[638] Nos referimos principalmente a su *Théorie des Fonctions Analytiques*.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En efecto, la derivada en el punto x_0 de la función lineal $f(x) = ax + b$ sería,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a$$

El valor *a* es el coeficiente de la variable *x* de la función lineal y puede ser interpretado como la pendiente de la recta que se traza sobre los ejes de abcisas y ordenadas. Este valor es obtenible directamente de la expresión de la función lineal, sin que sea necesario recurrir a la definición de la derivada. Es más, la aplicación de la definición para la derivada ni siquiera llega a ser completa. La derivada, como tendremos ocasión de ver en detalle, es la expresión de un límite de un cociente. En el caso de la derivada para una función lineal no se hace uso de esta característica de "ser límite de un cociente" porque la variable sobre la que se define el límite del cociente, la variable *h*, desaparece antes de poder entrar en escena esta característica. Por esta razón, el mismo resultado que hemos obtenido haciendo uso de la definición para la derivada es también obtenible en el caso en el que *h* fuese, no un "infinitesimal", sino un número finito. Si llamamos pseudoderivada a la versión finita de una derivada tenemos que;

Pseudoderivada de $f(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$

La derivada para una función lineal es por ello una, digamos, pseudoderivada, una derivada que no hace uso de la definición completa de lo que debe ser una derivada. La segunda consecuencia de esto es que la pesudoderivada de una función lineal es igual en cualquier punto de la función. Es decir, al poder ser *h* un valor finito, el valor de la pseudoderivada no depende del valor x_0 de cada caso. La pseudoderivada es, por ello, igual para cualquier valor de la variable *x*. Esto último viola la definición misma de lo que entiende Hegel por derivada de una función. En efecto, la derivada era la expresión o ley de una variación de una variación. Hemos visto que en la relación potencial la variación de la variación, el hecho de que el exponente cambiara, era algo que formaba parte de la misma relación de potencias. Con el cambio de la variación –el exponente– cambiaba la variación –la relación entre los cocientes. Frente a ello, la derivada era la expresión o ley de esta variación. Como la variación era, a su vez, variable, la derivada no podía ser menos que una función dependiende de la variable *x*. Esta variabilidad de la derivada es lo que se pierde al hacer un uso fraudulento de la definición de la derivada cuando se calcula la pseudoderivada de una función lineal. La derivada deja de ser algo cualitativo, deja de expresar una relación cambiante, para pasar a expresar un Cuanto, un valor fijo[639].

Pero hay algo aun más grave que el abuso que era resultado del formalismo matemático denunciado por Hegel. Interpretar el valor *a* como la derivada de la función $f(x) = ax + b$ al

[639] Cf. Hegel [1985] pp. 277 y 278.

mismo tiempo que considerar, como es usual, que representa la pendiente de esta recta suele derivar en una confusión que es preciso evitar. Así, si suponemos que con la expresión $f(x) = ax + b$ se representa el espacio recorrido por un cuerpo –representado por las ordenadas– en función del tiempo –representado por las abcisas–, el coeficiente a será la velocidad –uniforme– en el que se ha desplazado el cuerpo en cuestión. Pues bien, si, además de ello, consideramos que a es el valor de la derivada de la ecuación para el movimiento uniforme $f(x) = ax + b$, no será fácil evitar la conclusión de que a es, a la vez, la velocidad del movil en un tiempo finito al mismo tiempo que su velocidad instantánea[640]. Es decir, se concluirá que en a coinciden la expresión para la velocidad *finita* del cuerpo con la expresión para la velocidad instantánea. El error de la argumentación consiste en olvidar que el cociente a no ha sido obtenido mediante un procedimiento en el que el concepto de límite haya tenido lugar. Afirmar que a representa la velocidad instantánea del cuerpo es retornar a conceptos ya superados en la *WL* como el de "punto de tiempo" o "punto de espacio". El punto es una representación parcial, es decir, unilateral del momento de la discrección que olvida el momento de la continuidad. La superación de esta contradicción o polarización de la contienda consistía, en última instancia, en el surgimiento de una nueva figura: el cociente de diferenciales. El punto, sea éste el punto del espacio o el del tiempo, era la niebla en el que quedaba anclado el entendimiento y cuyo denomnador común era, tal y como veremos, el devenir.

No hay pues velocidades instantáneas para los movimientos uniformes, Y ello debido a que para eso sería necesario definir fuera del cociente de diferenciales un punto de espacio y un punto de tiempo. Esto es algo que, no obstante, es imposible de realizar. Fuera del cociente de diferenciales los momentos infinitesimales no están definidos, es decir, no son más que la expresión de una contradicción. Y ya hemos visto que el intento de definir la velocidad mediante las derivadas, es decir, mediante una expresión en el que los momentos del cociente son inseparables, era un intento fracasado. El movimiento uniforme no hace uso de la propiedad de la inseparabilidad de los momentos del cociente de las derivadas. Al no hacer uso de esta propiedad, cada lado del cociente de velocidad es, digamos, unilateralizable y, por ello, mera expresión de la contradicción o proceso a lo infinitamente pequeño. Pretender evitar la contradicción unilateralizándo la misma –afirmando el polo de la discreción tal y como se hace con la expresión "punto"–, es retroceder al momento predialéctico[641] en el que la contradicción es solamente en sí.

La velocidad es, como se sabe, el cociente entre el espacio recorrido dividido por el tiempo utilizado en ello. Si queremos calcular la velocidad en un tiempo infinitésimal tendrémos que recurrir al infinitesimal del tiempo y, con él, al infinitesimal del espacio. Estos dos momentos sólo tienen realidad, como ya hemos adelantado, en el cociente de diferenciales. Sin embargo, la remisión mutua de los infinitesimales era algo que quedaba establecida y garantizada en el límite del cociente de diferenciales. Este proceso era, sin embargo, algo que no tenía lugar en los movimientos uniformes ni, en general, en los infinitesimales de las variables de las ecuaciones lineales. Estos infinitesimales eran, como hemos dicho, meros procesos a lo infinitamente pequeño y no, en sentido estricto, infinitesimales o momentos inseparables del cociente de diferenciales.

---

[640] Así, por ejemplo, Victor Gómez Pin en Gómez Pin [1984] p. 473. Es verdad que Gómez Pin es consciente del sinsentido que supone el acto de derivar una expresión lineal. Ello no le impide, sin embargo, hablar del coeficiente a como si de la expresión de la velocidad instantánea se tratara.

[641] Recordemos que el momento dialéctico es aquél en el que se reconoce la contradicción, el momento especulativo aquél en el que se la supera.

Es ésta la razón por la cual habría que hablar de cálculo de diferencias y no propiamente de diferenciales cuando nos encontramos con el problema de diferenciar una función lineal. De ahí que cuando Hegel diagnostíca el sinsentido de la derivación para las funciones lineales en el hecho de que, en las mismas, la función inicial y la derivada resultan ser iguales[642], esta idea debe expresarse haciendo uso de las diferencias finitas Δx y Δy. Es decir, en las funciones lineales la función para los incrementos y la función para la variable coinciden y la primera de ellas sólo es expresable haciendo uso de los incrementos finititos Δx y Δy:

$$f(x) = ax$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y = a(x+\Delta x) - ax = a\Delta x$$ [643]

En definitiva, la notación correcta para expresar la diferenciación de una función lineal no es la que hace uso de los diferenciales –*dx* y *dx*–, sino aquella que recurre a las diferencias –Δx y Δy. Estas diferencias serán siempre, por construcción, unas diferencias finitas. Todo esto no impide que el análisis, con vistas a obtener una teoría más abarcante, haga uso de la notación infintitesimalista incluso cuando tiene que diferenciar funciones lineales. Por esta razón, cabe interpretar el significado de las expresiones *dx* y *dx* como equivalente al de las diferencias Δx y Δy cuando en el análisis aparecen como resultado de *derivar* una expresión lineal.

3.3.2 La substitución de las variables por los incrementos: el complejo de elementos[644]

Tal vez habrá notado el lector que la substitución de la variable *x* por lo que habitualmente se denomina su incremento, $x+\Delta x$, no es lo mismo que la substitución que se realiza en una ecuación algebraica cuando se substituye la incógnita *a* por un binomio igual a él: $a=b+c$. En el primer caso las variables *x* e *y* están, en cuanto que tales, en una relación

[642] Cf. Hegel [1985] p. 278: “wenn nun hierauf, um das Differential zu finden, der Unterschied der hierdurch entstandenen zweiten Gleichung von der gegebenen genommen werden soll, so zeigt sich das Leere der Operatio, daß, wie bemerkt, die Gleichung vor und nach derselben für die sogennanten Zuwächse dieselbe ist als für die veränderlichen Größen selbst”.

[643] Obviamente la coincidencia no es total para la funciones con una constante como la expresada por la ecuación $f(x) = ax + b$. Esto no impide afirmar que en las dos la forma de la función –o, incluso, la expresión para la función– sean las mismas. Ello se debe a que en una expresión como $F(x,b) = f(x) + b$ donde $f(x)$ representa la parte variable de la función *F* y *b* la parte constante pero indeterminada de la misma, la forma de la función *F* es la función *f*. El constante indeterminado no hace más que situar la función como un todo, o la curva como un todo, en relación al eje de cordenedas, pero no determina la función en sí. El hecho de que es precisamente este carácter de en sí de la curva lo que es tenido en cuenta por el cálculo diferencial –vale decir, las propiedades de la curva como tal, no en relación con el eje de las coordenadas– explica que la derivada de una constante sea cero. Esto último no significa, sin embargo, que las translaciones a lo largo del eje de las abcisas, translaciones que tienen lugar por la substitución de la variable *x* por la variable *x-b*, hayan de ser derivativamente neutras. La introducción de la constante cambia la expresión de la variable pero sólo con el fin de conservar los valores de la derivada para la curva considerada en sí misma y no en relación al eje de coordenadas. Así para la traslación sobre el eje de las abcisas de la función $f(x) = x^2$ tenemos que recurrir a la nueva función $g(x) = (x+b)^2$ cuya expresión para la derivada no coincide con la de la función primera –es decir, $f'(x) = 2x \neq g'(x) = 2(x+b)$ – pero sólo con el fin de que la derivada de cada punto de la curva considerada en sí misma coincida en los dos sistemas de referencia: $f'(x+b) = g'(x)$.

[644] Cf. para este apartado Wolf [1986] pp. 226-228.

funcional entre sí. En el segundo caso, las incógnitas tienen un valor desconocido pero uno determinado. El valor de las variables no sólo es desconocido, sino que es indeterminado. Lo que es determinado es la relación entre las variables. Esto se debe a que cuando nos las habemos con ecuaciones algebraicas tenemos la misma cantidad de ecuaciones que de variables, mientras que en las funciones el número de ecuaciones tiene que ser mayor que el número de las variables.

La única justificación para poder realizar una substitución entre elementos no iguales –entre x y $x+\Delta x$, por una lado y entre y e $y+\Delta y$ por el otro– se basa en que los incrementos Δx y Δy no son independientes entre sí, sino que tienen una relación determinada. No se substituye un incremento indeterminado para la variable x y otro para la variable y sino un incremento para x que está en relación con el incremento de y. Es esta determinada relación la que pretende obtener el cálculo de diferenciales. Para que Δx y Δy tengan el significado de un incremento es necesario que los valores en relación al cual ellos son incrementos sean unos valores determinados aunque desconocidos. En este punto, la relación funcional[645] pasa de ser algo que tiene lugar entre las variables para ser algo que se cumple entre los incrementos. Al mismo tiempo, las variables adquieren el significado de incógnitas. Este cambio de significado es algo que no se cumple en las funciones lineales. En efecto, en ellas, estemos donde estemos sobre la recta, sea el que sea el valor de las incógnitas x e y, se cumplirá la relación entre los incrementos. De ahí que podamos decir que las variables x e y pueden tomar en relación a sus incrementos unos valores que son indeterminados, es decir, independientes a sus incrementos.

Los incrementos que, tal y como hemos visto, sólo tienen significado dentro de la relación entre sí, son incrementos que forman parte de lo que Hegel llama un complejo (*Komplex*)[646]. En el complejo los incrementos están en una relación mutua que impide que se hable de ellos como si fuesen meros incrementos. Hegel censurará el uso de la palabra incremento para referirse tanto a la derivada dx como al incremento lagrangiano i debido a que el uso de tal palabra no tiene en cuenta que los incrementos están en una relación funcional entre sí[647]. De ahí que, frente al concepto de “incremento” Hegel hablará a veces de “plus en sí mismo”[648] para referise al *aumento* de una variable que depende, inmediatamente, de la misma variable y, mediatamente, de la otra variable.

3.3.3 La relación de potencias y la serie en potencias

Comencemos este apartado definiendo lo que entiende Hegel por “función de potenciación” (*Potenzierungsfunktion*)[649]. Las funciones de potenciación son los elementos de la suma que es resultado de elevar a n un binomium[650] (b+c). Es decir, en la expresión

---

645 El cambio tiene lugar conservando la forma en las funciones lineales y con una forma distinta en las restantes funciones.

646 Cf. Hegel [1985] p. 280.

647 El sentido del término “función” en Hegel se aleja del que nos es habitual. Así, para Hegel, en la expresión $y = ax^3$ la variable y está en función de x y x en función de y. Para nosotros es sólamente y el que está en función de x. De ahí que escribimamos $y = f(x) = ax^3$.

648 Cf. Hegel [1985] p. 280.

649 Cf. Hegel [1985] pp. 280 y 281.

650 Siguiendo la distinción terminológica introducida por Wolff (en Wolff [1986] p. 217) distinguimos entre Binomio y Binomium y entre Polinomio y Polinomium. Binomio y Polinomio las usaremos en el sentido habitual de estos términos –una ecuación del tipo $f(x) = a_n x^n + a_m x^m$ para m≠n en el primer caso, una del

$$a^n = (b+c)^n = d+e+g+h+... \qquad [3]$$

los términos *d, e, g, h,...* son las funciones de potenciación[651] del binomium *b+c*. En este binomium se agotan las posibilidades del desarrollo en potencias de una incógnita, siendo las formas como

$$a^n = (b+c+i+j+k+l+...)^n$$

meras aplicaciones de la descomposición del binomium[652]. Para ser precisos, en la expresión [3], el lado derecho puede expresar una partición arbitraria de la potencia de *a* o no. Si los términos son resultado de realizar las operaciones necesarias de multiplicación y suma con las que *desplegar*[653] la expresión $(a+b)^n$, los términos *d, e, g, h,...* son funciones de potenciación[654]. Si, por el contrario, los términos *d, e, g, h,...* son particiones arbitrarias de la potencia a^n, entonces no se podrá hablar de funciones de potenciación. En el primer caso, los términos *d, e, g, h,...* dependen de la forma de la potencia, son desplieges del binomium. La arbitrariedad de la partición no se da, en este caso, en la potencia sino en la raíz[655].

El binomium puede aparecer aislada, como en [3], pero puede aparecer también como sumando de una serie de otros binomium de potencias de distinto orden. La forma general sería en este caso,

---

tipo $f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ en el segundo caso– mientras que con Binomium nos referiremos a una descomposición bipartita de una incógnita –descomposición de la incógnita *a* en *b* y *c*– y con Polinomium a una descomposición multipartita –descomposición de la incógnita *a* en *b, c, d, e, f...* –. Esta descomposición es una descomposición en sumandos.

651 Vemos así que el significado del término "función de potenciación" se aproxima al significado del término "función" dado por los primeros analistas y que es definido así por Lagrange (en Lagrange [1797] p. 2): "Le mot fonction a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité".

652 Cf. Hegel [1985] p. 280: "Es gehört nur zum Formalismus derjenigen Allgemeinheit, auf welche die Analysis notwendigen Anspruch macht, wenn statt $(a+b)^n$ für die Potenzenentwicklung zu nehmen, $(a+b+c+d...)^n$ gesagt wird, wie dies auch in vielen anderen Fällen getan wird; es ist solche Form sozusagen nur für eine Koketterie des Scheins der Allgemeinheit zu halten; in dem Binomium ist die Sache erschöpft".

653 Algo que se hace, como se sabe, con el Teorema binomial de Newton: $(a+b)^n = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$, donde $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot k}$. Cf. Knopp [1922] p. 47.

654 Al poner las expresiones *d, e, g, h,...* y $(a+b)^n$ uno al lado de otro, suele uno suponer que la primera ha sido deducido de la segunda y de ahí que hemos podido afirmar simplemente que *d, e, g, h,...* sean funciones de potenciación de $(a+b)^n$.

655 Es decir, no se parte la potencia a^n arbitrariamente sino la raíz *a*.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot a^i$$

y si *a* no es ya una incógnita sino, en general, una variable, tendremos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot x^i \qquad [4]$$

que será un caso particular de la expresión siguiente;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot (x - x_0)^i \qquad [5]$$

es decir, [4] es el caso en el que en la expresión [5] el valor de x_0 es igual a cero. Pues bien, la expresión [5] es lo que se suele llamar una serie de potencias. Estas series tienen la propiedad de ser infinitamente diferenciables dentro de su intervalo de convergencia. Además de ello, la expresión [5] es fácilmente diferenciable. La derivada *k*-ésima en el punto x_1 tiene la forma[656]:

$$f^{(k)}(x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+i) \cdot \alpha_{n+i} (x_1 - x_0)^i$$

Dentro del intervalo de convergencia, la serie de potencias toma la forma siguiente[657]:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!} \cdot (x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!} \cdot (x - x_1)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (x - x_1)^k + \ldots =$$

$$= f(x_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_1)}{i!} (x - x_1) \qquad [6]$$

En esta expresión, los coeficientes de la expresión [5] toman el valor las derivadas de la función primitiva divididas por 1!, 2!, ... Esta expresión, habitualmente denominado como Serie de Taylor, es la expresión sobre el que gira la entera *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange. Antes de que veamos cómo tiene lugar esto, nótese que aquello que para Lagrange es sinónimo de analiticidad[658] de una función, a saber, la expresión [6], es una serie

---

[656] Cf. Knopp [1922] p. 167.
[657] Volveremos sobre este punto en el apartado 4.2.5.1.
[658] Hoy en día, la analiticidad tiene también que ver con una expresión del tipo [5] pero definida sobre los números complejos. Cf. Dieudonné [1968] pp. 173 y 174.

de potencias. Veremos que la tarea de la derivación de una función se reduce para Hegel[659] a encontrar[660] la relación entre una función[661] y su función de potenciación[662].

El presupuesto que subyace a todo este razonamiento es el que define a las funciones analíticas como aquellas que pueden expresarse en una serie de potencias. Es decir, una función de x es analítica si puede exprearse de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot x^i \qquad [7]$$

Esta definición está ya presente en la *Introduction in Analysin Infinitorum* de Euler[663]. En esta obra, dentro de las funciones analíticas, se distinguen[664] las funciones algebraicas de las transcendentes[665]. Estas últimas son aquellas en las que tienen lugar operaciones no algebráicas que afectan a la/s variables/s[666]. Las operaciones algebráicas son la multiplicación, la división, la elevación en una potencia o la extracción de la raíz. Las operaciones transcendentes son las que involucran a la variable en operaciones logarítmicas o exponenciales[667]. Estas funciones, las analíticas, son las que pueden ser representadas por una serie infinita como la expresada por [7] y que en la formulación de Euler tiene la forma:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$$

Partiendo de un expresión como ésta, el matemático francés Arbogas, demostrará que si y es una función de x, y aumentamos el valor de la variable x en Δx, entonces podemos expresar Δy mediante una serie de potencias positivas de Δx[668]. Para ver esto, comencemos por introducir la expresión en la que formula Arbogas la serie [7]:

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + ... \qquad [8]$$

Si substituímos en esta expresión los valores de x e y por los de $x+\Delta x$ e $y+\Delta y$ tendremos:

---

659 Siguiendo muy de cerca a Lagrange.

660 Cf. Hegel [1985] p. 298: "für das diesem Kalkül [el cálculo diferencial e integral] Angehörige möchte der Name des Verhältnisses einer Potenzehfunktion und der Funktion ihrer Entwicklung oder Potenzierung der passendste sein".

661 Lado izquierdo de la expresión [6].

662 Los términos del lado derecho de la expresión [6].

663 Cf. Euler [1748] p. 46.

664 Debido a esta partición, no consideramos que Euler, en contra de la opinión de Grabiner (en Grabiner [1990] p. 79), considerara equivalentes los términos analítico y algebraico.

665 Cf. Euler [1748] p. 5: "Funtiones dividuntur in Algebraïcas & Transcendentes; illæ sunt, quaæ componuntur per operationes algebraïcas solas, hæ vero in quibus operationes transcendentes insunt".

666 Sobre el termino "transcendente" cf. Courant/John [1989] p. 49: "The world "tanscendental" [...] merely suggests that the definition of these fuctions transcends the elementary operations of calculations, "*quod algebrae vires transcendit*"".

667 La enumeración de las operaciones transcendentes de Euler no es exhaustiva.

668 Cf. sobre este punto Grabiner [1990] pp. 50-52.

$$y + \Delta y = A \cdot (x + \Delta x)^{\alpha} + B \cdot (x + \Delta x)^{\beta} + C \cdot (x + \Delta x)^{\gamma} + ...$$

Y si expandimos los Binomium elevados a las potencias α, β, γ,... haciendo uso del Teorema binomial de Newton y ordenamos el resultado obtendremos:

$$y + \Delta y = (A \cdot x^{\alpha} + B \cdot x^{\beta} + C \cdot x^{\gamma} + ...) + \Delta x \cdot (A \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} + B \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} + C \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} + ...) +$$
$$+ \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot (A \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) x^{\alpha-2} + B \cdot \beta \cdot (\beta - 1) \cdot x^{\beta-2} + C \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot x^{\gamma-2} + ...) + ...$$

Si además denominamos *p*, *q*, *r*,... a las expresiones que hemos reunido entre paréntesis obtendremos una expresión más manejable y fácil de identificar:

$$y + \Delta y = y + p \cdot \Delta x + \frac{q}{2!} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{r}{3!} \cdot (\Delta x)^3 + ...$$

En donde, definiendo la cantidad *p* como la primera diferencial de *y*, *q* como la segunda diferencial de *y*, etc., obtendrémos la serie de Taylor[669]:

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx} \cdot (\Delta x) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot (\Delta x)^2 + ...$$

En el proceso de obtención de esta serie ha quedado de manifiesto que las sucesivas diferenciales de *y* derivan del diferencial anterior como la primera diferencial deriva de la función originaria [8]. Esto será algo sobre lo que Lagrange llamará la atención y el motivo por el cual denominará “derivadas” a las funciones diferenciales de la variable *y*.

El problema de la serie de Taylor, problema del que no se hará cargo el Análisis anterior a Cauchy consiste en que la serie necesita unos criterios de convergencia en los que se pueda decir que, efectivamente, expresa una función en un punto x_0. Es decir, se necesita una definición exacta de convergencia de la expansión de Taylor para un intervalo $r = |x - x_0|$.

---

[669] Esta demostración para la serie de Taylor es la que reproduce Lagrange en su escrito de 1772 para la Academia de Ciencias de Berlín titulado “Sur une nouvelle spèce de calcul relatif à la différentiation et à l’intégration des quantités variables” (en Lagrange [1869] pp. 441-476). La diferencia con respecto a Arbogas es que Lagrange realiza una demostración para funciones con más de dos variables. A su vez, la diferencia con respecto a la demostración de las *Théorie des Fonctions Analytiques* es que en el artículo de 1772 Lagrange hace uso de consideraciones infinitesimalistas con las que ingnorar coeficientes de orden superior, mientras que en la *Théorie des Fonctions Analytiques*, al no poder –por razones de principios– ingnorar ningún término por razón de su relativa pequeñez, se verá obligado a hacer uso de lo que Grabiner denomina cuarto Principio de Arbogast : “In the development of φ(x+Δx) one can always take for Δx a value finite and assignable, small enough so one of the terms of the series will be greater than the sum of all those which follow”(en Grabiner [1990] p. 53). Como veremos con más detalle en la sección 4.2.5 dedicada a Lagrange, el uso de este Lemma es lo que evitará tener que hacer uso de argumentos que luego calificará de poco rigurosos.

Como tendremos ocasión de ver, la antesala de esta tarea consistirá en los trabajos de Lagrange sobre el denominado resto o *remainder* de Taylor.

Por el momento sólo nos interesa subrayar lo siguiente. La serie de pontencias, la serie en la que piensa Hegel, no es capaz de representar funciones con un comportamiento que en principio podría parecer suficiente: que existan todas las derivadas de la función a expandir. El conocido contraejemplo que se remonta a Cauchy[670] es el de la expansión de la función de una variable real

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$ [671]

Si bien la serie de Taylor en el punto x=0 es igual a cero, la función misma que se quería aproximar no es igual a cero en ese punto. Con ello el presupuesto que subyacía en la análisis de Lagrange, a saber, el supuesto de que la ecuación *f(x)* es determinada por una serie infinita si los términos de la misma –e.d., las sucesivas derivadas– tienen una valor finito[672] se viene abajo. La supuesta biunivocidad entre las funciones y las series se convierte así, por medio de Cauchy, en una relación en el que para una misma serie de Taylor podemos tener distintas funciones[673].

Otro problema de las series de potencias o serie de Taylor a la hora de representar una función consiste en que ofrece una visión demasiado limitada de lo que es una función. Euler mismo en su *Institutiones calculi Integralis*[674] hablará de funciones que son trazadas libremente con la mano[675]. Estas funciones, digamos, arbitrarias rebasan el estrecho marco que les ha sido asignado por la serie de potencias desde, al menos, Lagrange. Esto último, aparte de ser algo que parece evidente de por sí[676], tiene su explicación en lo siguiente[677]:

La serie de Taylor es deducible[678] y, por ende, interpretable como el resultado de una interpolación de una función con un polinómio de n grados y n puntos tanto más próximos entre sí cuanto mayor sea n y bajo la condición de que n tienda al infinito. Esto es lo mismo que decir que, en el límite, la serie de Taylor es la interpolación de un punto mediante $n=\infty$

---

[670] Cf. Cauchy [1899] p. 394 y Cauchy [1958] p. 276 y sigs.

[671] Hoy en día es habitual definir la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ en un intervalo para $x \neq 0$ donde $f(0) = 0$ (Sobre la derivabilidad y continuidad de la función así definida cf. Courant/John [1989] pp. 255-256). En este caso, lo que se trata de demostrar con el contraejemplo consiste en que la serie de Taylor no proporciona una aproximación a la función en los alrededores del punto x=0 por que mientras que la serie de Taylor es igual a cero por muchos términos que tomemos, la función toma valores positivos en $x \neq 0$.

[672] Cf. Cauchy [1958] p. 276: “Toutefois, en remplaçant les fonctions par des séries, on suppose implicitement qu’une fonction est complètement caractérisée par un développement composé d’un nombre infini de termes, au moins tant que ces termes obtiennent des valeurs finies”.

[673] Es decir, si $\varphi(x)$ es una función que admite una serie convergente de Taylor y $\chi(x)$ es una función con una serie que es igual a cero, las funciones $\varphi(x)$ y $\varphi(x)+\chi(x)$, a pesar de ser diferentes, tendrán una misma serie de Taylor. Cf. Cauchy [1958] p. 278.

[674] Cf. Euler [1770] p. 197 §301.

[675] La expresión es “libero manus ductu descripta”.

[676] Es decir, parace evidente que no cualquier función geométricamente definida por estar *liebero manus ductu* es representable por una serie de potencias. Como veremos en breve, esta intuición llegaría a conclusiones erróneas si la serie propuesta fuese trigonométrica.

[677] Cf. Klein [1933] p. 215 y sig.

[678] Una bella demostración de ello la econtrará el lector en Klein [1933] pp. 246-251.

derivadas de la función a interpolar. Por esta razón, concluye Klein, una función analítica en el sentido de Lagrange está determinado[679] en su completo recorrido por su comportamiento en una porción infinitesimal[680]. Esta característica de las funciones analíticas de estar predeterminadas enteramente por su comportamiento en, digamos, una parcela infinitesimal es lo que hace que no cumplan con la definición dada por Euler de la función en sus *Institutiones calculi integralis*. Es precisamente esta característica de no predeterminabilidad[681] lo que caracteriza a las series trigonométricas utilizadas por Fourier para estudiar la propagación del calor en un cuerpo. Fourier parte de una lámina rectangular ABC de longitud infinita[682] en el que uno de las bases es calentado de tal forma que mantenga una temeperatura constante, mientras que los lados perpendiculares a la base A, pongamos AB y AC, tienen una temperatura constante igual a 0. Pues bien, Fourier se propone encontrar la función *v* de temperatura para cada punto de la lámina rectangular en el estado de temperatura estacionario[683]. La solución al problema consistirá en una serie trigonométrica cuya forma general es

$$f(x) = S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \cos ix + b_i \sin ix\right)^{684} \qquad [9]$$

Lo importante para nosotros es comprender la razón por la cual la función que resuelve el problema no podía ser una función analítica. La razón de ello se debe a que[685] el problema está sujeto a condiciones introducidas con valores arbitrarios –la temperatura del foco de calor que se mantiene constante a 100 grados y la temperatura de los lados AB y AC que se mantiene también constante– que tienen un valor no infinitésimo de diferencia ante sí y que en puntos problemáticos –en el ejemplo del rectángulo los ángulos donde los lados se juntan con la base– han de ser reproducidos por una función –la función *v*– que tiene que ser válida para toda la superficie –la superficie del rectángulo. Estos puntos problemáticos son los que introducirán saltos en la función que serán analíticamente intratables. En términos de Klein:

Hier werden also Randwerte eingeführt, die in den einzelnen Teilen des Randes unabhängig voneinander willkürlich gegeben werden können, und daher tritt naturgemäß

---

[679] Habría que decir mejor, predeterminado.

[680] Cf. Klein [1933] p. 217: "Eine analytische Funktion im Sinne von Lagrange ist also durch ihren Verlauf in einem kleinsten Stück nach ihrem Gesaamtverlauf völlig bestimmt". Cf. también Juschkewitsch [1959] p. 230: "Die Abgrenzung der Klasse der analytischen Funktionen wurde zu einem hervorragenden Beitrag Eulers. In anderen Arbeiten formuliert er auch einige Eingenschaften der analytischen Funktion, z.B. die, daß ihr Verhalten auf einem beiebig kleinen Abschnitt ihr Verhalten im ganzen bestimmt. Diese Eigenschaft nennt er die Stetigkeit –in dem Sinne, daß auf jedem Abschnitt solch eine Funktion durch ein Gesetz, eine Formel vorgegeben wird".

[681] Que no es lo mismo que "determinabilidad" y que hace que, en efecto, las funciones trigonométricas sean, en el sentido kantiano, productos de la libertad. Como veremos, este caracter les viene a las funciones (gráficos) descritas por series trignonométricas por el hecho de que las condiciones iniciales que deben cumplir son, por principio, arbitrariamente establecibles. Cf. sobre la distinción entre "Determinismus" y "Prädeterminismus" Kant [Ak. VI] p. 49. Sobre la arbitrariedad de las condiciones iniciales cf. Fourier [1822] p. 100.

[682] Segimos el ejemplo más sencillo de Fourier estudiado en Fourier [1822] p. 159 y sigs.

[683] Es decir, cuando $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

[684] Los 2n+1 coeficientes de esta expresión son los denominados "coeficientes de Fourier". Cf. Cohurant/John [1989] p. 587.

[685] Seguimos a Klein [1933] p. 217. Klein se refiere al ejemplo que se encuentra en Fourier [1822] pp. 99-111.

gegenüber Lagrange wieder die zweite Eulersche Definition des Funktionsbegriffes in den Vordergrund[686]

Llegamos así a la conclusión de que disponemos de dos series o expansiones posibles con las que expresar una función, en donde una de ellas –la serie trigonométrica– resulta ser mucho más potente que la otra –la serie de pontencias–[687]. De estas dos series, Hegel conoce únicamente la segunda de ellas y es aquello sobre lo que se basan sus reflexiones sobre el cálculo infinitesimal. La visión de Hegel está así limitada al universo trazado por la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange. Nos queda pendiente ver hasta qué punto este hecho viene a sabotear la exposición de Hegel del calculo diferencial centrada, como hemo visto, en la noción de potencia.

3.3.4 Dentro de los límites de la serie de potencias

En cierto sentido, examinar los límites del caracter central que ocupa la relación de potencias en Hegel es lo mismo que analizar los límites de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange frente a las *Leçons sur le Calcul différentiel* de Cauchy. Hemos visto en el apartado anterior en qué sentido esto es efectivamente así. Es decir, hemos visto que la noción de "expansión" o "serie de Taylor" era una serie de potencias y en qué medida esta serie estaba afectada de límites en lo que se refiere a su potencia de representar funciones. Veíamos así que la relación serie/función no era biunívoca y que, además de ello, no todas las funciones eran subsceptibles de ser expandibles por la serie de Taylor.

Es verdad que si de lo que se trata es de obtener los valores de la función primitiva mediante la serie en cuestión, la serie de Taylor es una expresión más limitada que la serie trigonométrica. Pero si de lo que se trata es de obtener la expresión de la derivada de las funciones elementales con las que luego, mediante las oportunas reglas de derivación, se procede a derivar –ya sin el uso de las series– funciones más complejas, entonces, decíamos, puede que la contraposición entre Lagrange/Hegel y Cauchy no sea tan violenta[688]. Es decir, podemos interpretar la tarea de la primera parte de la *Théorie des fonctions analytiques* de dos formas distintas[689] :

i) por un lado, podemos considerar que el objetivo de la *Théorie des fonctions analytiques* es el de ofrecer series convergentes para distintas expresiones funcionales. Estas series no consiguen expresar las funciones que, desde Euler, han sido denominadas como "libero manus ductu descripta" o desde Fourier como "fonctions entièrement arbitraires". Las

[686] Cf. Klein [1933] p. 217.
[687] Cf. Knopp [1922] p. 339: "die trigonometrischen Reihen die meisten der sogenannten „willkürlichen" Funktionen darzustellen vermögen, und daß sie also ein in dieser Hinsicht den Potenzreihen weit überlegenes Werkzeug der höheren Analysis bilden".
[688] Segimos así la idea de Dirksen en Dirksen [1827] p. 1259: "daß es gleichgültig sei, ob die Reihe abbreche oder nicht, 1) wenn die Reihe nur zur Bildung der Ableitung dient, 2) wenn die Entwicklung bloß als eine analytische Umformung der Funktion betrachtet wird; nicht aber, wenn die Reihe zur Bestimmung des numerischen Wertes der Funktion in besonderen Fällen dienen soll". Dirksen es el matemático cuya recensión sobre los últimos avances del cálculo realizados en el primer tercio del siglo XIX permite a Hegel actualizar sus notas sobre el cálculo en la segunda edición de la *WL* introduciendo así las contribuciones de Cauchy. Véase el apartado 4.3.1 al respecto.
[689] Formas que, todo hay que decirlo, no son excluyentes entre sí.

serie de Fourier entraría en escena precisamente para suplir esta falta y, por consiguiente, habría que reconocer un límite en el proyecto de Lagrange[690].

ii) pero también podemos entender que la tarea de la *Théorie des fonctions analytiques* es el de proporcionar una teoria de derivación de las funciones en el que se evite el uso de las "magnitudes" infinitamente pequeñas o evanescentes, fluxiones y límites[691]. Es este aspecto del trabajo de Lagrange aquello que más le interesará a Hegel por razones que en parte ya hemos visto y en parte llegaremos a ver en el apartado 4.2.5 del siguiente capítulo. Desde esta perspectiva, la primera parte de la obra de Lagrange bien podría considerarse la exposición del algoritmo con el que derivar funciones dadas o primitivas haciendo uso de la serie de Taylor. Con un algoritmo tal, Lagrange consigue derivar funciones transcendentes como la del logarítmo[692], el exponencial[693], o funciones trigonométricas como el del coseno[694] y del seno[695]. Son estas dos últimas funciones las que conforman, precisamente, los elementos de la serie trigonométrica de Fourier. Esto tiene las consecuencias que acontinuación pasamos a exponer.

En primer lugar, podemos considerar la serie de Fourier[696] como una serie con elementos finitos. En este caso la serie de Fourier es completamente analítica y representable por series de Taylor. Las derivadas de esta función son asimismo obtenibles mediante el algoritmo de Lagrange. La razón de esto último consiste en la propiedad asociativa de la derivada. A su vez, si tenemos una serie de Fourier con un número finito de elementos, su representación puede realizarse substituyendo cada elemento por la respectiva expansión de Taylor. Las dos interpretaciones posibles de la obra de Lagrange darían una dictámen favorable hacia el matemático italiano. Es decir, la *Théorie des fonctions analytiques* es capaz de representar esas series al mismo tiempo que puede obtener las derivadas de las funciones que se expresan por estas mismas series.

Otra cosa distinta ocurre cuando lo que tenemos enfrente es una serie de Fourier con elementos infinitos como el expresado por la fórmula [9]. En este caso, decíamos, la serie representa una función arbitraria. Recordemos que con la expresión "función arbitraria" no se quiere expresar más que el hecho de que la función es parcialmente continua. Es decir, estas funciones o, desde la perspectiva analítica, conjunto de funciones tienen saltos a lo largo de su recorrido. Las distintas expresiones analíticas de estas funciones eran recogidas por una sola expresión que denominábamos serie de Fourier de infinitos términos. En este sentido, decíamos que funciones o gráficos[697] que son dados arbitrariamente son aproximables por la

---

[690] Límite que el propio Lagrange podría haber llegado a superar si hubiese considerado la posibilidad de que las series trigonométricas con las que él llegó a trabajar son capaces de representar funciones arbitrarias si el número de términos se eleva a infinito. Cf. Riemann [1854] p. 7.

[691] Algo que, como se sabe, constituye la declaración misma del título completo de la obra: "*Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans*".

[692] En Lagrange [1797] p. 17.

[693] En Lagrange [1797] p. 16.

[694] En Lagrange [1797] p. 27.

[695] En Lagrange [1797] p. 28.

[696] Una serie de Fourier que, propiamente hablando, no sería tal ya que las mismas son definidas únicamente para un número infinito de miembros. Dicho sea de paso, el que la serie trigonométrica con miembros finitos sea analítica y la de miembros infinitos no, es algo que habla a favor de la tesis hegeliana que se exponía sobre la base del ejemplo siguiente: 2/7 era la verdadera infinitud frente a 0,285714... que representaba la mala infinitud.

[697] "Funciones" desde la perspectiva de la serie trigonométrica, "gráficos" desde la perspectiva analítica. La aribitrariedad consiste en que estas funciones nos son definidas gráficamente. Cf. Riemann [1854] p. 1: "[...] Ansichten über die willkürlichen (graphisch gegebenen) Functionen […]" y p. 6: "[...] dass eine ganz willkürlich (graphisch) gegebene Function […]".

serie trigonométrica infinita y no por la serie de Taylor. Por esta razón, la perspectiva que asigna a la *Théorie des fonctions analytiques* la tarea recogida bajo el punto *i*) habría encontrado aquí un límite o falta.

No ocurre lo mismo bajo el planteamiento recogido bajo el punto *ii*). En este caso, las funciones trigonométricas con infinitos elementos no amplían el ámbito de la diferenciabilidad. Ello se debe a que estas serie describen funciones que son continuas, digamos, por trechos. Entre un trecho y otro la función es discontinua y, por ende, no diferenciable[698]. En estos puntos singulares, el poder ser expresado todo el gráfico por una única función no aporta una diferenciabilidad *extra* de la misma. Asimismo, en las partes continuas de la función el problema de la posible diferenciabilidad de la misma es perfectamente resoluble mediante procedimientos analíticos que están dentro del campo marcado por la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange.

En conclusión, hemos visto que la serie de Taylor es una serie de potencias o un polinómio de interpolación de una curva de unas características muy específicas: a saber, la serie de Taylor es la interpolación del caso en el que los *n* puntos de la función a interpolar tienden a ser el mismo punto y donde, por otro lado, el número de los puntos tiende al infinito. La, digamoslo así, potencia de la serie de potencias se manifestaba en este magnífico ejemplar que es la serie de Taylor. Esta serie es la base de la tarea emprendida en la *Théorie des fonctions analytiques* por Lagrange. Habíamos visto que esta tarea[699] era doble. Por una lado se trataba de ofrecer series de potencias con las que expandir funciones. Por otro lado se trataba de hacer uso de la serie misma para obtener deridadas sin el uso de, entre otros elementos *metafísicos*, los diferenciales. En el primer sentido la tarea de la *Théorie des fonctions analytiques* habría sido superada por las funciones trigonométricas. En el segundo sentido, sin embargo, no. Pues bien, resulta que es esta segunda tarea la que tiene la mayor relevancia para el estudio del cociente de diferenciales en Hegel. Queda así la via libre para ver qué es lo que interesa a Hegel de la forma en el que Lagrange obtiene las derivadas de una función. Algo ya hemos adelantado sobre el contenido de este punto. En efecto, ya hemos visto brevemente que no es la serie como tal, la serie como la suma de sus miembros, lo que juega el papel relevante en la lectura de Hegel de la *Théorie des fonctions analytiques* sino la relación entre los miembros. Los detalles de esta lectura, los problemas que ella pueda contener, serán analizados en el apartado 4.2.5.

Antes de cerrar este apartado consideramos importante mostrar nuestra distancia con respecto a la lectura de M. Wolff[700] sobre el papel de la *Théorie des fonctions analytiques* en las notas sobre el cálculo de Hegel. Wolff parte de una afirmación con la que, después de lo que se ha dicho, no podemos estar de acuerdo. Según él, el descubrimiento de Fourier en el año 1807 de que toda función arbitraria es aproximable mediante una serie de funciones trigonométricas implicaría que el círculo de las funciones diferenciables llegó a ser ampliado[701]. Hemos intentado mostrar a lo largo de esta sección que, frente a esta afirmación, la serie Fourier no amplió el círculo de las funciones diferenciables, sino el círculo de las

[698] Recuérdese que la continuidad es la condición necesaria –pero, desde Weierstraß, no suficiente– de la diferenciabilidad.
[699] Nos referíamos, para ser precisos, a la tarea de la primera parte de la *Théorie des fonctions analytiques*. Ya tendremos ocasión de ver en qué consiste para Hegel la relación entre las tres partes de esta obra en la sección 4.2.5.3 de este trabajo.
[700] Cf. Wolff [1986].
[701] Cf. Wolff [1986] p. 221: "Zudem ging der Umfang der bekannten differenzierbaren Funktionen noch über den Bereich der analytischen Funktionen hinaus, seitdem Joseph Fourier 1807 endeckt hatte, daß jede ‚willkürliche' Funktion einer reellen Variablen duch Reihen trigonometrischer Funktionen approximiert werden kann".

funciones. Las condiciones de diferenciabilidad de una serie de Fourier suelen ser condiciones de diferenciabilidad por trozos[702] y no condiciones que contemplen la función como un todo. Ello se debe a que, como se ha dicho más arriba, la condición necesaria pero no suficiente de la derivabilidad de una función es el de su continuidad. Por esta razón, no adelantamos en derivabilidad de una función con una serie de Fourier si resulta que las condiciones de derivabilidad de la misma son verificadas por trozos.

Tampoco estamos de acuerdo con las limitaciones que cree ver Wolff en las pretensiones de Hegel cuando éste, para dar cuenta de la diferenciabilidad de una función, le otorga un papel central a la serie de potencias. La serie de potencias o, mejor dicho, la relación entre las funciones de potenciación (*Potenzierungsfunktion*) y la función de potencias (*Potenzenfunktion*)[703] es lo que caracteriza propiamente el objeto del cálculo diferencial para Hegel[704]. El que las funciones de potenciación tomen la forma de una serie de potencias no significa que funciones que en un primer momento no tienen esa forma no sean expresables mediante una serie de potencias. La tarea de la *Théorie des fonctions analytiques* es la de mostrar, precisamente, que funciones como la exponencial o la logarítmica son derivables y expresables haciendo uso de una serie de potencias. La identidad entre lo que se entiende por analítico y lo que se entiende por expandible mediante el uso de la serie de Taylor –que es, como hemos visto, una particular serie de potencias– hace que la siguiente afirmación de Wolff carezca de sentido:

daß analytische Funktionen, die nicht Potenzfunktionen sind, für den Kalkül im Grunde von sekundärer Bedeutung sind[705]

Wolff pretende paliar el que, según su opinión, hay funciones analíticas que no son de potencias diciendo que éstas –a saber, la función logarítmica o las trigonométricas– juegan un papel secundario en el cálculo diferencial. La lectura de Wolff no parece ser demasiado alentadora. Ella consiste en algo así como argumentar que el cálculo con los infinitesimales introduce unos errores en los resultados para luego proceder a consolarse diciendo que éstos son despreciables en relación a las variables finitas. Frente a esto, nuestra lectura pretende salvar, en la medida de los posible, el trabajo de Hegel subrayando un cierto papel que, en nuestra opinión, juega la serie de potencias. Dentro de los límites en los que nos es permitido movernos en este trabajo, veremos en el apartado 4.3.2 que la centralidad –en el sentido de las lecturas *i*) y *ii*)– de la serie de potencias será recuperada por el trabajo del matemático alemán Karl Weierstraß. Con ello volverá al primer plano la definición analítica de la noción de función[706].

[702] Cf. Dieudonne [1968] p. 309.

[703] La función de potencias es denominado también por Hegel la función originaria. Cf. Hegel [1985] p. 298: "aber indem das Interesse jenes Kalküls nur auf das Verhältnis der unsrprünglichen Funktion zu dem nächsten Koeffizienten ihrer Entwicklung geht".

[704] Cf. Hegel [1985] p. 298: "für das diesem Kalkül Angehörige möchte der Name des Verhältnisses einer Potenzenfunktion und der Funktion ihrer Entwicklung oder Potenzierung der passendste sein, weil er der Einsicht der Natur der Sache am nächsten liegt". Con esta afirmación Hegel se sitúa del lado de la tarea emprendida en la *Théorie des fonctions analytiques* por Lagrange.

[705] Cf. Wolff [1986] p. 222.

[706] Cf. Weierstraß [1988a] p. 49.

3.4 EL COCIENTE DE DIFERENCIALES Y LA NOCIÓN DE ESTRUCTURA

Terminaremos este tercer capítulo mostrando cómo la versión hegeliana del concepto de Cociente de Diferenciales presenta una interesante afinidad con la noción de Estructura con la que se trabaja en las ciencies sociales desde, al menos, Saussure. No queremos decir con ello que la segunda formulación, la que podríamos denominar "contemporánea", sea dependiente o deudora de la primera. Las nociones de "dependencia" o "deuda" presuponen la existencia de un diálogo más o menos explícito entre las dos escuelas que, sin embargo, pocos estarían dispuestos a defender. Aquello que defendemos es algo más fundamental que esto. Se trata de poner de relieve lo común a las dos nociones –el cociente de diferenciales y la noción de Estructura– con el fin de mostrar, en última instancia, su origen común.

Comenzaremos el apartado recordando los aspectos más relevantes que definen la noción de estructura. Para ello resultará necesario comprender primero qué es lo que significa la noción de isomorfismo[707]. Isomorfismos son dos conjuntos en los que se puede establecer una relación biunívoca entre las relaciones que se hayan establecido entre los elementos de cada conjunto. Es decir, se da una relación del tipo "una relación en un conjunto se da si y sólo si se da una relación en el otro conjunto" entre los dos conjuntos isomorfos. Nótese que esta relación de relaciones, la relación de isomorfismo entre dos conjuntos, se define independientemente del contenido cualitativo de los elementos sobre los que se aplica. Lo mismo ocurre con las relaciones que se definen dentro de cada conjunto. Es más, el único contenido asignable a los distintos elementos de los conjuntos es el que puedan tener en base a las relaciones en las que se encuentran con los demas elementos del mismo grupo. Este tipo de contenido es, en contra del significado habitual, un contenido que no es quiditativo sino, digamos, posicional[708]. Pues bien, si es posible construir una relación tal entre los dos conjuntos, decimos que las mismas tienen la misma forma, son isomorfas o que son realizaciones materiales de una misma estructura.

Para ilustrar esto, vamos a hacer uso de un ejemplo que no es acaso el que habitualmente se suele utilizar. Lo habitual sería hablar de la lengua como un caso de estructura y de hablas como las distintas realizaciones materiales de esta lengua. Pero el caso es que la manera en la que se definen las relaciones dentro de cada habla tiene, a su vez, todo que ver con la segregación de dos planos que son, a su vez, isomorfas. Estos dos planos son aquello que se suele denominar plano del significado y plano del significante. El que entre estos dos planos se establezca una relación de isomorfimo fundamenta el hecho mismo de la existencia de dos planos formales frente a un continuo material-ideativo. Esto significa que la distinción entre diferencias que pertencen al continuo frente a diferencias formales y, por ello mismo, estructurales, se establece simultáneamente a la distinción entre el plano del significado y el plano del significante. Debido a que no todo cambio físico en el plano del significante implica cambios en el plano del significado podemos hablar de un cambio sonoro frente a un cambio fonético además de un cambio fonético frente a un cambio de significado. Algo análogo ocurre si, en vez de comenzar en el plano del continuo físico comenzáramos en el continuo ideativo. Es decir, comenzando por el plano del significante, la diferencia entre dos sonidos[709] es una diferencia que pertenece al plano del significante, es decir, es una distinción fonemática si da lugar a una diferencia en el plano del significado. A su vez, una

[707] El que la terminología que utilizamos en la siguiente exposición no sea de Saussure no impide que el contenido de la misma sí resulte ser fiel a su obra.
[708] O, topológico, si hacemos caso a Deleuze (en Deleuze [2000] p. 305).
[709] Nótese que al igual que del sónido podría hablarse también de letras del alfabeto o de gestos del lenguaje de sordomudos etc.

diferencia entre dos cortes distintos en la substancia ideativa[710] es una diferencia que pertenece al plano del significado[711] si esa distinción da lugar a una distinción en el otro plano, en el plano del significante[712]. Debido a que los dos planos sólo existen en su remisión mutua, no tiene sentido hablar de un plano que prexista a o sea anterior al otro plano[713]. No hay así un plano del significado que sea anterior o exterior al plano del significante ni un plano del significante que sea anterior o previo al significado. Todas las anterioridades y exterioridades de las que cabría hablar son anterioridades posteriores y exterioridades interiores[714], es decir, anterioridades y exterioridades que tienen lugar en y desde la lengua.

Lo importante es atender a los distintitos niveles de isomorfismo y de relación que van surgiendo en el sucesivo análisis de la lengua mediante el uso de la noción de estructura. Así, en el nivel más general, podemos partir por la interpretación de la estructura como un habla y las materializaciones de esta estructura como lenguas distintas de este habla. Tenemos así dos conjuntos que representan a dos lenguas y un isormorfismo entre ellas que indica que se trata de la materilización de un mismo habla. A su vez, dentro de cada lengua, con el fin de ver qué es lo que pertenece a su forma y qué es lo externo a ella, nos encontrábamos con un nuevo y necesario desdoble consistente en los conjuntos significado-significante. Eso que en un parágrafo anterior describíamos diciendo que “las diferencias en un plano son relevantes si y solo si dan lugar a una diferencia relevante en el otro plano” es expresable ahora de la siguiente forma: hay una relación de isomorfismo entre los elementos del conjunto significado y los elementos del conjunto significante. Si al nivel precedente a la estructura que era responsable de este isomorfismo lo llamábamos lengua, ahora, en este nivel inferior, lo llamaremos signo. El signo es así el resultado de la conexión de un significado con un significante[715]. En un nivel inferior a éste, hay relación entre los elementos pero no hay distinción entre elementos relevantes y no relevantes y, por lo tanto, no existe la necesidad de remitirnos a un otro plano para dar cuenta de los cambios relevantes que tienen lugar en el primer plano. Esto se debe a que en el continuo todo corte es arbitrario. Una vez sentado esto, podemos representar el resultado al que hemos llegado mediante la siguiente figura:

[710] Nótese que podríamos hablar también de substancia real, o de las cosas, o de los hechos de la mente etc. sin que la argumentación fuese alterada en lo más mínimo. El uso del término “ideativo” se remite a Saussure (véase Saussure [1972] p. 156).
[711] Es decir, ese significado es un corte relevante en el continuo ideativo.
[712] Lo que en estas pocas líneas acabamos de presentar es la denominada “prueba de commutación” (cf. Pardo [2001] p. 18) para los planos tanto del significado como del significante.
[713] Es decir, no tienen sentido las discusiones sobre si el lenguaje es expresión del pensamiento (tesis defendida, entre otros por Wittgenstein) o si son las palabras las que moldean el pensamiento. Nótese el carácter problemático de aceptar dos substratos físicos –el sonoro y el de las cosas– que pre-existen o son exteriores a cualquier desdoblamiento previo, es decir, a cualquier habla. Este presupuesto es, sin embargo, algo que viene exigido por el examen de lo que es el fenómeno lenguaje. El paso con el que se evita tener que presuponer algo que no es ningún posible objeto de habla –algo extralinguístico– es el de postular un metalenguaje cuyo objeto sería precisamente aquello que para los demás lenguajes es lo extralinguístico. Este lenguaje es el lenguaje de la física matemática que tiene como objeto de estudio el continuo sonoro-real. El problema que surge con ello –problema en el que no podemos entrar aquí–, es que un metalenguaje así presupone la más que dudosa traductibilidad perfecta entre los lenguajes, es decir, presupone que todo lenguaje es realización material de una misma estructura.
[714] Tomamos prestadas las expresiones de Pardo [2001] p. 22.
[715] Cf. Pardo [2001] p. 24: “un signo es una entidad generada por la conexión de un significante con un significado”.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\frac{\text{Sonido}_i}{\text{Sonido}_j} = \text{Fonema}_h}{\frac{\text{Idea}_m}{\text{Idea}_l} = \text{Lexema}_k} = \text{Signo}_v}{\cfrac{\frac{\text{Sonido}_p}{\text{Sonido}_j} = \text{Fonema}_g}{\frac{\text{Idea}_m}{\text{Idea}_l} = \text{Lexema}_r} = \text{Signo}_u} = \text{Habla}_q}{\cfrac{\cfrac{\frac{\text{Sonido}_w}{\text{Sonido}_e} = \text{Fonema}_d}{\frac{\text{Idea}_t}{\text{Idea}_y} = \text{Lexema}_f} = \text{Signo}_c}{\cfrac{\frac{\text{Sonido}_u}{\text{Sonido}_o} = \text{Fonema}_z}{\frac{\text{Idea}_a}{\text{Idea}_s} = \text{Lexema}_x} = \text{Signo}_b} = \text{Habla}_ñ} = \text{Lengua}$$

En él, los distintos sonidos son puestos en relación y son reconocidos como relevantes o irrelevantes para la estructura, iguales o distintos entre sí, materializaciones del mismo fonema o no, dependiendo, como hemos dicho, de si introducen un cambio relevante en el lado del significante. Todo esto lo hemos expresado en el dibujo de arriba mediante el uso de la notación para el cociente. En él se han puesto como relata a los sonidos con la intención de expresar la trama relacional sobre la que se definen los sonidos materialmente. A su vez, hemos denominado con “Idea” al lado material de los lexemas[716]. Las ideas son cortes arbitrarios realizados en la substancia ideativa que pueden ser o no relevantes lexemáticamente. La realidad de los fonemas no se decide en su mismo plano sino que queda referido a los lexemas. Hemos expresado esto poniendo a los fonemas en relación a los lexemas dentro de un mismo cociente. En el siguiente nivel, la igualdad o diferencia entre distintos signos de un mismo habla se define en base a las diferencias que tienen lugar entre otros signos de otro habla. Esto da origen a una nueva entidad a la que podríamos llamar metasigno[717].

Tal y como se ve en este esquema, el isomorfismo inicial o de primer nivel en el que la relación biunívoca era el que tenía lugar entre los elementos, los elementos del habla se nos convierte en una relación que se da entre relaciones que se dan entre relaciones que se dan entre relaciones entre sonidos o ideas. Esta ramificación relacional ha sido posible gracias a la propiedad de los elementos de las relaciones entre elementos de ser, ellas mismas, relaciones[718]. Lo importante para nuestro propósito es hacer notar que los elementos de una

---

[716] Para no complicar inecesariamente nuestra exposición, hemos supuesto que los únicos significados que se expresan en una lengua son las que uno encuentra en el diccionario, ignorando con ello los significados de los modos y tiempos verbales entre otros.

[717] Desde esta perspectiva, aprender un habla no es otra cosa que aprender las distintias relevancias e irrelevancias que tienen lugar en los distintos niveles que aquí hemos desglosado. Por ejemplo, en el nivel fonético-léxico, en un habla puede ser relevante la diferencia entre la “o” abierta y la “o” cerrada mientras que en otro habla puede no serlo. En el plano sígnico, en un habla puede ser relevante la distinción entre “bosque” y “madera” mientras que en otro (por ejemplo, en el francés) puede no serlo.

[718] Con ello hemos obtenido aquello que Lévi-Strauss llamaba *bundles of relations* (en Lévi-Strauss [1955] p. 431).

relación estructural no están definidas fuera de esa relación. Es la relación misma la que confiere contenido –en este caso topológico– a los elementos que en ella forman parte. Los elementos no son nada, no están definidos fuera de la relación de la que forman parte. Del mismo modo, ya hemos visto que los elementos de un cociente diferencial no son nada, no están definidas, fuera de la relación en la que toman parte. Para comprender esto último tenemos que distinguir entre tres tipos de relaciones que con Deleuze llamaremos las relaciones reales, imaginarias y simbólicas[719].

Las relaciones reales son aquellas en las que los elementos tienen un contenido cualitativo concreto fuera de la relación en la que participan. Por ejemplo, decimos que el cociente 3/7 es una relación real por que sus elementos, el número 7 y el número 3, tienen un contenido determinado fuera de la relación misma. Las relaciones imaginarias son aquellas en las que los elementos no tienen un contenido determinado fuera de la relación pero que sí adquieren uno concreto dentro de la misma. Por ejemplo, en la relación o fórmula por la que se define una recta, $ax\text{-}y=r$, las variables x e y no tienen ningún valor determinado fuera de la relación pero sí dentro de ella. La variable x obtendrá un valor determinado cada vez que le es asignado un valor a la variable y e viceversa.

Algo enteramente distinto ocurre con las relaciones simbólicas. En éstas, al igual que en las relaciones imaginarias, los elementos de la relación no tienen un valor determinado fuera de la relación pero, a diferencia de lo que ocurre en las relaciones imaginarias, tampoco dentro de ella[720]. Los elementos de la relación no adquieren un contenido cualitativo, si pensamos en la relación estructural, ni cuantitativo, si pensamos en el cociente de diferenciales, pero sí definen una relación con un contenido particular. Al valor de estas relaciones llama Deleuze “singularidades” (*Singularités*). El fondo sobre el que está definido el diferencial es el continuo real representado por una variable, mientras que el fondo sobre el que se define un fonema es el continuo sonoro. No obstante, siguiendo con la analogía, ni el diferencial es algo cuantitativo ni el fonema algo físico.

Tanto el cociente de diferenciales como la estructura son ambos relaciones entre elementos que no están cuantitativa ni cualitativamente determinados fuera de esta relación. Los elementos de la estructura lo mismo que los momentos del cociente se definen en su mutua relación. De ahí que, del mismo modo que en el caso de la estructura, “el sistema es inmanente al elemento”[721], el cociente –el lugar de la relación– será inmanente al diferencial. Dentro de la relación, la determinación de los elementos es meramente posicional o topológica, nunca propiamente cualitativa o cuantitativa. Aquello que hemos denominado Singularidad no es algo que cualifique a un elemento, sino más bien, el límite que separa y delimita a los elementos. El que los elementos lleguen a tener un límite que los delimita no implica, sin embargo, que adquieran por ello un contenido real[722].

Este límite que se establace sobre la base de un continuo[723] uniforme es lo único de lo que se dispone para delimitar a los elementos de la relación. En un caso hablábamos de un

---

[719] Cf. Deleuze [2000] p. 308 y sigs.

[720] En este punto nos alejamos de la lectura de Deleuze para quien “les deux éléments se déterminent réciproquement dans le rapport” (Deleuze [2000] p. 309). Frente a ello, la lectura que defenderá en la *Logique du Sens* es más cercana a las tesis que aquí defendemos. En esta obra no afirmará que los elementos se determinan en la relación, sino que la relación entre los elementos adquiere una determinación: “tout à fait comme dans le calcul différentiel, où des répartitions de points singuliers correspondent aux valeurs des rapports différentiels” (en Deleuze [1969] p. 65).

[721] Cf. Pardo [2001] p. 20.

[722] Algo que sí ocurre en la relación imaginaria.

[723] “Continuo” aquí en un sentido no hegeliano.

continuo sonoro frente a un continuo ideativo, en el otro caso hablábamos del continuo de la variable x frente al de la variable y. Este límite es aquello que al final de la categoría de la Cantidad y a lo largo de la Medida será denominado la cantidad que hace de algo su cualidad. En efecto, el límite es cuantitativo como lo es la base sobre la que él ejecuta su función: el continuo uniforme o cuantitativo. A su vez, el límite es cualitativo porque, como hemos visto, sólo tiene realidad dentro de una relación. El límite es la expresión cuantitativa de algo cualitativo, la relación. A la relación que unifica estos dos lados, lo cualitativo y lo cuantitativo, lo cuantitativo que es resultado de lo cualitativo, y lo cualitativo que es lo cuantitativo, es a lo que llamábamos con Hegel, relación cuantitativa, y con el estructuralismo, relación simbólica. De ahí que, cambiando ligeramente la cita, se podría decir con Deleuze:

L'origine mathématique du structuralisme doit plutôt être cherchée du côté du calcul différentiel, et précisément dans l'interprétation qu'en donna Hegel[724]

Pero hay más. Lo mismo que en el caso del habla habíamos llegado a identificar distintos niveles de relaciones[725], lo mismo ocurrirá también con los diferenciales dado que pueden tomar parte en relaciones o en relaciones entre relaciones o etc. De este modo, además del cociente diferencial en el que los diferenciales aparecen en una relación elemental,

$$\frac{dy}{dx}$$

podemos construir también relaciones entre relaciones como la siguiente:

$$\frac{\frac{dx}{dy}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dxdx}{dydy} = \frac{d^2x}{d^2y}$$

Para, de este modo, obtener en el cálculo diferenciales de orden superior. Obtendremos con ello relaciones entre diferenciales, relaciones entre relaciones entre diferenciales, relaciones entre relaciones entre diferenciales etc. Podría decirse incluso que, del mismo modo en que en el caso del habla eran únicamente los lexemas y los fonemas los que presuponían, por así decir, a un continuo ideativo-sonoro, en el caso de los diferenciales únicamente el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$ –la relación entre diferenciales– apunta al continuo en el que se definen las variables x e y, siendo las restantes relaciones entre relaciones entre diferenciales y las relaciones entre etc., relaciones en las que la continuidad

[724] Cf. Deleuze [2000] p. 309
[725] Es decir, habíamos identificado "relaciones" , "relaciones entre relaciones", etc.

en la que se basan no es ya el de las variables de la función, sino el de la relación entre los coeficientes diferenciales[726].

Por último, nótese que del mismo modo en que un completo isomorfismo que se dé en todos lo niveles de relación de dos Hablas indica la igualdad[727] entre las mismas[728], un completo isomorfismo en todos los niveles de relación entre infinitesimales de dos funciones dadas no indica otra cosa que la igualdad entre ellas. Y es que decir esto último es lo mismo que decir que las dos funciones tienen la misma expansión de Taylor[729] y habíamos visto que la definición y por tanto identidad de una función –en el caso de Lagrange- era dada por la serie de Taylor.

En el capítulo quinto, dedicado a la última categoría de la Medida, veremos que la esfera en la que se desenvuelve este juego de las relaciones y relaciones entre las relaciones etc. no es el de la matemática, sino el de la química. Con ello, lo puesto en relación no serán diferenciales sino elementos químicos y compuestos de estos elementos. Del mismo modo en que una comunidad de estructura, un isomorfismo, apunta a algo común que se manifiestaría como ésta u otra materialización, el juego de relaciones entre elementos dará lugar en Hegel a un substrato común llamado indiferencia que será la antesala del traspaso al segundo libro de la *Wissenschaft der Logik*: *die Lehre von Wesen*. Para llegar a tal punto habrá que comenzar por mostrar cómo las sucesivas relaciones, relaciones de relaciones, etc. en las que entra a formar parte algo hacen de este algo lo que es: las sucesivas marcas dejarán de ser algo externo a la cosa para pasar a constituir su misma esencia. Antes de entrar a ver cómo tiene lugar esto, dedicaremos el siguiente capítulo a exponer el concepto del cociente diferencial de Hegel que girará principalmente en torno al diálogo que mantendrá el filósofo con los principales fundadores del cálculo.

---

[726] Por ejemplo, las dos variables continuas en las que se fundamenta la relación de la relación entre diferenciales son el cociente diferencial, por un lado, y la variable independiente *x*, por el otro.

[727] Igualdad no material, sino formal

[728] igualdad que no quiere decir otra cosa que las dos hablas son realizaciones materiales distintas de una misma lengua.

[729] En efecto, decir que dos curvas tienen el mismo cociente diferencial, la misma relación entre los cocientes diferenciales, la misma relación entre la relación entre los cocientes diferenciales etc. es lo mismo que decir que tienen los mismos cocientes diferenciales de primer, segundo, tercer, etc. orden, y esto es equivalente a decir que las dos funciones tienen la misma expansión de Taylor, es decir, que las dos funciones son –estructuralmente– la misma función.

4. CAPÍTULO

EL CONCEPTO DEL COCIENTE DIFERENCIAL EN HEGEL

A la hora de presentar una historia de los orígenes y desarrollo del cálculo, resulta habitual encontrarse con una espléndida trama variopinta de opiniones y concepciones de la noción del diferencial así como de su cociente, que introduce un elemento de arbitrariedad en la historia de su evolución. Es algo parecido a lo que ocurre con los desacertados manuales de *historia de filosofía* en los que la ausencia de diálogo entre los sistemas de pensamiento hace que su estudio se convierta en algo dificil de olvidar[730]. No podemos pretender reconstruir una historia del cálculo en el que pusiéramos a dialogar a sus protagonistas. Un trabajo así excedería el terreno sobre el que se juega nuestro tema. En vez de esto, lo que sí haremos será intentar ofrecer un cuadro lo menos caprichoso posible de la noción de infinitesimal sostenido por aquellos matemáticos con los que dialoga Hegel. La primera distinción importante que haremos al respecto situará a aquellos que hacen uso de los indivisibles por un lado y a aquellos otros que hacen uso de infinitesimales por el otro. La primera noción será propia del pensamiento matemático clásico, mientras que la segunda, introducida por Kepler, caracterizará al pensamiento matemático moderno[731]. Dentro de este pensamiento matemático moderno distinguiremos, a su vez, un línea que, comenzando con Euler, dará lugar, de la mano de D. Laugwitz y A. Robinson, a la formulación *Non-standard* del cálculo. Frente a ellos situaremos a matemáticos como Newton, Leibniz o Lagrange, autores cuya obra matemática gira en torno a la noción vulgar del infinitesimal.

Será precisamente esta noción de infinitesimal con la que dialogará Hegel en la *Wissenschaft der Logik*. Con ello quedará fuera de cobertura la versión *Non-standard* del cálculo que, como tendremos ocasión de ver, será la que identifiquemos con la versión propiamente moderna del Análisis. No ocurrirá lo mismo con autores posteriores a Hegel como es el caso de Cauchy y Weierstraß. Veremos en el apartado 4.3 que la versión *epsilóntica* del diferencial de estos dos autores encaja sin ningún problema dentro del marco del cociente diferencial hegeliano y que, por esta razón, no supone ninguna dificultad poner a dialogar a Hegel con estos dos autores. Esto no significa que no reconozcamos la rigurosidad que la nueva definición, de la mano principalmente de Cauchy, introduce en el cálculo. De ahí que llamaremos la atención sobre estas mejoras, al menos en la medida en que resulten relevantes para nuestra investigación.

---

730 Un martirio vamos. Martirio que se debe no sólo al aburrimiento que irradian sino a la dificultad que su estudio supone. En efecto, no hay nada más dificil que estudiar lo inconexo y gratuito. Tanto es así que el recurso a la memorización se hace casi imprescindible.

731 Una historia del cálculo que se basa en este cambio de paradigma es el de Malet [1996].

El autor a cuya obra mayor violencia hay que ejercer para incorporarlo en esta clasificación es Lagrange. Como se sabe, la obra con la que Lagrange contribuye decisivamente al cálculo se propone precisamente eliminar el uso de los infinitesimales del cálculo diferencial e integral. En última instancia, el cálculo de Lagrange será el proyecto de reducir el análisis al álgebra. De este modo, si resulta que llegamos a situar a Lagrange entre aquellos matemáticos que, como Leibniz, piensan el cálculo a partir del infinitesimal, no lo hacemos ignorando el propósito de la *Théorie des Fonctions Analytiques*, sino por que consideramos que Lagrange, si bien es cierto que piensa en contra del –uso del– infinitesimal, tiene un concepto del infinitesimal que sigue siendo el de Leibniz o Newton. De ahí que dijésemos más arriba que la obra de este grupo gira en torno a –sea por acción o por omisión– la noción vulgar de infinitesimal, sin que en ningún momento se llegue a pensar en superarlo. Esto último es algo, como decíamos, cuyo origen hay que situar en Euler y para cuya formalización habrá que esperar hasta la segunda mitad del siglo XX.

El diálogo con este proyecto[732] queda fuera del marco de esta tesis y de ahí que sólo nos ocupemos de él únicamente de una manera indirecta o mediada[733]. Otro autor al que tampoco podremos dedicarle la debida atención es Leibniz. El enfrentamiento de Hegel con el trabajo matemático de Leibniz es lo suficientemente pobre como para que se pueda concluir que Hegel ignoraba los trabajos que publicó aquél en la *Acta eruditorum*. Las referencias a Leibniz, además de ser indirectas –e.d., mediadas por exposiciones como las de Wolff–, resultan ser unas meras indicaciones. La tarea del intérprete, tarea que hemos acometido, consistirá en seguir la dirección que marcan estas señales. Con ello, nuestra exposición terminará por ofrecerle a Leibniz un espacio mayor de lo que cabría esperar en un primer momento de la lectura del texto de Hegel.

Digamos ahora algo sobre el texto en el que Hegel trata del coeficiente diferencial. Resultará tal vez sorprendente constatar que el lugar en donde Hegel presenta su *filosofía del cálculo* quede fuera del texto principal de la *Wissenschaft der Logik*. El caso es que en la primera edición de la *Wissenschaft der Logik*, Hegel dedicará una extensa observación (*Anmerkung*) a discutir el significado del cálculo diferencial y integral. En la segunda edición, publicada 20 años después, Hegel añadirá dos observaciones más, pasando con ello la extensión de las notas de 36 páginas de la primera edición a las 73 de la segunda. En esta última edición, cada observación irá acompañado además de los siguientes títulos:

1) “La determinación conceptual del infinito matemático”[734].

2) “El objetivo del cálculo diferencial deducido de su aplicación”[735].

3) “Más cosas sobre las formas que estan tramadas en la determinación cualitativa de las magnitudes”[736].

Las dos primeras observaciones serán las más relevantes para nuestro tema. El tercero de ellos, el más corto de los tres, se centra casi exclusivamente en la posibilidad del cálculo integral y será analizado brevemente al final del apartado 6.2.4. En cuanto a la distinción entre la primera y la segunda observación cabe decir que se fundamenta –si bien Hegel no lo diga–

[732] Nos referimos al análisis *Non-standard*.
[733] Por ejemplo, cuando hablemos de Euler.
[734] “Die Begriffsbestimmtheit des mathematischen Unendlichen” (en Hegel [1985] p. 236).
[735] “Der Zweck des Differentialkalküls aus seiner Anwendung abgeleitet” (en Hegel [1985] p. 273).
[736] “Noch andere mit der qualitativen Größenbestimmtheit zusammenhängende Formen” (en Hegel [1985] p. 299).

en la división principal de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange. Como veremos en el punto 4.2.5, éste había considerado oportuno dividir la exposición del cálculo en una primera parte teórica o formal y en una segunda parte semántica o de aplicación. Siguiendo esta distinción, Hegel se dedicará en la segunda observación a repasar las formas en las que se confiere contenido a las relaciones entre diferenciales obtenidas en la parte teórica del cálculo. Pero este objetivo no agotará todo el contenido de esta segunda observación. Tanto es así que Hegel incorporará consideraciones de orden conceptual que no habían sido recogidas en la primera edición dentro de esta segunda nota. El caso más relevante lo constituyen las reflexiones de Hegel con motivo de una recensión sobre una obra que marcará los estándares del rigor desde entonces: el *Résumé*[737] de Cauchy. La distinción entre el contenido de las dos observaciones no resulta por ello tan evidente y podría decirse que obedece, más bien, al hecho de que Hegel decide no alterar el contenido de la nota de la primera edición. Esto hace que los resultados de las nuevas investigaciones que, sobre este mismo tema, quieran incorporse a la segunda edicción, vayan a formar parte necesariamente de la segunda y tercera notas.

Esta es la razón por la que obviaremos la existencia de tres observaciones distintas relevantes para nuestro tema en la *Wissenschaft der Logik*, y procederemos como si sólo hubiese un único texto sin compartimentar del que habría que dar cuenta en este trabajo. El criterio que utilizaremos para ordenar nuestra exposición consiste en poner a dialogar a Hegel con los principales fundadores del cálculo diferencial. Este diálogo es algo que Hegel mismo realiza a lo largo de las tres observaciones. El problema es que no todo el contenido de las observaciones está puesto en juego en los diálogos virtuales de Hegel con Euler, Lagrange o Newton. Por esta razón, nuestra tarea va a consistir en presentar de una manera unitaria y coherente el diálogo real o virtual de Hegel con cada uno de los matemáticos. Debido a que un diálogo que presenta unas características en las que el discurso de diferentes autores puede estar recogido bajo una misma crítica corre el peligro de entrar en repeticiones y, además de ello, debido a que no todos los autores gozan de la misma relevancia para nuestro propósito, hemos procedido a seleccionar el trabajo de aquellos matemáticos con los que consideramos que llegaremos a agotar el contenido de las reflexiones de Hegel en relación al cociente diferencial. De este modo, en aquellos casos en los que la exposición así lo exija, tendremos la oportunidad de acceder al trabajo de matemáticos que no forman parte del texto principal. El acierto de esta selección sólo podrá ser constatado desde el interior del texto mismo que ahora pasamos a exponer.

. 4.1 PRELIMINARES

4.1.1 La relación y el cociente

El verdadero infinito expresado por el cociente de diferenciales tiene un antecedente inmediato en la expresión finita de un número mediante una relación. Una cantidad cualquiera puede expresarse mediante una relación o mediante una serie infinita[738]. A la primera forma

[737] El título completo es: *Résumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul infinitesimal*. Sobre Cauchy véase el apartado 4.3.1.

[738] Así, por poner un ejemplo, el mismo número es expresable mediante la fracción $\frac{1}{1-a}$ y mediante la serie $1+a+a^2+a^3+\dots$.

de expresar el número se le suele denominar expresión finita del número[739] y normalmente toma la forma de una fracción (*Bruch*). Aunque es la serie la que lleva la denominación de ser infinita, será la expresión finita la que agota y expresa todo el contenido del número. La serie intenta expresar mediante un Cuanto, mediante una sucesión, algo que es, propiamente, una relación. Este intento de expresar algo cualitativo y, por ende, infinito con una sucesión finita nu puede menos que fracasar. En efecto, lo obtenido por la serie será siempre una aproximación defectuosa del número, y no el número mismo. La serie infinita es, por definición, una serie incompleta que nunca alcanza su objetivo. Esta incapacidad es resultado del tipo de infinitud que tiene lugar en la serie y que no es otra que la denominada mala infinitud[740]. Del mismo modo que la mala infinitud, la serie está también afectada de un "deber" (*Sollen*) que se encuentra fuera de sí. Es la expresión que hemos denominado como "finita" la que propiamente será capaz de expresar cualquier cantidad racional y la que es producto de la verdadera infinitud. La expresión finita es una relación –una negación de la negación– que, al tener la negación dentro de sí, tiene en sí la verdadera infinitud[741].

La afirmación de la heterogeneidad esencial entre la serie y la expresión finita no está limitada a la elección de una unidad en particular[742]. Números que en una unidad son expresados por una serie finita pueden necesitar series infinitas en otros sistemas con distintas unidades como fundamento[743] y viceversa. El momento de la infinitud no le viene a la

---

[739] Cf. Hegel [1985] p. 243: "Der Bruch selbst heißt die Summe oder der endliche Ausdruck derselben [a saber, de la serie infinita]".

[740] Ésta es identificada con el infinitio de la imaginación de Spinoza en sus *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*: "Die meisten Menschen kommen nur zum ersten [al infinito de la imaginación]; dies ist das schlechte Unendliche, wenn man sagt, „und so fort ins Unendliche", z.B. die Unendlichkeit des Raums von Stern zu Stern […]. Die unendlichen Reihen in der Mathematik, der Zahl, sind dasselbe" (en Hegel [XX] p. 171).

[741] Cf. Hegel [1985] p. 245: "In dem endlichen Ausdruck dagegen, der ein Verhältnis ist, ist das Negative immanent als das Bestimmtseins der Seiten des Verhältnisses durcheinander, welches ein in sich Zurückgekehrtsein, sich auf sich beziehende Einheit als Negation der Negation […] ist, hiermit die Bestimmung der Unendlichkeit in sich hat". Resulta útil hacer uso de la distinción *kantiana* entre concepto como regla de construcción y concepto como conjunto de notas en este contexto. La serie infinita sería la expresión en formato "conjunto de notas" del concepto de número. La imposibilidad de la pretensión de la serie de agotar el número será así la imposibilidad de terminar por cerrar un conjunto que tiene una cantidad infinita de notas. El hecho de que seamos capaces de obtener estas notas presupone que se posee la expresión del concepto como regla de construcción. A esta regla llamará Hegel "Das Gesetz des Fortgangs" (en Hegel [1985] p. 244). Pero esto no significa que el concepto como regla de construcción sea la serie misma. La serie es la aplicación siempre finita del concepto como regla de construcción.

[742] No parece que Rehm haya llegado a comprender esto. Según la autora (cf. Rehm [1963] p. 20), el cambio de unidad que propone Hegel supondría salirse de las posibilidades de representación (*Darstellungsmöglichkeit*) que nos ofrecen los números reales, cuando lo cierto es que, como veremos, el cambio de unidad no tiene absolutamente nada que ver con la cuestión de si se cumplen, o no, tales posibilidades. No hay unidades que cumplen con las posiblidades de representación y unidades que no cumplen con estas posibilidades.

[743] Por poner un ejemplo, la serie finita 0.25 se convierte en infinita si elegimos como unidad de un nuevo sistema numérico lo que en el primer sistema era denominado por el número 0.75. Esta serie infinita es 0.3333... Obviamente, todo esto parte del concepto de número como un nombre o designador rígido de, por ejemplo, un segmento y no –en contra de lo cabría esperar– como una posición vacía en una red de relaciones . El texto de Hegel no es claro en este punto y parece incluso que se refiere al cambio de la base del sistema numérico (por ejemplo, pasar de la base 10 del sistema decimal a la base 2 del sistema binario). Pero si esto fuese así, la afirmación de Hegel no se sostendría ya que no es posible que, cambiando la base, lo que en un sistema numérico es expresable mediante una serie finita en otro sistema numérico se vuelva expresable mediante una serie infinita o viceversa. Cf. Hegel [1985] p. 244: "So wie es hier auch nicht darauf ankommt, daß es andere Brüche gibt als der zum Beispiel genommene $\frac{2}{7}$, die, zu Dezimalbrüchen gemacht, nicht eine unendliche Reihe geben; jeder aber kann für ein Zahlensystem von anderer Einheit als eine solche [esto es, como "Unendliche Reihe"] ausgedrückt werden". Nuestra interpretación intenta evitar toda lectura que haga internamente inconsistente el texto de Hegel.

expresión $\frac{2}{7}$ del hecho de ser expresable mediante una serie infinita, sino del hecho de que se trata de una relación en el que lo relevante no son los lados considerados aisladamente, sino los lados considerados en su relación mutua, es decir, los lados como momentos[744]. Esto hace que los lados o momentos sean substituibles si respetamos la proporción que expresa la fracción $\frac{2}{7}$. Es decir, los momentos 2 y 7 son substituibles si se respeta aquél momento del cual son momentos: si se respeta el exponente. El numerador 2 es substituible por los numeradores 4, 6, etc. si, al mismo tiempo, el denominador 7 es substituido por los denominadores 14, 21, etc[745]. Este carácter de momentos es lo que hace de la fracción $\frac{2}{7}$ una relación que, en cuanto que tal, tiene el caracter de infinitud en sí[746]. El número dos que aparece en la expresión $\frac{2}{7}$ no es meramente un dos, sino un dos que es puesto en relación con un siete[747]. El dos de la fracción $\frac{2}{7}$ no es un dos cuyos límites sean indiferentes[748], sino que es momento de un todo Dentro de este todo, el número dos adquiere un significado cualitativo: dentro de la unidad limitada por el exponente, el dos es negado o determinado por el siete. La fracción $\frac{2}{7}$ tiene con ello la negación dentro de sí. El resultado de esta negación de la negación, el resultado de la verdadera infinitud, es un valor que es expresado, en este caso,

---

[744] Sin tener que llegar a las sutilidades en las que hemos aterrizado en la nota anterior, cabe recordar aquí que –al menos si nos mantememos fuera del análisis *Non-standard*– la distinción entre los números con expresión decimal finita (1, 0.25, etc.) e infinita (π, 0.333..., etc.) no es adecuada para expresar la distinción entre los números naturales, reales e irracionales. Así, el número 1 es igual a la expresión 0.9999 (1=0.999... y no meramente 1≈0.999...) lo mismo que 0.25 es igual a 0.24999... Esto es algo deducible de expresiones habituales como 1/3·3=1. Del mismo modo en que se supone que la expresión 1/3 agota o recoge toda la serie infinita 0.333..., 0.999... es recogido también en la expresión 1. Con esto, los números naturales –números a los que Hegel (en Hegel [1985] p. 242) llama inmediatos (*unmittelbare*)– tienen que ser expresados en forma fraccional para dar cuenta así de la verdadera infinitud que expresan. Es decir, la expresión del número 2 como $\frac{4}{2}$ no es ya un abuso del formalismo sino algo que expresa la verdadera constitución de las cosas. Si queremos ser consecuentes con esto que acabamos de exponer, tendremos que desechar la distinción entre los números inmediatos y los mediatos ya que la necesidad de dar cuenta de la infinitud existe en ámbos casos. De ahí que haya tanta infinitud –y, de ahí, tanta ncesidad de recurrir a la fracción– en 1/3 como en 2=2/1. Si se llega a olvidar esto, es decir, si se olvida que todo número es igual a una expansión infinita decimal, la superioridad de la expresión finita no podrá basarse en que ésta sea una relación –observación en la que se encierra Rehm (en Rehm [1963] p. 21)– sino a que en la primera la regla de construcción es finita y, por ello, realizable en todos sus pasos, mientras que en el segundo caso la regla de construcción nunca es realizable del todo.

[745] Cf. Hegel [1985] p. 242. Haciendo uso de la terminología fregeana, podríamos decir que las expresiones $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{6}{21}$, etc. son los distintos sentidos con los que se nos manifiesta una misma referencia.

[746] Algo que, como decíamos al principio, hace que la expresión de un número mediante una relación sea el antecedente del cociente diferencial.

[747] Este carácter de relación de la fracción es lo que hace de ella algo cualitativo. Cf. Hegel [1985] p. 242: “Insofern aber 2 und 7 nicht nach der Bestimmtheit, solche Quanta zu sein, gelten, so ist ihre gleichgültige Grenze aufgehoben; si haben somit nach dieser Seite das Moment der Unendlichkeit an ihnen, indem sie nicht bloß eben nicht mehr sie sind, sondern ihre quantitative Bestimmtheit, aber als eine an sich seiende qualitative-nämlich nach dem, was sie im Verhältnis gelten bleibt”.

[748] Esto es lo que ocurre precisamente con los límites de todo número descontextualizado o mero cuanto en el que el límite le es indiferente.

por el exponente de la fracción $\frac{2}{7}$. Este mismo valor es también expresado, sólo que aproximativamente, mediante una serie infinita.

Este valor es algo así como la marca definida sobre una recta por la expresión $\frac{2}{7}$. La idea de una recta sobre la cual se establecen marcas o valores es algo que ya estaba implícitamente asumida en el comienzo del párrafo anterior cuando se habló de cambios de unidades[749]. La consecuencia de este planteamiento, por así decir, geométrico es que la fracción no agotará lo que Hegel entiende por relación. Es decir, no todo valor o relación es expresable por una fracción. Aquellos valores que no es posible expresarlos por una fracción, pero que son, sin embargo, resultado de una relación son aquellos que son expresados por los números irracionales[750]. De este modo, la relación entre el radio y la circunferencia de un círculo llega a definir un punto sobre la recta sin que este punto sea expresable mediante el uso de una fracción[751]. La serie que intentará aproximarse al valor de esta relación incomensurable es denominada por Hegel "serie no sumable" (*nicht summierbare Reihe*) cuya infinitud es de un grado más alto que la infinitud de la serie que expresa el valor de una fracción, valga la redundancia, racional[752]. Esto último concuerda con los resultados obtenidos por la denominada Teoría de conjuntos en la que se llega a mostrar que la cardinalidad (*mächtigkeit*) de los números racionales es menor que la de los números reales: $\aleph_0 < \aleph_1$. De ahí que haya tenido que quedar claro que cuando Hegel habla de la relación cuantitativa no se refiere únicamente a los números racionales sino que incluye también a los números reales. Esta es la razón de que las notas sobre el cálculo de la *Wissenschaft der Logik* no traten de la aritmética sino de análisis.

4.1.2 La incógnita, la variable y la variación de la variable

En la primera de las tres notas sobre el cálculo, Hegel realizará una crítica de los conceptos de magnitud incógnita (*unbekannte Größe*) y magnitud variable (*veränderliche Größe*)[753]. Esta crítica consistirá en la denuncia del uso internamente incoherente de estos términos en la matemática. No sólo ocurre que no se llegan siempre a distinguir los significados de la incógnita y de la variable, sino que resulta además que distinciones relevantes dentro de cada uno de estos conceptos son sencillamente ignoradas. Debido a que el cociente de diferenciales remite irremisiblemente al concepto de variable, resulta necesario delimitar adecuadamente ésta antes de entrar a ver cuál es el contenido de la primera.

La incoherencia en el uso de los términos "incógnita" y "variable" llega hasta tal extremo que muchas veces lo denotado por la palabra "incógnita" no es algo cuyo valor se desconozca ni lo denotado por "variable" es algo que varíe. Así, en un sistema de ecuaciones como el siguiente:

---

[749] Es decir, sólo sobre la igualdad garantizada por una misma recta tiene sentido decir que lo que en el sistema númerico *A* denominábamos 1 en el sistema numérico *B* es denominado 0.75.

[750] Para ser exactos, Hegel no dice aquí "Irrational", sino "Incomensurable" (Cf. Hegel [1985] p. 246). Los dos términos son, si hacemos caso al libro X de los Elementos, sinónimos.

[751] Es decir, sin que esta relación sea expresable mediante una razón o número racional.

[752] Cf. Hegel [1985] p. 246: "unendliche Reihen […] die nicht summierbar sind […] enthalten eine höhere Art der Unendlichkeit als die summierbaren".

[753] Cf. Hegel [1985] pp. 248-251.

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x \end{cases}$$

Las magnitudes x e y no son, dentro del sistema, incógnitas sino que tienen el determinado valor *(x,y)=(-2,2)*. Hegel dirá en este sentido que el valor de las supuestas incógnitas x e y es *en sí* conocido[754]. Estas supuestas incógnitas son lo que Hegel llama meras (*bloß*) incógnitas. Con ello, Hegel quiere reservar el uso del término de incógnita para las magnitudes que tienen lugar en las expresiones como esta otra:

$$a / b = 5$$

Como ya hemos visto en la sección anterior, en esta expresión las magnitudes a y b no tienen un valor determinado y por ello reciben el nombre de incógnitas. Sin embargo, no es raro encontrarse con que a las magnitudes a y b se les llame también variables. Esto se ve mejor si escribimos la expresión anterior así:

$$y = 5x$$

En él, la incógita a ha sido substituida por la variable x y la incógnita b ha sido substituida por la variable y. La magnitud tomada como una variable no es otra cosa que un conjunto infinito[755] de números[756]. Lo que ocurre es que, si esto es así, la noción de variable no tiene nada que ver con variación, sino que resulta un concepto estático. Las magnitudes de la expresión $y = 5x$ son pares ordenados mediante una relación fija o un Cuanto. Este aspecto estático de la magnitud no es el que se pone en juego en el Cálculo Diferencial e Integral[757]. En el Cálculo Diferencial e Integral las variables no sólo tienen un valor indeterminado –en este sentido son incógnitas–, sino que la relación misma resulta variable[758]. Si denominamos como variable tanto a las magnitudes de las expresiones lineales como a las de las expresiones potenciales, correremos el riesgo de perder de vista el carácter propio del Calculo.

Ante esta red de incongruencias, podríamos proponer la siguiente denominación para las distintas modalidades de magnitudes. En los sistemas de ecuaciones con tantas incógnitas como ecuaciones las incógnitas serán magnitudes determinadas incógnitas. Si hay más

[754] Cf. Hegel [1985] p. 250: “bloß unbekannten Größen, die ansich vollkommen bestimmte Quanta oder ein bestimmter Umfang von bestimmten Quantis sind”.

[755] Nótese que Hegel habla aquí de algo que para Kant es un imposible (cf. Kant [PM] p. 86: “Eine unendliche Menge ist aber unmöglich”). Esta imposibilidad no es lógica sino constructiva. En el *Opus Postumum* (cf. Kant [XXII] p. 741) llamará a este conjunto infinito *infinitum actuale*. La imposibilidad de un conjunto tal quedaba fundamentado en *KrV* B111.

[756] Cf. Hegel [1985] p. 249: “unerschöpfliche Menge von Zahlen”.

[757] Cf. Hegel [1985] p. 250: “*x* und *y* [...] sind nicht in derjenigen Bestimmung, in welcher die Differential- und Integralrechung sie betrachtet”. Queda por ver si el carácter no estático del que ahora estamos hablando tiene algo que ver con lo que habitualmente se denomina “movimiento” o si se trata, más bien, de un movimiento muy particular que es própio a la entera *Wissenschaft der Logik*.

[758] Recuérdese que para Hegel la derivación de una función lineal es un abuso de formalismo. Cf. Hegel [1985] p. 251. Cf. al respecto el punto 3.3.1.

incógnitas que ecuaciones y si éstas expresan una relación lineal las incógnitas serán magnitudes indeterminadas incógnitas. Por último, las incógnitas que tienen lugar en ecuaciones no lineales podrían denominarse magnitudes variables. Como hemos visto, lo característico de las variables es que su relación no es algo que esté fija. Para conocer los valores que toman la variables no necesitamos conocer el Cuanto que determina su relación, sino la ley de variación de esta relación. Esta ley de la variación puede ser, a su vez, expresada por una ley lineal o no lineal. Debido a que la ley de la relación es una ley de una variación, tendrá que poder ser expresable por una ecuación con incógnitas indeterminadas o variables. Así, si la ecuación es $f(x) = y = x^2$, la ley de la variación de la relación entre las variables x e y será $f'(x) = 2x$. Debido a que obtener la ley significa obtener una imagen fija de algo que era variable[759], su obtención exigirá el uso de variables que varían. Y como la variación es variable, no podrá ser congelada si no es tomando los primeros o últimos momentos de la variación. Esta es la razón de que los infinitesimales sean denominados por Hegel magnitudes en devenir o, lo que es equivalente, en contradicción o contradictorias.

4.2. HEGEL ANTE LOS FUNDADORES DEL CÁLCULO

4.2.1. Euler

El matemático alemán Leonard Euler va a ser el precusor de Lagrange en otorgar un papel central en el Cálculo diferencial a la expresión analítica en la definición de una función[760]. Como hemos visto ya en el apartado 3.3.3 de este trabajo, esta expresión analítica era la serie de potencias:

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$ [761]

es decir,

$$f(x+\omega) = f(x) + P(x)\cdot\omega + Q(x)\cdot\omega^2 + R(x)\cdot\omega^3 + S(x)\cdot\omega^4 + ...$$

Euler presupone que toda función es expresable en términos analíticos. Es decir –si queremos evitar expresar esta idea desde una perspectiva moderna– Euler presupone que ser una función es sinónimo de ser expresable mediante una expresión analítica. Partiendo de esta expresión analítica y teniendo en cuenta que para Euler el cálculo diferencial es una rama o modalidad[762] del cálculo de diferencias[763], substituirá en la función analítica la diferencia de y por el diferencial de *y*, y la diferencia ω por el diferencial de x. Es decir,

[759] Es decir, obtener la derivada significa que la variabilidad entre las variables ha sido reducida a la variabilidad entre la variable independiente y la ley.
[760] Cf. Juschkewitsch [1959] p. 241.
[761] Cf. Euler [1755] p. 24.
[762] Cf. Euler [1755] p. 99: "Erit ergo Analysis infinitorum, quam hic tractare caepimus, nil aliud, nisi casus particularis methodi differentiarum".

Δy es substituido por *dy*

ω es substituido por *dx*

Por este simple procedimiento[764] Euler pasa de calcular con diferencias finitas, a calcular con los diferenciales o diferencias infinitamente pequeñas (*infinitae parvae*). El hecho de que los diferenciales de orden superior pueden ser ignoradas "cuando no viene al caso un rigor excesivo en el cálculo"[765] , hace que el Cálculo con diferenciales sea un cálculo menos complicado que el Cálculo con diferencias:

Differentialia igitur multo facilius inueniuntur, quam differentiae finitae. Ad differentiam enim finitam Δy, qua functio y crescit, dum quantitas variabilis x incrementum ω accipit, non sufficit functionem P nosse, sed indagari insuper oportet functiones Q, R, S, &c. quae in differentiam finitam, quam posuimus

$$=P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+\&c.$$

ingrediuntur; ad differentiale ipsius y autem inueniendum fatis est, si nouerimus solam functionem P[766]

Es de este forma como Euler obtendrá la expresión para el primer cociente de diferenciales:

$$dy = P{\cdot}dx \qquad \text{con lo que} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{P}{1}$$

Nótese que, en contra de lo que en un primer momento podría parecer, Euler distinguirá el significado de estas dos expresiones. La primera expresión es la expresión de la igualdad entre dos diferenciales. La segunda expresión es, por el contrario, la expresión de la igualdad del cociente de dos diferenciales y una función, en principio, finita[767]. En la primera expresión

763 Euler utiliza la expresión "diferencias finitas" para referirse al tipo de magnitudes que tienen lugar en el cálculo de diferencias. El primer capítulo de su *Institutiones* está dedicado a este cálculo con diferencias finitas. Cf. a este respecto Juschkewitsch [1959] p. 229.

764 Procedimiento descrito en Euler [1755] pp. 103-104.

765 Semejante argumento es utilizado por Euler en Euler [1755] p. 103: "Si igitur incrementum ω, quod quantitas variabilis *x* accipare concipitur, fuerit vehementer paruum, ita vt in expressione $P\omega+Q\omega^2+rR\omega^3+\&c.$ termini $Q\omega^2$ & $R\omega^3$, multoque magis reliqui, fiant tam parui, vt in computo, **quo summus rigor non obseruatur**, prae primo $P\omega$ negligi queant" (subr. nuestro).

766 Cf. Euler [1755] p. 104, §121.

767 Euler tiene en cuenta los casos en los que la derivada toma valores infinitos. Estos casos son, por ejemplo, el de la función $y=(x-a)^{\frac{m}{n}}P+C$ cuando m<n y x=a (en Euler [1755] p. 720), o el de la función $y=x^2-\dfrac{1}{\ln x}$ para x=0. Cf. Juschkewitsch [1959] pp 237 y 238. En general, "Sin autem casu quopiam

tenemos una mera igualdad entre ceros. La razón de ello consiste en que los diferenciales de *x* e *y* son infinitamente pequeños y, por ende, iguales a cero:

diferentialia ipsarum x & y reuera sint infinite parua, ideoque nihilo aequalia[768].

Sin embargo, en la segunda expresión, el cociente entre los diferenciales no se anula. Al contrario, los diferenciales que en la primera expresión eran igualados a cero tienen ahora una relación, una proporción entre sí, pero cada uno tomado en sí mismo es igual a cero. Por esta razón, Euler considera que el fin del Cálculo de diferenciales es el de encontrar los cocientes diferenciales y no los diferenciales mismos:

Cum igitur calculus differentialis in inuentione differentialium consistant, in eo non tam ipsa differentialia, quae sunt nihilo aequalia ac proptera nullo labore inuenirentur, quam eorum ratio mutua geometrica investigatur[769].

Tal y como afirmará Euler, el cálculo de los diferenciales considerados por sí mismos es más bien fácil. Ello se debe a que –por definición– siempre tenemos *dx*=0. Para Euler, una magnitud infinitamente pequeña es una magnitud que es igual a 0. Es decir, es sólamente en la ausencia de magnitud o =0, donde la expresión "magnitud menor que cualquier magnitud dada" deja de ser contradictoria[770]. Éste es el modo en el que Euler consigue evitar el reproche de aquellos que consideran que el calculo es un instrumento meramente aproximativo. Para Euler, el error –al igual que el diferencial–, es estrictamente nulo. Sin embargo, esto no impide que la proporción entre dos magnitudes nulas pueda ser finita.

La distancia de Euler con respecto a Hegel es, en este respecto, el siguiente. Euler, a diferencia de Hegel, no distinguirá entre la relación de las magnitudes últimas y la última relación de magnitudes evanescentes. Es cierto que con su idea de considerar exclusivamente los cocientes de diferenciales se aproxima a las tesis de Hegel[771], pero –y en esto se distinguen los dos autores– Euler parece que tiene que quedarse con las dos concepciones del diferencial explicitadas por Hegel. Por un lado, en consonancia con Hegel, considera que los diferenciales sólo tienen sentido dentro de un cociente. Pero, por otro lado, Euler asigna un valor concreto –igual a 0– a los diferenciales cuando se los considera pos sí mismos.

Hegel tiene en cuenta a Euler en este punto y considera que la razón del acierto de Euler se sebe a su deuda con la definición newtoniana de las primeras y últimas razones[772]. De este modo, la interpretación euleriana del cociente de los diferenciales que reproducíamos en el

---

singulari differentiale functionis exprimatur per eius potestatem dx^n, tum regula praebet pro hoc differentiali 0, si *n* fuerit numerus unitate maior; at vero differentiale exhibet infinite magnum, si *n* sit exponens unitate minor" (en Euler [1755] p. 722).

768 Cf. Euler [1755] p. 103.

769 *Ibid*. Cf. también Euler [1755] p. 79 § 85: "In calculo autem infinite paruorum nil aliud agitur, nisi vt ratio geometrica inter varia infinte parua indagetur", p. 79 § 86: "Atque in inuestigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parua omnis vis calculi differentialis versatur".

770 Para ser exactos, Euler no habla de contradicción sino de una conclusión que es contraria a la hipótesis: "Si enim quantitas tam fuerit parua, vt omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla; namque nisi esset =0, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin".

771 O que Hegel se aproxima a las tesis de Euler, como se aproxima a las de Huilier, Newton, Lagrange, etc.

772 Cf. Hegel [1978] p. 169.

parágrafo anterior es traducida a los siguientes términos en Hegel: en la primera expresión, los diferenciales son comprendidos fuera de la relación cualitativa y de ahí que tengan un significado meramente cuantitativo. Su expresión como nulos no ya cuantitativos, sino cualitativos, tiene lugar en el cociente de diferenciales. En el cociente los diferenciales son meros momentos de la Relación de determinaciones cualitativas (*Qualitätsbestimmmungen*). El hecho de que este cociente tenga como exponente una magnitud finita se debe, según Hegel, al hecho de que el cociente de diferenciales procede de un cociente de variables que, en principio, pueden tomar cualesquiera determinada magnitud [773]. Es decir, la expresión

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad [1]$$

es diferente de la expresión,

$$\frac{\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x)}{\lim_{h \to 0} h} \qquad [2]$$

La primera expresión tiene en cuenta la relación entre los diferenciales, la segunda no. La primera ofrece como resultado el cociente de diferenciales; la segunda la expresión ideterminada e indeterminable 0/0. Es en la primera expresión donde los diferenciales son comprendidos como momentos de una relación y, de este modo, donde se evita su mera identificación con entidades meramente cuantitativas. La segunda expresión sólo tiene en cuenta, dice Hegel, lo negativo de los diferenciales, sin atender al significado positivo del Cuanto.

El concepto de una magnitud infinitamente pequeña o infinitamente grande es un concepto contradictorio para Euler. El razonamiento que sigue Euler para ello es muy parecido al de Hegel. Si una magnitud es aquello susceptible de ser aumentado o disminuido, una magnitud infinita es contradictoria en dos direcciones: o bien, no es una magnitud –debido a que no admite un ulterior aumento o disminución– o bién no es infinito –debido a que si es una magnitud la presunta infinitud no puede ser otra cosa que un límite–:

Praeterea vero secum ipsi infinitum admittentes pugnant[774]

[773] Cf. *ibid*.; “Indem die Verhältnise der unendlichen Differenz aus den Verhältnisen veränderlicher, aber als endlich betrachteter Größen abgeleitet werden, so enthalt jene Verhältnisse als Resultat dasjenige als Moment in sich, was jene daseiend oder in endlicher Bestimmung ausdrücken –oder vielmehr nur in endlicher Bestimmbarkeit; denn die endlichen Gößen, die solche Inkremente haben, als hier betrachtet werden, sind veräderliche, die nicht sebst ein bestimmtes Quantum haben, aber eines haben können”.

[774] Cf. Euler [1755] p. 71. No obstante, en el § 82, Euler afirma que si la serie infinita 1+2+3+4+… fuese sumada, el resultado de la suma, “Ad huiusmodi quantitatem designandam Mathematici vtuntur hoc signo ∞”, sería una magnitud infinita. Visto desde Kant, la postura de Euler significaría que la realización de la síntesis sucesiva implicada en una serie infinta daría con una magnitud infinita que, para Kant, es contradictória o antinómica.

A pesar de ello, veremos que Euler no dudará en recurrir al concepto de lo infinitamente grande en el cálculo matemático[775]. A diferencia de ello, la exigencia de ser “una magnitud menor que cualquier magnitud dada” era algo que se cumplía para algo que no era ya magnitud.

Para entender todo esto, es necesario recordar que Euler distingue entre la comparación aritmética y la comparación geométrica[776]. Es esta segunda la que tiene en cuenta, no tanto, la diferencia entre los diferenciales, como el cociente –en términos de Hegel, el exponente– resultado de la relación entre los diferenciales:

cum duo sint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geometricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quantitatibus comparandis ortum spectamus; ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitas, non vero ratio geometrica[777]

Es decir, la comparación aritmética entre dos magnitudes infinitesimales da como resultado la igualdad. Por esta razón, cuando a una magnitud finita le añadimos o substraemos una magnitud infinitesimal la magnitud finita que inalterada. Frente a esto, la comparación geométrica es la que tiene lugar en un cociente de magnitudes, sean éstas infinitesimales o no. Una comparación geométrica entre dos magnitudes que son aritméticamente iguales puede ser distinto de uno. Esto último es lo que ocurre precisamente con el cociente de diferenciales.

En efecto, cualquier magnitud infinitamente pequeña es aritméticamente igual a cualquier otra; todas ellas son –para Euler– iguales a cero. Esto no significa, sin embargo, que si realizamos una comparación geométrica entre ellas la relación tenga que ser de igualdad[778]. Por ejemplo, la comparación aritmética entre dos magnitudes infinitesimales es cero y, de ahí que Euler los caracterice directamente con este símbolo. Sin embargo, una comparación geométrica como 0/0 puede dar como resultado un cociente distinto a 1[779]. En general, en Euler valdrá lo siguiente:

$0/0=n/1$ donde n es un número racional

La distinción entre la comparación aritmética y la geométrica es solidaria de las dos distintas lecturas del cociente de diferenciales que hemos formulado mediante las expresiones [1] y [2]. En efecto, la fórmula [1] es la que expresa lo que, con Euler, hemos denominado “comparación geométrica”: la relación entre dos “magnitudes” infinitesimales no tiene por que ser el de la igualdad[780]. Frente a esto, en la expresión [2] el límite es algo que opera dentro del cociente. El numerador y el denominador son límites en sí mismos y no partes de una expresión de un límite. En este sentido, diría Euler, su valor es igual a cero.

---

775 Debido a que la matemática lo necesita y, por ello, hace uso de él: “Quantumuis autem nonnullis idea infiniti, qua in Mathesi vtimur, suspecta videatur, qui hanc ob causam Analysin infinitorum profligandam arbitrantur; tamen hac idea ne in partibus quidem Matheseos triuialibus carere possumus” (en Euler [1755] p. 85).
776 Cf. Euler [1755] p. 78.
777 Cf. Euler [1755] p. 78.
778 El cociente de diferenciales es denominado por Euler “comparationes geometricus” debido, probablemente, a la construcción de la tangente por medios estrictamente geométricos tal y como tiene lugar en la *Geometria* de Descartes.
779 O, lo que es más, distinto a la indeterminación.
780 Entendemos por “relación de igualdad entre a y b” aquella en la que $a/b=1$.

Esta distinción entre la comparación aritmética y la geométrica hace posible que los infinitesimales de Euler, si bien es cierto que son unos ceros aritméticos, no sean unos ceros absolutos[781]. De ahí que sea necesario en Euler introducir una notación que permita distinguir los ceros infinitesimales del cero absoluto. La contradicción consistente en, por un lado, considerar los infinitesimales como incrementos de una variable y, por otro lado, tener una relación entre sí se evita en Euler considerando a los infinitesimales como iguales a cero pero distintos al cero absoluto. Esta distinción equivale en Hegel a la distinción entre el cero cuantitativo y el cualitativo. La distinción entre los infinitesimales es un cero cuantitativo pero no, tal y como dice Hegel, un cero cualitativo[782]. La inconsecuencia de Euler consistirá en tener que operar con unos ceros cuantitativos que tendrán, sin embargo, un significado de incremento. Esta inconesecuencia permitirá, no obstante, justificar la eliminación de los infinitesimales en los contextos en los que forman parte de operaciones aritméticas que involucran también a otras magnitudes finitas recurriendo, para ello, al problemático argumento de su relativa pequeñez[783].

Las reglas para el uso de los infinitesimales que nos presenta Euler son las siguientes:

$dx=0$

$a{\cdot}dx=0$ para cualquier a finito

$a{\cdot}dx/dx=a$ [784]

$a \pm n{\cdot}dx=a$ luego $\dfrac{a \pm n{\cdot}dx}{a}=1$

$dx^n=0$ para n racional no nulo y $dx^0=1$.

$dx \pm dx^n=dx$ [785] luego $\dfrac{dx \pm dx^{n+1}}{dx}=1 \pm dx^n=1$

en general si $m<n$ $dx^m \pm dx^n=dx^m$ para m y n cualesquiera números racionales no nulos.

$\dfrac{a}{dx}=\infty$ ó $\dfrac{a}{\infty}=dx$

$\dfrac{n{\cdot}a}{dx}=a{\cdot}A$ donde A es una magnitud infinitamente grande[786].

---

781 Cf. Laugwitz [1986] p. 208.

782 Cf. Hegel [1985] p. 257: "Die unendliche Differenz ist Null nur des Quantums, nicht eine qualitative Null".

783 O la eliminación de infinitesimales de orden mayor cuando el contexto está formado de infinitesimales de orden menor.

784 En este punto es donde se hace manifiesta la distinción entre la comparación aritmética y la geométrica.

785 Es decir, los diferenciales de orden superior son eliminados cuando participan en expresiones donde aparecen diferenciales de primer orden: "Si igitur vti in potestatibus fit, vocetur dx infinite paruum primi ordinis, dx^2 secundi ordinis, dx^3 tertii ordinis & ita porro, manifestum est prae infinite paruis primi ordinis, euanescere infinite parua altiorum ordinum" (en Euler [1755] p. 81).

786 Euler introduce en este punto el recurso a lo infinitamente grande como resultado del cálculo con los diferenciales. Un poco más adelante, en las pp. 85 y 86, § 95, introduce los distintos niveles de lo infinitamente grande derivados directamente de la previa aceptación de los distintos grados de lo infinitamente pequeño: "Dantur ergo infiniti gradus infinitorum, quorum quisque infinities maior est infiniti gradus infinitorum, quorum quisque infinities maior est quam praecedentes: atque adeo si numerus m vel tantillum maior sit quam n, erit $\dfrac{a}{dx^m}$ quantitas infinita infinities maior quam quantitas infinita $\dfrac{a}{dx^n}$".

En estas reglas se hacen patentes las dificultades en las que se encuentra sumergido el Cálculo a la hora de tratar con los infinitesimales. Estas incosistencias consisten, según Hegel[787], en lo siguiente:

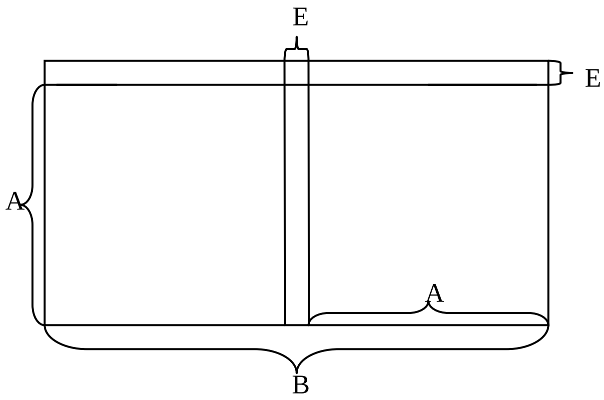
i) por un lado, el cálculo se ve obligado a introducir en el cuerpo de sus operaciones aritméticas para las magnitudes finitas las denominadas magnitudes infinitas o infinitesimales[788].

ii) por otro lado, una vez hecho uso de los infinitesimales, el Cálculo los deja de lado o los omite (*weglassen*) debido a que son cuantitativamente nulos.

La inconsistencia no es, sin embargo, mero producto de una falta de fundamentación del cálculo. La inconsistencia o, al menos, el carácter menos evidente que posee el calculo en relación, por ejemplo, al álgebra le es constitutivo. Hegel considera que un mayor rango en lo que respecta a la naturaleza de la ciencia viene acompañado por un menor grado en la evidencia de sus formulaciones. De este modo, dice Hegel, no se puede pedir a la filosofía la claridad en la que se mueve, por ejemplo, la geometría[789]. En el caso de la matemática, debido a que el cociente infinitesimal sólo puede ser aprehendido por el concepto, no puede encontrar una expresión adecuada en un lenguaje que es meramente formal[790].

El procedimiento de comenzar con las diferencias finitas para, de ahí, pasar a las infinitamente pequeñas no es algo cuyo origen tenga lugar en Euler. Recuérdese que ya Fermat en un trabajo de 1638[791] hace uso del procedimiento de empezar por considerar una diferencia finita para, al final del desarrollo de la prueba, anular (*elidantur*) esta diferencia[792]. En el mismo tratado, Fermat presenta una prueba para la maximización de la superficie de un rectángulo con los lados *A* y *B-A*. En una especie de previsión del significado de la anulación de las derivadas en los máximos y los mínimos, Fermat iguala esta superficie a maximizar –o, por hipótesis, maximizada– con una superficie que tenga una mínima variación –denominado *E*– en los lados. El dibujo que ilustraría esto es el siguiente:

[787] Cf. Euler [1755] pp. 170-171.
[788]Es decir, tal y como hemos visto en Euler, las infinitamente pequeñas como las infinitamente grandes.
[789] Cf. Euler [1755] p. 171.
[790] Cf. Hegel [1981] p. 208: "die Natur der Analysis, welche sogenannte unendliche Differenzen veränderlicher Größer betrachtet […] hier eine qualitative Größenbestimmung zugrunde liegt, welche allein durch den Begriff gefaßt werden kann. Der Übergang zu derselben von der Größe als solcher ist nicht mehr analytisch; die Mathematik hat daher bis diesen Tag nicht dahin kommen können, die Operationen, welche auf jenem Übergang beruhen, durch sich selbst, d.h. auf mathematische Weise zu rechtfertigen, weil er nicht mathematischer Natur ist".
[791] Cf. Fermat [1891] pp. 134-136.
[792] En esta prueba Fermat demuestra que la subtangente de una elipse tiene el doble de la longitud del eje definido entre el vértice de la elipse y la proyección del punto de la tangente sobre el eje.



La igualdad tiene la forma siguiente:

$A(B\text{-}A)=AB\text{-}A^2=(A+E)(B\text{-}A\text{-}E)=BA\text{-}A^2\text{-}EA+EB\text{-}AE\text{-}E^2$

luego

$BE=2\cdot AE+E^2$

dividiendo los dos lados por *E*

$B=2\cdot A+E$

Y, anulando el valor de la *E* en el límite, obtiene el resultado final

$B=2\cdot A$

Es decir, dado el segmento *B*, el rectángulo que maximiza la superficie es el cuadrado que tiene los lados *B*/2. Para llegar a este resultado, Fermat hace uso de un razonamiento que se convertirá en habitual en los problemas de maximización. Según ésta, si una variable dependiente *y* se encuentra en su máximo o en su mínimo –en el ejemplo de Fermat, esta variable era la superficie–, una variación "infinitesimal" de su variable independiente –en Fermat, el valor *A* varía en una magnitud "infinitesimal" *E*– sólo cambiará "infinitesimalmente" la variable dependiente –de ahí que Fermat comience igualando las dos superficies que muestran una diferencia infinitesimal.

4.2.2. Euler frente a Leibniz

La diferencia entre la definición euleriana y leibniziana del diferencial es resultado de la reacción de Euler ante el carácter incompleto que ésta demostraba. Una magnitud infinitamente pequeña es, para Leibniz, aquella que es menor que cualquier magnitud dada[793]. Hemos visto en el apartado 3.1.3 que esta definición es, para Hegel, la expresión de la contradicción pero no su superación. La distinta respuesta con la que Euler y Leibniz se enfrenterán a esta contradictoria definición distinguirá a ambos autores.

La incompletitud y, de acuerdo a Hegel, el carácter contradictorio de esta definición del infinitesimal consiste en la variabilidad del objeto que define. Esta variabilidad es debida a que el objeto que se define en cada caso puede participar, a su vez, en la definición de un nuevo objeto. Es decir, la definición dada por Leibniz es un algoritmo que, en la medida en que no tiene un margen mínimo de error aceptado, no puede nunca llegar a parar. La definición de Leibniz parte de una magnitud dada para obtener otra que sea menor que ella. La dificultad de mantenerse en los límites que marca esta definición consiste en que si la magnitud dada no es una en particular sino cualquier magnitud, entonces, la afirmación tiene que poder ser cierta también para toda magnitud.

Es decir, mientras que la definición de lo infinitamente pequeño propuesto por Leibniz consiste en afirmar algo para cada magnitud, el paso de Euler consistirá en proponer una definición en el que se afirme algo para toda magnitud. Nada resulta más *inmediato*[794] que pasar de la afirmación de algo para cualquier algo a pasar a la afirmación de ese mismo algo para todo algo. Con ello, la definición para lo infinitamente pequeño en Euler pasa de esta:

i) aquello que es menor que cualquier magnitud dada

a esta otra:

ii) aquello que es menor que toda magnitud[795]

En esta nueva definición lo infinitesmal deja de ser una variable –tal y como ocurría en la definición de Leibniz– para pasar a ser un algo concreto. Este algo, lo infinitesimal de Euler es, como hemos visto, el cero[796].

Pues bien, el paso de la definición *leibniziana* del diferencial a la definición *euleriana* es algo que entra en el marco del proceso de surgimiento de la modernidad. En efecto, el inicio de la modernidad va unido al surgimiento del concepto de "todas las cosas" o del absoluto[797].

---

[793] Cf. Leibniz [2004] p. 60: "minor quavis data".

[794] Un paso "inmediato" que hacía imposible la comprensión de la obra de Kant. En efecto, si, por ejemplo, donde Kant dice que podemos hacer abstracción de todo objeto –pero no del tiempo ni del espacio– entendiésemos que podemos hacer abstracción de todos los objetos en su conjunto, estaríamos introduciendo la noción de totalidad en su discurso junto con su contenido dialéctico. Es decir, si hiciésemos algo así "todo Kant habría saltado por los aires" (en Marzoa [2004] p. 60).

[795] Cf. Euler [1913] p. 69: "Sed quantitas infinite parva nil aliud est nisi quantitas evanescens ideoque revera erit =0. Consentit quoque ea infinite parvorum definitio, qua dicuntur omni quantitate assignabili minora, ea certe non poterit non esse nulla; namque nisi esset =0, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin. Quarenti ergo, quid sit quantitas infinite parva in mathesi, respondemus eam esse revera =0".

[796] Un "cero" que, debido a la distinción entre la comparación aritmética y la geométrica, se distinguía del cero absoluto.

[797] Se trata de la pretensión de reducir el Ser al Ente, o de pensar lo contingente como algo que pertenece al *ius* de la cosa. Seguimos el concepto de "modernidad" del que hace uso el profesor F. Martínez Marzoa.

Frente a esto, sabemos que conceptos como el de la “totalidad de las cosas” o de “todas las representaciones” son conceptos dialécticos y, por ello, carentes de sentido en Kant. Por esto, resultaba importante distinguir en Kant las expresiones que se dicen de “todas las cosas” de aquellas que se dicen de “cualquier cosa”[798]. Dentro del proyecto de la modernidad, tampoco una definición como i) podría sostenerse. En efecto, si pretender que haya un discurso sobre el todo es lo mismo que hacer de algo que es en principio infinito algo que es cerrado o uno, entonces, la pretensión de la modernidad será una pretensión que consiste en hacer del infinito algo con plena validéz cognoscitiva[799]. De este modo, la formulación moderna del infinitesimal no será aquella que es expresada por la definición i), sino aquella que es expresada por la definición ii). El carácter contradictorio de este última formulación se hace evidente si tenemos en cuenta que el infinitesimal es definido como una magnitud[800]. El proceso al infinito puesto en juego en la definición i) será abarcado en su totalidad, puesto como uno, en la definición ii). No hay así devenir, sino un estado cuyo resultado es la nada o el cero en el proyecto moderno –proyecto que, en el caso del análisis, comienza con Euler. Este proyecto no será en él más que una pretensión o programa, por lo que habrá que esperar hasta los años 70 del siglo pasado para que el *Non-Standard Analisis* [801] ofrezca una versión formalizada de ella. La falta de este formalismo en Euler hace que éste no disponga de las herramientas necesarias para trabajar meramente con los ceros y que, en consecuencia, tenga que hacer uso de las nociones ya entonces habituales de infinitesimal así como de la serie de Taylor[802].

Frente a este proyecto propiamente moderno, Hegel se negará a aceptar la contribución llevada a cabo por Euler con su definición de lo infinitamente pequeño. Una expresión que aritméticamente es igual a cero carece de la determinación necesaria con la que definir el cociente de una relación geométrica de la que forma parte[803]. Frente a la alternativa entre la

---

798 El problema de la *KU* se convertía así en encontrar una evidencia que sirve para cualquier contenido sin que tal evidencia sea conceptual y, por ende, pueda decirse de “todas los contenidos”. Cf. Marzoa [2004] p. 64.

799 Proyecto que, en lo infinitamente grande, será fundamentado por G. Cantor.

800 Contradicción sobre la que, como hemos visto, Hegel llamaba la atención. De hecho, tanto i) como ii) son contradictórias: lo que ocurre es que en ii) la contradicción está consumada mientras que en ii) la contradicción es el motor del proceso al infinito.

801 Formalización que consisten en la extensión del concepto de número real al hiperreal. No podemos entrar aquí en detalle a mostrar las razones que tenemos para defender que es Euler y no, en contra de lo que se suele afirmar, Leibniz el precedente directo del análisis *Non-standard*. Consideramos no obstante que el argumento que hemos presentado en estas líneas es, en este respecto, suficientemente concluyente. Téngase además en cuenta que las razones que se aducen desde los matemáticos *Non-standard* a favor de la ascendencia común en Leibniz suelen remarcar el carácter heurístico que éste habría asignado a los infinitesimales sin pararse a pensar si el concepto del que hace uso Leibniz tiene algo en común con el suyo (cf. Robinson [1996]. p. 281). A su vez, cuando se afirma que el infinitesimal de Leibniz es el mismo que el del *Non-standard* se suele afirmar que el mismo es para Leibniz un número (sic.) (así en Laugwitz [1986] p. 13). Esta afirmación no es fiel a la definición de Leibniz para quien el infinitesimal es, bien al contrario, una variable. Tampoco Robinson –que se expresa en la misma línea que Laugwitz– llega a citar la obra de Leibniz en el que pretende fundamentar sus afirmaciones (cf. Robinson [1996] p. 2). En esta misma línea, C.H. Edwards tampoco hace un intento de cumplir lo que promete el título de la sección que le dedica al análisis *Non-standard*: “Non-standard Analysis– The Vindication of Euler?”(Cf. Edwards [1979] p. 341). Un opinión con la que sí estaríamos de acuerdo es la de Bos: “Thus the most essential part of non-standard analysis, namely the proof of the existence of the entities it deals with, was entirely absent in the Leibnizian infinitesimal analysis, and this contributes, in my view, so fundamental a difference between the theories that the Leibnizian analysis cannot be called an early form, or a precursor, of non-standard analysis” (cf. Bos [1974] p. 83).

802 Cf. Juschkewitsch [1959] p. 238: “[…] daß die Regeln des „Rechnens mit den Nullen“ in den Anwendungen vollkommen unzureichend sind. Die untersuchung von Funktionen, ihre Approximation durch unendliche Reihen, die numerische Lösung von Gleichungen und viele andere Fragen erfordern ein Operieren nicht mit den Grenzwerten verschwindender Größen, sonder mit Größen, die von Null verschieden und gleichzeitig hinreichend und beliebig klein sind”.

803 Cf. Hegel [1985] p. 257: “denn eine Null hat überhaupt keine Bestimmtheit mehr”.

definición de Leibniz y la de Euler, Hegel decide quedarse con la de Leibniz[804]. La superación de la contradicción cuya expresión es la definición de Leibniz no se realiza, según Hegel, llevando el proceso al infinito, a la totalidad de los casos posibles, sino mediante la reflexión del Cuanto sobre sí. Como hemos visto ya en el apartado 3.1.3, esta reflexión daba lugar al denominado cociente de diferenciales. La superación de la contradicción expresada por ii) no puede venir de una negación externa sino que ésta tiene que ser interna: la determinación tiene que ser así producto del análisis de la contradicción.

En definitiva, vemos que la alternativa propuesta por Leibniz con la definición i) es compartida, al menos en parte, por Hegel. Esta vía será el origen de la definición contemporánea –aunque no moderna[805]– del infinitesimal que vendrá de la mano de, entre otros matemáticos, Cauchy y Weierstraß. Tendremos ocasión de ver en apartado 4.3.1 de este mismo capítulo que la formulación de este último mediante las variables δ y ε –la denominada formulación *epsilóntica*– es fiel a la filosofia de Leibniz, siendo el papel asignado a la ε por Weierstraß el de –hablando desde Leibniz- ejercer de *data* o de valor dado en relación al cual se afirma la existencia de otro u otros valores con tal o cual propiedades[806].

4.2.3 Newton

En el prólogo a la *Théorie des fonction analytiques*, Lagrange hace algunas observaciones sobre lo que, según él, resultan ser los dos métodos de Newton en relación al cálculo. Estos dos métodos son el método de fluxiones, y el método por últimas y primeras razones. Según Lagrange, Newton introduce el método de fluxiones con el fín de evitar el recurso a la noción de lo infinitamente pequeño[807]. Veremos que la eliminación de la noción de lo infinitamente pequeño en Newton no puede querer decir la eliminación de la noción de infinitesimal. Esta noción, en una versión que guardará un parecido enorme con la de Leibniz, jugará un papel central en el desarrollo del pensamiento matemático de Newton. Dedicaremos el capítulo 6 de este Tesis al estudio de la evolución del cociente diferencial en Newton. Como veremos en aquel capítulo, la importancia de este estudio se explica por la enorme deuda que contrae Hegel con respecto al concepto del cociente infinitesimal newtoniano. Con el objetivo de perseguir los rastros de la evolución del concepto diferencial en Newton, nos ocuparemos allí con los trabajos no publicados de Newton. Con ello queda la vía despejada para que podamos ocuparnos ahora del papel y la noción del infinitesimal newtoniano en sus *Principia*, así como de la lectura que del mismo propone Hegel.

---

[804] Hegel se situaría aquí del lado de Kant.

[805] "No moderna" debido a que, como hemos dicho, habrá que esperar al surgimiento del análisis *Non-standard* para poder econtrar la noción moderna de infinitesimal.

[806] Así, la continuidad de una función en Weierstraß se define para un intervalo centrado en *x* de la siguiente forma: para cualquier ε dado existe un δ_o tal que para todo $\delta < \delta_o$, $\left| f(x \pm \delta) - f(x) \right| < \varepsilon$. A su vez, el infinitesimal de Leibniz parte de un valor dado ε en relación al cual se afirma que el infinitesimal es menor. Cf. sobre este punto el prologo de E. Knobloch y Walter S. Contro en Leibniz [2008] p. XIX. Véanse sobre este punto los apartados 4.3.1 y 4.3.2.

[807] Cf. Lagrange [1881] p. 17: "Newton, pour éviter la supposition des infiniment petits, a considéré les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement, et il a cherché une méthode pour déterminer directement les vitesses ou plutôt le rapport des vitesses variables avec lesquelles ces quantités sont produites ; c´est ce qu´on appelle, d´apres lui, la Méthode des fluxions o le Calcul fluxionnel, parce qu´il a nommé ces vitesses fluxions des quantités"

4.2.3.1 La eliminación de los infinitesimales

4.2.3.1.1 Un error de Newton

La eliminación de los infinitesimales de orden superior será un procedimiento utilizado por el cálculo de fluxiones de Newton. La falta de fundamentación en el uso de tal procedimiento hace que Newton llegue a eliminar términos infinitesimales que resultan relevantes para la solución del problema. Esto es lo que ocurre en la proposición X del segundo libro de los *Principia*. En el contexto del error cometido por Newton en esta proposición, Hegel habla del carácter formal e incierto"[808] que muestra todavia el uso del instrumento matemático propuesto por Newton. Aunque el error fue corregido por Newton en la tercera edición de los *Principia*[809], el mismo Lagrange le dedica a su exposición una buena parte de su *Theorie des foncions analytiques*[810]. La razón de ello puede deberse a que, tal y como recuerda Hegel, este error llegó a ser utilizado por los rivales de Newton –entre ellos el mismo Lagrange – para legitimar las concepciones propias del Cálculo.

Para poder comprender cuál es el fundamento del error, vamos a reproducir, por nuestra parte, el texto de Newton para, acto seguido, proceder a su interpretación[811]:

---

[808] Cf. Hegel [1985] p. 262.

[809] Cf. al respecto Newton [1981] pp. 312-313 n 1. Será J.Benoulli quien descubrió en el año 1710 el error que ahora nos ocupa.

[810] Cf. Lagrange [1881] p. 365 y sig.

[811] Para ello vamos a contar con la formalización que lleva a cabo Whiteside en Newton [1981] pp. 373-376. La traducción inglesa del texto es la siguiente: "Let a uniform force of gravity tend straight toward the plane of the horizon, and let the resistance be as the density of the medium and the square of the velocity jointly; it is required to find, in each individual place, the density of the medium that makes the body move in any given curved line and als the velocity of the body and resistance of the medium. Let *AK* be the plane of the horizon, perpendicular to the plane of the figure; *ACK* a curved line; *C* a body moving along the line; and *FCf* a straight line touching it in *C*. And suppose that the body *C* now goes forward from *A* to *K* along the line *ACK* and now goes back along the same line and that in going forward it is impeded by the medium and in going back is equally assisted, so that in the same places the velocity of the body as it goes forward and back is always the same. And in equal times let the body as it goes forward describe the minimally small arc *CG*, and let the body as it goes back describe arc *Cg*, and let *CH* and *Ch* be equal rectilinear lengths which bodies moving away from place *C* would describe in these times without the actions of the medium and of gravity, and from points *C*, *G*, and *g* to the horizontal plane *AK* drop perpendiculars *CB*, *GD*, and *gd*, letting *GD* and *gd* meet the tangent in *F* and *f*. Through the resistance of the medium it comes about that the body as it goes forward describes, instead of lenght *CH*, only lenght *CF*, and through the force of gravity the body is transferred from *F* to *G*, and thus line-element *HF* and line-element *FG* are generated simultaneously, the first by the force of resistance and the second by the force of gravity. Accordingly, line-element *FG* is as the force of gravity and the square of the tiem jointly and thus as the square of the time, and line-element *HF* is as the resistance and the square of the time, that is, as the resistance and line-element *FG*. And hence hte resistance comes to be as *HF* directly and *FG* inversely, or as $\frac{HF}{FG}$. This is so in the case of nascent line-elements. For in the case of line-elements of finite magnitude these ratios are not accurate. And by a similar argument *fg* is as the square of the time and thus, since the times are equal, is equal to *FG*, and the impulse by which the body going back is urged is as $\frac{hf}{fg}$. But the impulse upon the body as it goes back and the resistance to it as it goes forward are equal at the very beginning of the motion, and thus als $\frac{hf}{fg}$ and $\frac{HF}{FG}$, proportional to them, are equal, and therefore, because *fg* and *FG* are equal, *hf* and

Prop, X. Prob. III

Tendant uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sit resistentia ut medii densitas & quadrarum velocitatis conjunctim : requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæfaciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis.

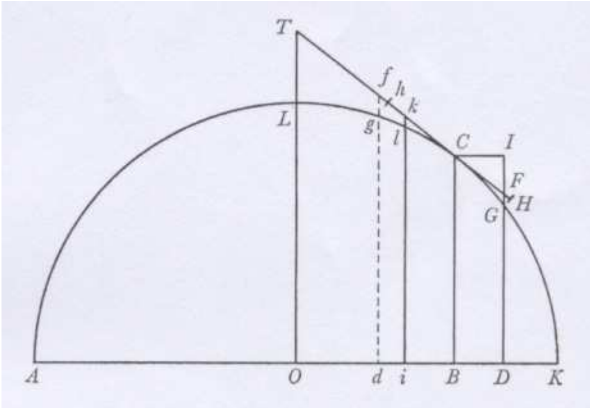
Sit AK planum illud plano Schematis perpendiculare; ACK linea curva; C corpus in ipsa motum; & FCf recta ipsam tangens in C. Fingatur autem corpus C nunc progredi ab A ad K per lineam illam ACK, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progresu impediri a Medio, in regressu æque promoveri, sic ut in iisdem locis eadem semper sit coporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus describat corpus progrediens arcum quam minimum CG, & corpus regrediens arcum Cg; & sint CH, Ch longitudines æquales rectilinæ quas corpora de loco C exeuntia his temporibus abs Medii & Gravitatis actionibus describerent: & a punctis C, G, g ad planum horizontale AK demittantur perpendicula CB, GD, gd, tangenti occurrant in F & f. Per Medii resistentian fit ut corpus progrediens vice longitudinis CH describat solummodo longitudenm CF; & per vim gravitatis trasferitur corpus de F in G: adeo lineola HF vi resistentiæ, & lineola FG est ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim, adeo (ob datam gravitatem) ut quadratum temporis; & lineola HF ut resistentia & quadratum temporis, hoc est ut resistentia & lineola FG. Et inde resistentia fit ut HF directe & FG inverse, sive ut $\frac{HF}{FG}$*. Hæc ita se habent in lineolis nascentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ retiones non sunt accuratæ*[812].

Et simili argumento est fg ut quadratum temporis, adeo ob æqualia tempora æquator ipsi FG ; & impulsus quo corpus regrediens urgetur es ut $\frac{hf}{fg}$*. Sed impulsus corporis regredientis & resistentia progredientis ipso motus initio æqueles fg & FG æquantur etiam hf & HF, sunt adeo CF, CH, (vel Ch) & Cf in progressione Arithmetica, & inde HF semidifferentia est ipsarum Cf & CF ; & resistentia quæ supra fuit ut* $\frac{HF}{FG}$*, est ut* $\frac{Cf - CF}{[2]\cdot FG}$ [813]

La figura que ilustra esta proposición es la siguiente:

HF are also equal, and thus *CF*, *CH*, (or *Ch*), and *Cf* are in arithmetic progression, and hence *HF* is half the difference between *Cf* and *CF*, and the resistance, which above was as $\frac{HF}{FG}$, is as $\frac{Cf - CF}{FG}$".

[812] Mediante esta observación, Newton pone de relieve la diferencia entre calcular con líneas finitas –por lo tanto exponrse a la inexactitud– y el cálculo con líneas "infinitesimales" en donde , digamos, se suprime el error.
[813] El coeficiente "2" es un añadido del editor.



Vamos a llamar g y ρ a las fuerzas de la gravedad y del medio que actúan sobre el cuerpo C a lo largo de un tiempo infinitesimal θ. La fuerza g actúa en dirección perpendicular a la línea AK. La fuerza ρ lo hace en dirección a la tangente Ch y CH. En la primera dirección la fuerza ρ acelera la velocidad del móvil. En el segundo caso lo desacelera[814]. Los segmentos CH y hC son iguales y representan el espacio recorrido por el cuerpo sin la acción del medio ni de la gravedad. Debido a la resistencia del medio, el cuerpo recorre fC en vez de hC, y CF en vez de CH. El efecto de la gravedad se mide por los segmentos FG y fg. Consideremos el caso en el que el cuerpo recorre la recta tangente en dirección CH, siendo el otro caso análogo a éste.

Sean o y p los respectivos incrementos que padece el cuerpo sobre el eje de abcisas $OK=x$ y $BC=y$. Siendo esto así, la fluxión de primer orden será;

$$\dot{x} = \frac{o}{\theta}$$

y si suponemos que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = Q$, tendremos que

$$\dot{y} = Q \cdot \frac{o}{\theta}$$

luego

$$\dot{y} - Q \cdot \dot{x} = 0$$

[814] Nótese que no se trata propiamente de que el medio en una dirección acelere y en la otra dirección desacelere la velocidad del cuerpo –como si hubiese dos medios–, sino de esto otro: se establece el tiempo presente como aquél en el que el cuerpo está en el punto C y desde ahí, para calcular la situación del cuerpo en el futuro, teniendo en cuenta la resistencia, necesitamos desacelerar el movimiento que no tiene en cuenta esta resistencia (necesitamos pasar de CH a CF), mientras que para volver al pasado desde C tenemos que suponer que esta misma fuerza de resistencia, en el mismo tiempo –es decir, en relación a $hC=CH$–, ha acelerado el cuerpo desde el punto C. Sólo así podemos representarnos el proceso total consistente en una progresiva desaceleración del movimiento del cuerpo a lo largo de la tangente en una trayectoria que va de T a H.

lo que, derivando, nos dará

$$\ddot{y} - Q\cdot\ddot{x} - \dot{Q}\cdot\dot{x} = 0 \qquad [A]$$

luego la velocidad instanténea en *C* será

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 . + \dot{y}^2} = \dot{x}\cdot\sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} = \dot{x}\cdot\sqrt{1+Q^2}$$

y las ecuaciones eulerianas del movimiento en un líquido ideal serán

$$\ddot{x} = -\frac{\rho}{\sqrt{1+Q^2}} = -\frac{\rho\cdot\dot{x}}{v} \qquad [C]$$

y

$$\ddot{y} = -\frac{\rho\cdot Q}{\sqrt{1+Q^2}} - g = Q\cdot\ddot{x} - g \qquad [B]$$

y, haciendo uso de [A] y [B], obtenemos

$$\ddot{y} - Q\cdot\ddot{x} = \dot{Q}\cdot\dot{x} = -g$$

derivando la expresión [B] tendremos:

$$\dddot{y} = \dot{Q}\ddot{x} + Q\dddot{x}$$

luego

$$\dot{Q} = \frac{\dddot{y} - Q\dddot{x}}{\ddot{x}}$$

lo que, haciendo uso de [B] nos dará:

$$\dot{Q} = \frac{\dot{y} - Q\ddot{x}}{\ddot{x}} = -\frac{g}{x}$$

luego haciendo uso de [C][815] tenemos

$$\ddot{y} - Q \cdot \ddot{x} = \dot{Q} \cdot \ddot{x} = -g \cdot \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = g \cdot \frac{\rho}{v}$$

Por otro lado, haciendo uso de la serie de Taylor podemos expresar *o* como

$$o = \dot{x} \cdot \theta + \frac{1}{2} \ddot{x} \cdot \theta^2 + \frac{1}{6} \dddot{x} \cdot \theta^3 + \ldots$$

multiplicando los dos lados por $\sqrt{1+Q^2}$ obtenemos[816] la definición de *CF*

$$CF = \sqrt{o^2 + o^2 \cdot Q^2} = o \cdot \sqrt{1+Q^2} = v \cdot \theta - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \theta^2 + \ldots$$

lo que, obviando las fluxiones de orden superior a dos es igual a

$$CF = \dot{x} \cdot \sqrt{1+Q^2} \cdot \theta - \frac{1}{2} \ddot{x} \cdot \sqrt{1+Q^2} \cdot \theta^2 = v \cdot \theta - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \theta^2 \qquad \text{[D]}$$

luego

---

[815] Lagrange no hace uso de [C] y supone simplemente que la proporción entre la primera y segunda derivada de *x* es igual a la proporción entre la la velocidad *v* y la fuerza de la resistencia en negativo: $\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\frac{\rho}{v}$ (en Lagrange [1888] p. 372.

[816] Téngase en cuenta que $CF = \sqrt{o^2 + o^2 Q^2} = \sqrt{o^2 + o^2 \left(\frac{\dot{y}}{\frac{o}{\theta}} \right)^2} = \sqrt{o^2 + o^2 \left(\frac{\dot{y}^2 o^2}{\theta^2} \right)} = \sqrt{o^2 + \frac{\dot{y}^2}{\theta^2}} = \sqrt{o^2 + \frac{\left(\frac{p}{\theta} \right)^2}{\theta^2}} = \sqrt{o^2 + p^2} = \sqrt{BD^2 + FI^2}$ y que $\frac{\sqrt{1+Q^2}}{2} \ddot{x} = v \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\rho$.

$$\theta = \left(\frac{\sqrt{1+Q^2}}{v}\right)\cdot o + \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{v^3}\cdot(1+Q^2)\cdot o^2 + \ldots$$

por otro lado tenemos que *p* puede expresarse como

$$p = \dot{y}\cdot\theta + \frac{1}{2}\cdot\ddot{y}\cdot\theta^2 + \frac{1}{6}\cdot\dddot{y}\cdot\theta^3 + \ldots$$

luego

$$FG = \dot{y}\cdot\theta - \rho = -(\rho - \dot{y}\cdot\theta) = \frac{1}{2}\cdot(g - Q\cdot\ddot{x})\cdot\theta^2 + \frac{1}{6}\cdot(-g\cdot\frac{p}{v} - Q\cdot\dddot{x})\cdot\theta^3 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot g\cdot\theta^2 - \frac{1}{6}\cdot(g\cdot\frac{p}{v})\cdot\theta^3 + \ldots + \dot{x}\cdot\theta - o = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\theta^2 - \frac{1}{6}\cdot(g\cdot\frac{p}{v})\cdot\theta^3 + R(\theta^4)$$

y debido a que *fg* y *FG* son resultado de la misma cantidad de tiempo sólo que con valores distintos tendremos que

$$fg = \frac{1}{2}\cdot(-\theta)^2 - \frac{1}{6}\cdot(\frac{g\cdot\rho}{v})\cdot(-\theta)^3 + R((-\theta)^4) = \frac{1}{2}\cdot(\theta)^2 + \frac{1}{6}\cdot(\frac{g\cdot\rho}{v})\cdot(\theta)^3 + R(\theta^4)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que el segmento *CH=hC* representa el movimiento del móvil sin la resistencia del medio y sin tener en cuenta la gravedad, tenemos que $CH=hC=v\cdot\theta$. Por ello que, tal y como afirma Newton, *CH=hC* es la media aritmética de $fc=v\cdot\theta + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\theta^2$ y $FC=v\cdot\theta - \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\theta^2$:

$$\frac{CF}{Ch} = \frac{Ch}{Cf} \quad \text{es decir} \quad \frac{CF}{CH} = \frac{CH}{Cf}$$

Por otro lado, tenemos que

$$HF = hf = \frac{1}{2}\cdot(fc - FC)$$

luego

$$HF = hf = \frac{1}{2}\cdot(v\cdot\theta + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\theta^2 - v\cdot\theta + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\theta^2) = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\theta^2$$

Por lo que solamente bajo la suposición de que podamos obviar los fluentes superiores al orden dos podremos hacernos con el resultado que obtiene Newton. Es decir, sólo ignorando la diferencia entre *FG* y *fg*, diferencia que es igual a $\frac{1}{3}\cdot(\frac{g\cdot\rho}{v})\cdot\theta^3$, puede obtenerse el resultado erróneo de Newton[817]. Newton obtiene así el cociente entre la resistencia y la gravedad bajo esta última condición. Es decir,

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{fC - CF}{2\cdot FG}\right] = \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\rho\cdot\theta^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot g\cdot\theta^2 - \frac{1}{6}\cdot(g\cdot\frac{p}{v})\cdot\theta^3 + R(\theta^4)\right)}\right] = \frac{\rho\cdot\theta^2}{g\cdot\theta^2} = \frac{\rho}{g}$$

La identificación entre *fg* y *FG* es explícitamente afirmada[818] por Newton en el primer corolario de esta proposición en su primera edición[819]. El error de esta identificación pone de manifiesto las vacilaciones de un cálculo que recurre demasiado ligeramente a la eliminación

---

[817] Cf. Newton [1981] p. 375 n 8. Cf. también Lagrange [1881] pp. 370-371: "le premier membre de cette équation [a saber, de la ecuación $\frac{1}{2}\cdot g\cdot\theta^2 = R\cdot o^2 + S\cdot o^3 = FG$. Previamente se ha expresado el aumento de *y* cuando *x* aumenta *o*, mediante la serie $y_{x+o} = y + Q\cdot o + R\cdot o^2 + S\cdot o^3 + \ldots$, y de ahí que, eliminando los miembros con fluentes superiores a tres, obtenemos FG=$R\cdot o^2 + S\cdot o^3$], qui est l´expression de la flèche en temps, n´est luimême exact qu´aux θ^3 près [luego no se puede obviar la expresión $\frac{1}{6}\cdot(\frac{g\cdot\rho}{v})\cdot(-\theta)^3$]". Cf. también la primera edición en Lagrange [1797] p. 248: "Car, pour peu qu´on examine le calcul que nous venons de faire, on doit voir que, puisque les valeurs de *o* et de *Qo-Ro*^{2}*-So*^{3}*-&c.*, sont exprimées en séries qui procèdent suivant les puissances de θ, il n´est pas permis de pousser l´aproximation au-delá de cette même puissance dans l´équation résultant de l´élimination de *o* : d´ou il suit que le terme qui contient θ^3 dans cette équation, doit nécessairement être incomplet ; et puisque c´est de ce même terme que dépend le rapport cherché de $\frac{r}{g}$, on en doit concluire que la veleur trouvée de ce rapport est inexacte".

[818] Como Whiteside demuestra –siguiendo a Lagrange– el no dar este *faux pas* hace posible obtener el resultado correcto: $\frac{\rho}{g} = \frac{3\cdot S\cdot\sqrt{1+Q^2}}{4\cdot R^2}$ (en Newton [1981] p. 376 n 13).

[819] Cf. Newton [1981] p. 376: "*Et hinc colligitur quod si in Cf capiatur Ck æqualis CF, & ad planum horizontale AK demittatur perpendiculum ki secans curvam ACK in l, fiet Medii densitas ut* $\frac{FG - kl}{CF \times \overline{FG + kl}}$. *Erit enim fC ad kC ut* $\sqrt{fg}$ *seu* $\sqrt{FG}$ *ad* $\sqrt{kl}$ *,...*".

de los infinitesimales de ordenes superiores basándose para ello en el hecho de que hacer algo así suele proporcionar resultados que coinciden con los ya obtenidos mediante procedimientos clásicos.

4.2.3.1.2 Una artilugio de Newton

Tal y como afirma Hegel, la interpretación del diferencial como un incremento o Cuanto suele derivar en dificultades[820] a la hora de legitimar la eliminación de infinitesimales de orden superior[821]. Newton, consciente de este problema, después de haber interpretado el infinitesimal como un incremento, va a hacer uso de una lectura del mismo que le evitará verse obligado a ignorar los diferenciales de orden superior. Es en el diferencial del producto de dos variablres donde Newton pondrá en juego la interpretación del diferencial al que aquí nos estamos refiriendo[822]. Newton, en vez de calcular el incremento de *(x+dx)(y+dy)-xy*, calculará el incremento $(x+\frac{dx}{2})(y+\frac{dy}{2})- \quad (x-\frac{dx}{2})(y-\frac{dy}{2}) = \quad xy+\frac{xdy}{2}+\frac{ydx}{2} \quad +\frac{dxdy}{4}$ $-xy+\frac{ydx}{2}+\frac{xdy}{2}-\frac{dxdy}{4}=xdy+ydx.$ De este modo, decíamos, Newton consigue ignorar el producto de diferenciales *dx·dy* sin que tenga que recurrir al problemático argumento de su relativa pequeñez en comparación con los diferenciales de primer orden. Hegel considera que de este modo se ha omitido el miembro que constituye la “Hauptschwierigkeit”[823]. Este producto de diferenciales no desaparece por medio de las ordinarias operaciones aritméticas en el incremento (*x*+*dx*)(*y*+*dy*)-*xy*=*xdy*+*ydx*+*dxdy*. Por esta razón, se suele omitir basándose en el argumento de la relativa pequeñez. Del mismo modo en que se ignoran los diferenciales elevados al cuadrado por su relativa pequeñez en comparación a los diferenciales sin elevar, se ignorará también el producto de diferenciales *dx·dy* por su relativa pequeñez en comparación a los diferenciales *dx* o *dy*.

Si bien es verdad que en este segundo Lemma de la seguna sección del segundo libro de los *Principa* Newton simplemente se pone a calcular la expresión $(x+\frac{dx}{2})\cdot (y+\frac{dy}{2})-(x-\frac{dx}{2})(y-\frac{dy}{2})$, es evidente que la intención que persigue Newton con esta prueba no es otra que la de obtener el diferencial del producto entre los incrementos de dos variables sin tener que para ello ignorar infinitesimal alguno. De este modo, al estar

---

[820] Sobre estas dificultades véase el apartado 4.2.4.

[821] Cf. Hegel [1985] p. 281.

[822] Cf. Newton [1714] p. 225 y Newton [1686] p. 252: “Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, seu $AB-\frac{1}{2}aB$ $-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$ quam primum latera *A* &*B* alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ seu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & menebit excessus *aB*+*bA*. Igitur lateram incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum *aB*+*bA*.”.

[823] Cf. Hegel [1978] p. 172 y Hegel [1985] p. 261. Corregimos el error de la primera edición donde en vez de “Hauptschwierigkeit” dice “Hauptgeschwindigkeit” (¡sic.!).

presupuesto en su planteamiento la igualdad entre las expresiones $(x+\frac{dx}{2})(y+\frac{dy}{2})-(x-\frac{dx}{2})(y-\frac{dy}{2})$ y $(x+dx)\cdot(y+dy)-x\cdot y$, Newton está aceptando, al mismo tiempo, la rectidud de ignorar la expresión de segundo orden $dx\cdot dy$ mediante los procedimientos convencionales[824].

4.2.3.2 Problemas con los evanescentes

En lo que se refiere al segundo de los métodos mencionados al principio de esta sección, Lagrange considera que el concepto de magnitud en el momento de dejar de ser cociente de magnitud no es un concepto suficientemente claro:

Mais cette Méthode [el de primeras y últimas razones] a, comme celle des limites dont nous avons parlé plus haut, et qui n´en est proprement que la traduction algébraique, le grand inconvenient de considérer les quantités, car, quoiqu´on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu´elles demeurent finies, ce rapport n´offre plus à l´esprit une idée claire et précise ausitôt que ses termes deviennent l´un et l´autre nuls à la fois[825]

Esta posición es algo que Hegel, saliendo al paso por Newton, no va a compartir. Lo que para Lagrange es una idea obscura e inprecisa es, para Hegel, un verdadero logro de Newton. Y es que, Hegel simpatizará con la definición del evanescente divisible –o, lo que para Hegel viene a ser lo mismo, la fluxión– que ofrece Newton en el *Scholium* de la primera sección del libro primero de los *Principia*. Refiriéndose a este apartado, Hegel dirá que la idea del cociente de diferenciales no se puede definir mejor que recurriendo a la definición dada por Newton[826]. La definición a la que se refiere Hegel es la siguiente:

per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligenda est rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur[827]

---

[824] Cf. Gómez Pín [1984] p. 345: "Newton, de hecho, al igualar ambas fórmulas [$(x+\frac{dx}{2})\cdot(y+\frac{dy}{2})$ f y $(x+dx)\cdot(y+dy)-x\cdot y$] está aceptando la legitimidad del abstraer $dx\cdot dy$". La igualación no es, en contra de lo que ahí se dice, algo que Newton haga en el texto de los *Principia*.

[825] Cf. Lagrange [1881] p. 18.

[826] Cf. Hegel [1978] p. 166: "Der Gedanke kann nicht richtiger bestimmt werden, als Newton ihn gegeben hat". Esta opinión contrasta con la de Pourciau (cf. Pourciau [2001] p. 29), según el cual el *scholium* de Newton es un intento de ofrecer al lector una intuición de su noción de límite. Es decir, el *scholium* sería la versión popular del concepto de límite de Newton. Según esta tesis, para hacerse una idea de lo que entendía Newton por límite habría que centrarse en las pruebas de los distintos Lemmas donde, coherentemente, no aparece ninguna noción cinemática –a diferencia del *scholium*–: "It is in the proofs that we see the intended mathematical meaning. To see how Cauchy understood the limit concept, we look at his proofs; to see how Newton undestood the limit concept, we have done the same".

[827] Cf. Newton [1714] p. 33. Cf. para la traducción inglesa Newton [1999] p. 442: "the ultimate ratio of vanishing quantities is to be understood not as the ratio of quantities before they vanish or after they have vanished, but the ratio with wich they vanish. Likewise, also, the first ratio of nascent quantities is the ratio with

Empecemos por hacer notar que aquello que Newton denomina "ultimam rationem quantitatum evanescentium" es el equivalente de nuestro coeficiente de diferenciales. En efecto, un cociente de diferenciales es una proporción –en latín, una *ratio*– considerado en el límite –lo que se expresa en Newton con *ultima*. Y esto nos remite a la segunda parte de la expresión "ultimam rationem quantitatum evanescentium". El él, el sintagma en genitivo plural "quantitatum evanescentium" tiene el significado de un genitivo objetivo y de un genitivo subjetivo. La proporción es de algo –*genitivus objectivus*– a la vez que ese algo tiene una razón –*genitivus subjectivus*. Estos algo son las cantidades evanescentes –en términos de Newton– o las magnitudes infinitesimales –en términos de la matemática al uso. La última proporción entre dos magnitudes, nos dice Newton, es aquella en la que las magnitudes de la proporción dejan de ser –o comienzan a ser– magnitudes. La expresión "ultimam rationem quantitatum evanescentium" tiene la forma de bicondicional: tener una última razón es tener la proporción entre dos magnitudes que evanecen y, viceversa, una magnitud evanescente sólo tiene lugar en relación a otra magnitud evanescente, es decir, dentro de una "ultimam rationem".

Lo importante ahora es observar que las magntidues de un cociente último, del límite de una razón, no son para Newton cantidades sino –digamoslo así– magnitudes que comienzan o dejan der ser cantidades[828]. Esto hace que el concepto de los infinitesimales de Newton coincida, en un sentido que trataremos de precisar ahora, con la de Galileo. No es que los "infinitesimales" de Newton sean, como los de Galileo, indivisibles y, por ende, inmensurables. Lo que tanto Galileo como Newton comparten en relación a lo infinitamente pequeño consiste en que los dos lo consideran algo que no es un cuanto[829]. La diferencia frente a Galileo consiste que para Newton las magnitudes evanescentes no serán unos atomos o entidades indivisibles[830]. Haciendo uso de la terminología de su época, se podría decir que Newton, al igual que Leibniz[831], considera lo infinitamente pequeño y lo infinito en general en su versión *terminata*[832], es decir, como algo distinto de cero y no como un punto infinitesimal. En definitiva, lo infinitamente pequeño es, en ámbos autores, una variable.

Esta definición de lo envacescente es un ejemplo de la *aufhebung* de la contradicción en la que están siempre ya envueltas el Ser y la Nada desde el comienzo mismo de la *Wissenschaft der Logik*. La forma que tomaba la superación de la contradicción en este momento de la *Wissenschaft der Logik* era el Devenir. La última razón de las magnitudes evanescentes no es la razón después de que hayan evanecido ni antes de que evanezcan, sino la razón con la que evanecen. El momento evanescente no es el momento que se da después

---

which they begin to exist". La traducción inglesa sugiere, en nuestra opinión, la falsa idea de que la "ultimate ratio" puede serlo de las "vanishing quantities" como podría serlo de alguna otra cosa.

[828] Cf. Hegel [1985] p. 253: "Es sind Größen verstanden in ihrem Verschwinden, d.h. die nicht mehr Quanta sind".

[829] Galileo hablara, en efecto, de "non quanti" para referirse a los componentes atómicos de la línea o un sólido (cf. Galileo [1898] p. 72). Hay un segundo sentido del término "non quanti" en Galileo que se utiliza para expresar aquello que es incontable (cf. Galileo [1898] p. 71: "i lati [a saber, los infintos lados del polígono –es decir, del círculo–] non son quanti, ma bene infiniti"). Los dos significados están relacionados hasta tal punto que para componer una magnitud finita –sea ésta una línea, una superficie o un volumen– los átomos de Galileo han de ser "non quanti" en los dos sentidos del término: a saber, infinitamente pequeños e innumerables. Sobre las negligencias cometidas por los distintos traductores y historiadores ante la traducción de este término cf. Knobloch [1999] p. 91.

[830] Cf. Newton [1686] p. 35: "nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia".

[831] Sobre Leibniz cf. Knobloch [1994].

[832] Carácter que era expresado por Hegel diciendo que los momentos del cociente de diferenciales eran la expresión de una contradicción o un proceso.

de la evanescencia, ni antes de ella: el momento evanescente es el momento del devenir mismo. Si lo miramos desde el Ser, antes de la evanescencia sólo tenemos un Cuanto, algo determinado, y no el infinitesimal. Después de la evansecencia tenemos la Nada y no algo, un infinitesimal. Visto desde la Nada, antes de la evanescencia tenemos Nada. A su vez, depués de la evanescencia tenemos un Ser y no un infinitesimal. Estos dos lados del devenir –el perecer (*Vergehen*) y el llegar a ser (*Entstehen*) tienen su reflejo en las *quantitates evanescentes* y las *quantitates nascentes* de los *Principia*[833].

Esta magnitud en devenir es algo que no es ni Ser ni Nada, es un algo que, según Hegel, contradice al entendimiento finito. Una entidad de tales características, a saber, el evanescente de Newton, es el fundamento del cálculo moderno. La aburrida discusión sobre si el diferencial es algo o no es nada, sobre si el diferencial es un algo cuantitativo o es una nada cuantitativa, no se resuelve más que superando esta falsa oposición entre el Ser y la Nada. Hay un estado intermedio (*Mittelzustand*[834]) entre el Ser y la Nada, o, mejor dicho, el Ser y la Nada son ya ese estado intermedio. El Ser y la Nada son, en su traspaso el uno en el otro y el otro en el uno, Devenir. De ahí que no resulte extraño econtrarse con el concepto de lo infintamente pequeño dentro de la cuarta observación que escribe Hegel al momento del Devenir (*Werden*). En él se expresa en estos términos la oposición a la que se ha sometido falsamente al infinitesimal:

Gegen diesen reinen Begriff ist bekanntlich eigewendet und immer wiederholt worden, daß solche Größen entweder Etwas seien oder Nichts, daß es keine Mittelzustand (Zustand ist hier ein unpassender, barbarischer Ausdruck) zwischen Sein und Nichts-sein gebe[835]

Los diferenciales no son, pues, algos cuantitativos, sino que momentos de una relación que se encuentran en un "estado" de desaparecer su carácter de Cuanto: "Es sind Größen verstanden in ihrem Verschwinden"[836]. La incomprensibilidad del diferencial radica, según Hegel, en la consideración estrictamente cuantitativa de la misma. Frente a ello, el diferencial ha de ser comperendida como un momento cualitativo[837]. Esto significa que el diferencial está siempre vinculado a otro Algo; a otro diferencial. La necesaria vinculación de cada momento en la Relación los distingue de los Cuantos de una Relación en el que cada Cuanto sigue siendo un Cuanto fuera de esa relación[838]. Los infinitesimales no son más que en su relación.

---

[833] Cf. Newton [1686] p. 35. Debido a esto que estamos viendo ahora, las magnitudes evanescentes igualmente podrían llamarse magnitudes nacientes. El término que abarca los lados del movimiento sería, sin embargo, el de "magnitudes en devenir". Nótese también que Leibniz hará uso de esta terminología *dinámica* en su *Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi, provolutionibus, allisque cognatis, et eorum usibus nonnulus*: "et in solo casu extremo, qui est flexus contrarii, **nascens**, ut ita dicam, vel **moriens** osculatio tribus intersectionibus contenta est" (en Leibniz [1858] p. 282. Sub. nuestro).

[834] Parece que esta expresión que Hegel mismo utiliza no es del todo adecuada si atendemos al siguiente pasaje: "ist die Einheit des Seins und Nichts kein Zustand" (en Hegel [1978] p. 165 y Hegel [1985] p. 252). Véase asimismo más abajo el texto de Hegel que reproducimos en el texto principal.

[835] Cf. Hegel [1978] p. 56.

[836] Cf. Hegel [1978] p. 167 y Hegel [1985] p. 253.

[837] Cf. Hegel [1978] p. 170: ."muß der Verstand über diese bloß negative Seite, daß die Verhältnisglieder Nullen als Quanta sind, hinausgehen und sie positiv als qualitative Momente auffassen".

[838] Cf. sobre esto el siguiente apartado: "El Infinito y la Serie".

Esta idea que ya era expresada tanto por Euler como por L'Huilier[839], vuelve a ser defendida ahora por Newton:

Ultimae rationes illae quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant ; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum[840].

Este carácter relacional de las magnitudes en devenir hace que las mismas aparezcan siempre formando parte de una proporción. Siguiendo con la lógica de la distinción entre magnitudes evanescentes y nacientes, la proporción en el que el numerador y el denominador son magnitudes envanescentes se denominará la primera razón o proporción de ellas. A su vez, cuando los componentes de la proporción son magnitudes nacientes, la proporción se denominará razón o proporción última. Con esto entramos dentro de la problemática de la siguiente sección en la que nos ocuparemos del método de las primeras y últimas razones de Newton.

4.2.3.3 Las primeras y últimas razones

Newton presenta su método de las primeras y últimas razones (*Methodus rationum primarum & ultimarum*) en la primera sección del primer libro de los *Principia*. La principal novedad de esta sección es, probablemente, la de la introducción de la noción de la cantidad como una entidad no fija, sino como algo que "tiende a un límite" o, en el caso de que sean dos cantidades, pueden "aproximarse entre sí"[841]. Frente a los clásicos que se sirven de los cuanta y a los contemporáneos suyos que hacen uso en el álgebra de cantidades indeterminadas o variables, Newton comenzará a introducir la noción de variación de una variable en la física matemática.

---

[839] Cf. L'Huilier [1975] p. 36 §24: "aut ne credamus, ex æquatione $\frac{d.x^n}{dx}=nx^{n-1}$ posse deduci hanc $d.x^n=nx^{n-1}dx$. Espressio $\frac{d.x^n}{dx}$ incomplexa est atque peculiaris, ad designandos exponentes limitum rationum simultaneorum quantitatum mutabilium x^n & x incrementorum facilitatis causa introducta ". Cf. también la crítica que hará poco después a las siguientes palabras de Abad Caluso: "*Il ne suffit pas de voir clairement que* $\frac{dv}{dx}$ *etant la limite du raport* $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ *; et* $\frac{dz}{dx}$ *la limite de la raport* $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ *; on aura* $\frac{dv}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ *lorsque v=xz : mais, il faut d´abord attacher une idée nette es precise à dv, dx, dz ; afin que ces expressions signifient quelque chose par elles-mêmes et independamment les unes des autres*" Ejemplo, este último, de lo que tanto Euler, Newton, L´Huilier como el propio Hegel van a considerar un verdadero melentendido a subsanar.

[840] Cf. Newton [1714] pp. 33 y 34 o Newton [1689] p. 36. Cf. también la traducción inglesa en Newton [1999] pp. 442 y 443: "Those ultimate ratios with which quantities vanish are not actually ratios of ultimate quantities, but limits which the ratios of quantities decreasing without limit are continually approaching, and which they can approach so closely that their difference is less than any given quantity, but which they can never exceed and can never reach bafore the quantities are decreased indefinitely".

[841] Cf. De Gandt [1995] p. 226. Con estos términos Newton está introduciendo en el análisis lo que más tarde Carnót llamará "cantidades no designadas" (*quantités non-désignées*. Cf. Carnot [1813] p. 23).

El primer Lemma se encarga de la introducción del paso al límite en aproximaciones constantes en las que la diferencia entre el límite y la aproximación es menor que qualquier magnitud dada:

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore constanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia; sivant ultimo æquales [842]

Este Lemma[843] afirma la igualdad última[844] de dos cantidades que, en un tiempo dado, tienden a la igualdad. Esta tendencia a la igualdad puede tomar dos formas distintas. O bien son las cantidades que se aproximan a sí las que tienden a ser iguales[845], o bien es la proporción entre ellas la que tiende a ser una proporción última de igualdad. La primera forma de igualdad es la que comparece en la demostración de este Lemma. Pero es la segunda forma de igualdad la que utiliza Newton en las demostraciones de los *Principia*[846]. Así, para decir que dos cantidades tienden a la igualdad[847] Newton dirá que su razón es una razón última de igualdad. La proporción última de igualdad es aquella que es igual a uno. Es decir, si dos cantidades $f(p)$ y $g(p)$ tienden a la igualdad, su razón última será el de la unidad:

$$\text{si} \quad \lim_{p\to\infty}\left(\frac{g(p)}{f(p)}\right) = \lim_{p\to\infty} h(p) \text{ y } \lim_{p\to\infty} h(p) = 1 \text{, entonces } \lim_{p\to\infty}\left(\frac{g(p)}{f(p)}\right) = 1$$ [848]

Con la expresión $p \to \infty$ pretendemos expresar la *constanter tendunt* del que habla Newton en este primer Lemma. El tiempo es, como dice Newton, finito o dado, pero las operaciones o pasos posibles que se dan sobre él son infinitas. Estas operaciones son las operaciones de aproximación o las operaciones que permiten la aproximación de las

842 Cf. Newton [1686] p. 26. Cf. [1999] p. 433: "*Lemma 1*.Quantities and also ratios of quantities, which in any finite time constantly tend to equality, and which before the end of that time approach so close to one another that their difference is less than any given quantity, become ultimately equal". Nótese que la traducción inglesa es de la tercera edicción donde en vez de *dato tempore* se lee *tempore quovis finito*.

843 Con un Lemma muy parecido va a comenzar también L'Huilier su *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*, aunque, el recurso a la reducción al absurdo es más explícito en él en la demostración. Cf. L'Huilier [1795] p. 5, § 3: "*Theorema.* Sit quantitas data limes quantitatis mutabilis crescentis vel decrescentis. Dico rationem æqualitis limitem esse rationis decrescentis vel crescentis, prioris quantitatis ad posteriorem. Nempe. Sit quantitas data *AB* limes quantitatis crescentis v.gv. *AX*. Dico rationem *AB:AX* posse accedere ad rationem æqualitis, propius quam ad eam accedit data quæcunque ratio majoris ad minorem. majoris ad minorem. *Demostratio.* Quæcunque detur ratio majoris ad minorem ; fiat ipsi æqualis ratio *AB* ad *AD*, quæ minor erit quam *AB*. Et fiat *AX>AD* (quod possibile est per hyp.) Erit *AB:AX<AB:AD*. Eodem modo demostratur de altero Limite".

844 En el lenguaje matemático contemporáneo "en el límite".

845 Algo que, siguiendo, en parte, la formulación que propone Pourciau (en Pourciau [2001] p. 22), podemos expresar de la siguiente forma: si $\lim_{t\to c^-}(f(t)-g(t)) \equiv 0$ entonces $\lim_{t\to c^-} f(t) \equiv \lim_{t\to c^-} g(t)$ (donde $t \to c^-$ significa "*t* approaches *c* from the left").

846 Entre ellas, en las demostraciones de esta misma Sección.

847 Por ejemplo, en el Lemma 2 de esta misma sección, Newton no dice que la figura inscrita y la circunscrita son últimamente iguales, sino que su razón es una razón última de igualdad.

848 Escribimos $p \to \infty$ en vez de $t \to c^-$, dado que esta última expresión en el que se expresa que el tiempo tiende a un límite finito, presupone esta otra: $\lim_{p\leftarrow\infty} t(p) = c^-$.

magnitudes entre sí. El que la aproximación a su límite sea uniforme o constante quiere decir que los pasos en los que tiene lugar son, en principio, infinitos. Frente a este proceso de aproximación se sitúa el momento último, el paso al límite.

La variable independiente es, como estamos viendo, el tiempo. Sobre este tiempo se realizan operaciones que, en cuanto tales, son siempre, *de facto*, finitas en cantidad. Pero sabemos que el fondo sobre el que se realizan las operaciones es infinita, es decir, que la aproximación es continua. No hay razón para pararse en uno u otro paso de la aproximación. Es precisamente éste "no tener razón para pararse" lo que constituirá la base de la prueba de este Lemma. Pero no siempre será el tiempo mismo el que cumpla la función de ejercer de fondo continuo. Así, la constancia de la aproximación sobre la base del tiempo tendrá su expresión en la continuidad de la curvatura del Lemma 6[849]. En este Lemma es la curvatura y no el tiempo mismo el que permite hablar de aproximación constante[850].

El primer Lemma va a fundamentar los pasos al límite que tienen lugar en el resto de la sección. En un primer momento, podría parecer que este primer Lemma no necesita de la condición de contradictoriedad o absurdo en la que se veía enredado todo valor distinto al límite y que caracterizaba a las pruebas por exhaustión, en este sentido más rigurosas, de los antiguos[851]. Sin embargo, es en la expresión "pro data quavis differentia"[852] donde se esconde el recurso a la contradicción de este Lemma. Bajo una expresión tal, la única forma de no caer en la contradicción es el de reconocer que la diferencia entre las dos cantidades no es cantidad ninguna. Con ello estamos aceptando que las dos magnitudes son iguales.

La demostración del Lemma dice así:

[849] Cf. Newton [1686] p. 29: "Si arcus quilibet positione datus *AB* subtendatur chorda *AB*, & in puncto aliquo *A*, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinq; producta *AD*; dein puncta *A*, *B* ad invicem accedant & coeant; dico quod angulus *BAD* sub chorda & tangente contentus minuetur in infinitum & ultimo evanescet". Cf. Newton [1999] p. 435: "If any arc *ACB*, given in position, is subtended by the chord *AB* and at some point *A*, in the middle of the continuous curvature, is touched by the straight line *AD*, produced in both directions, and if then points *A* and *B* approach each other and come together, I say that the angle *BAD* contained by the chord and the tangent will be indefinitely disminished and will ultimately vanisch".

[850] No estamos de acuerdo con la división que realiza De Gandt (en De Gandt [1995] p. 226) entre los Lemmas 2 a 5, donde el tiempo sería discreto, y los Lemmas 6 a 11, donde el tiempo sería continuo. Consideramos que en el conjunto de los Lemmas de esta sección primera el tiempo es infinitamente divisible o –en el lenguaje usual– continuo. El tiempo de las operaciones que, para De Gandt, resulta ser una magnitud discreta está presente tanto en los Lemmas 2 a 5 como en los Lemmas 6 a 11. A su vez, el concepto de "curvatura continua" que es presentada en el Lemma 6 y que constituye el fundamento de los Lemmas siguientes, tiene su equivalente en la magnitud de la diferencia entre la figura inscrita y la circunscrita. Del mismo modo en que la curvatura continua permite hablar de un ángulo de contacto evanescente, el error de la integración, al ser continua, podrá ser también menor que cualquier magnitud dada, es decir, podrá ser evanescente.

[851] El objetivo declarado de estos Lemmas es, precisamente, el de evitar las tediosas pruebas por *reductio ad absurdum* de los antiguos. Cf. Newton [1686] p. 35: "Præmisi vero hæc Lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas deomstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum". Cf. Newton [1999] p. 441: "I have presented these Lemmas before the propositions in order to avoid the tedium of working out lengthy proofs by *reductio ad absurdum* in the manner of the ancient geometers". En la primera edición dice *perplexas* (complicadas) donde en la segunda y la tercera dice *longas* (largas).

[852] Expresión que I. B. Cohen y A. Whitman traducen por "less than any given quantity" y que es equivalente a la definición del infinitesimal dada por Leibniz en su *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (cf. p.e., Leibniz [2004] p. 82: "Et proiende si quis assertiones nostras neget facile convinci possit ostendendo errorem quovis assignabili esse minorem, adeoque nullum").

Si negas, sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia D: contra hypothesin[853]

Vemos que se trata de un razonamiento típico de reducción al absurdo[854] que, cabría decir con Hegel, es propia de la facultad denominada entendimiento. En estas demostraciones, para demostrar la tesis propia *in abstracto* se parte de la tesis contraria *in concreto*. Así, para demostrar que las dos magnitudes cuya diferencia es menor que cualquier diferencia dada son iguales, se concede a la antítesis que proponga una diferencia que no pueda superar. Supongamos que esta diferencia es, *in concreto*, la diferencia *D*. Pero entonces habrá una diferencia que no es, contra la hipótesis, superable. Y como esto ocurrirá con todas las diferencias que se propongan desde la antítesis, se demuestra que las dos magnitudes tienen una proporción última de igualdad.

Vemos con ello, que la demostración no es más que la parte complementaria de la demostración del argumento de la dicotomía de Zenón. Newton demuestra la tesis contraria al de Zenón, pero lo hace haciendo uso del mismo esquema de prueba. Si para Zenón la tesis a defender –siempre *in abstracto*– era la de la divisibilidad en una mitad de un segmento, la antítesis afirmaba la superación de la divisibilidad de cualquier segmento. Es decir, traduciendo al lenguaje del razonamiento de Newton, Zenón afirma la existencia de una diferencia entre las dos magnitudes[855]. La antítesis de Zenón, es decir, la postura de Newton es la contraria: toda diferencia es disminuible[856]. La prueba de Zenón es exactamente análoga a la de Newton sólo que los papeles están cambiados; la tesis a defender –tesis que en Newton es la de la antítesis– es sostenida *in abstracto* y se concede a la antítesis –a la tesis de Newton– una afirmación particular: a saber, se concede que un segmento dado ha sido dividido[857]. Pero como resultado de esta nueva división –en Newton: disminución– no habremos hecho más que dar con un nuevo segmento –en Newton: diferencia. Como el concepto –el lado *in abstracto*– está, ésta vez, del lado de la tesis de Zenón[858], la conclusión es la contraria de la de Newton: siempre habrá un segmento que dividir[859]. La postura del concepto, la postura que tiene a su lado el peso de la prueba, era expresda así por Zenón:

ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν[860]

En estas pruebas típicas del entendimiento finito, conceder al contrincante que ponga un caso de su tesis sobre el tapete es el procedimiento utilizado para condenar a la perdición su postura. Esta concesión a la postura de la antítesis se realiza en la definición del infinitesimal newtoniano y leibniziano mediante el uso de los términos *data* o *asignata*. En ella se permite a Zenón[861] que asigne una diferencia para ver que eso va en contra del concepto presupuesto

[853] Cf. Newton [1686] p. 26. Cf. para la traducción Newton [1999] p. 433: “If you deny this, let them become ultimately unequal, and let their ultimate difference be D. Then they cannot approach so close to equality that their difference is less than the given difference D, contrary to the hypothesis”.
[854] Cf. sobre este punto Guicciardini [1999] p. 43.
[855] Expresado en el razonamiento de Zenón: siempre habrá un segmento que dividir.
[856] Expresado en el razonamiento de Zenón: todo segmento será dividido.
[857] Expresado en el rezonamiento de Newton: una diferencia dada ha sido disminuida.
[858] Es decir, del lado de la antítesis de Newton.
[859] Expresado en el razonamiento de Newton: siempre habrá una diferencia entre las dos magnitudes.
[860] DK 29 B 1. La traducción podría ser esta: “igual es haber dicho eso una vez que decirlo siempre”.
[861] Nos permitimos la licencia de hacer uso aquí del *cliché* Zenón por mor de la simplicidad en la exposición y a cambio de recordar que no hay una postura de Zenón frente a la postura de Newton –aunque tal vez hayamos

por la hipótesis. Este presupuesto es la expresión del lado de la tesis o el lado que defienden Newton y Leibniz. Por todo esto, en la definición del infinitesimal como "aquello que es menor que cualquier magnitud dada", ya se ha tomado partido a favor del frente para el cual la diferencia no es, en última instancia –a saber, en el concepto–, ninguna diferencia.

No obstante, a diferencia de Newton, para quien, en ciertas ocasiones, la igualdad entre las dos magnitudes puede ser estrictamente nula[862], Leibniz hablará únicamente de una "diferencia que es menor que cualquier diferencia dada". El no dar el paso de la magnitud evanescente a la evanescencia de la magnitud obliga a Leibniz a hablar de una nueva concepción de la igualdad. Así, en un opúsculo publicado en el año 1695 en la *Acta eruditorum*, Leibniz llega a afirmar que la igualdad entre dos magnitudes no se reduce al caso en el que la diferencia entre ellas sea absolutamente nula, sino que incluye también el caso en el que la diferencia entre las magnitudes es menor que cualquier magnitud dada[863]. Vemos con ello que la introducción de los infinitesimales involucra una nueva definición de la igualdad que terminará afectando a las igualdades elementales de la aritmética[864].

Vamos a ver ahora que esto que en Leibniz es expresado explícitamente, tiene también lugar en Newton. El caso del Lemma 6 no deja de ser una excepción dentro de esta primera sección del primer libro. Así en los Lemmas 2 a 4 Newton no dice que el error o la diferencia entre las figuras inscritas y circunscritas *evanezca*, sino que la razón última entre las figuras es el de la igualdad. Es ésta la forma que tiene Newton de expresar la igualdad entre dos magnitudes cuya diferencia no es absolutamente –cuantitativamente– nula, sino menor que cualquier diferencia asignable. Esta sería también la razón de que Newton presente en el primer Lemma dos formas distintas de igualdad entre magnitudes. En la primera se hablaba de la igualdad –para decirlo con Euler– aritmética, mientras que la segunda era la igualdad de la relación o –otra vez con Euler– la igualdad geométrica. La primera de estas igualdades es la que impide expresar la igualdada a no ser que la diferencia entre las magnitudes sea absolutamente nula. La segunda de las igualdades entre las magnitudes es la que permite expresar la igualdad con el sentido ampliado en la dirección apuntada por Leibniz. Por ello es importante no confundir la expresión

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{g(p)}{f(p)}\right)=1 \qquad [3]$$

con esta otra

podido transmitir tal impresión–, sino que la postura de Zenón es la de, como buen dialéctico, reducir al absurdo una la Tesis cuya antítesis es, a su vez, reducida al absurdo. Como hemos visto en el capítulo 2, no hay una doctrina positiva de Zenón.

862 Es decir, una nada. Al menos eso es lo que se podría deducir del uso que hace Newton del verbo *evanescere* en el Lemma 6 de los principia. En él no se dice sólamente que una magnitud dada –el ángulo entre la tangénte a una curva y la recta que une el punto de la tangente con un punto de la recta– sea una magnitud evanescente, sino que la magnitud misma llega a evanecer.

863 Cf. Leibniz [1858] p. 322: "Caeterum aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia est incomparabiliter parva; et licet ea Nihil omnino dici non debeat" (Cf. la traducción francesa en Leibniz [1989] p. 326: "Je juge d'ailleurs que des termes sont égaux non seulement lorsque leur différence est absolument nulle, mais aussi lorsqu'elle est incomparablement petite, et bien qu'on ne puisse dire en ce cas que cette différence soit absolument Rien").

864 Cf. el apartado 4.1.1.

$$\frac{\lim\limits_{p\to\infty} g(p)}{\lim\limits_{p\to\infty} f(p)} = 1 \qquad [4]$$

La primera de estas expresiones es la que es fiel a la expresión newtoniana "limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant"[865] o, simplemente, última razón. En efecto, Newton no habla de razón de magnitudes últimas sino de razón última de magnitudes evanescentes. La segunda de estas expresiones es la que expresa la igualdad aritmética entre dos magnitudes. Podemos ver esto mejor si en vez de [4] escribimos,

$$\lim_{p\to\infty} g(p) = \lim_{p\to\infty} f(p) \qquad [5]$$

En esta expresión, la diferencia entre las magnitudes iguales debe de ser absolutamente nula y, por ende, la contradicción entre el Ser y la Nada de la expresión "menor que cualquier magnitud dada" debe resolverse a favor de la Nada[866]. El equivalente conceptual de la expresión [4] es explicitamente descartada por Newton en el *Scholim* a la primera sección. En él se afirma que las últimas razones entre las cantidades no son las razones de las cantidades últimas[867]. Es precisamente esta última razón la que consideradramos que queda expresada por la expresión [4].

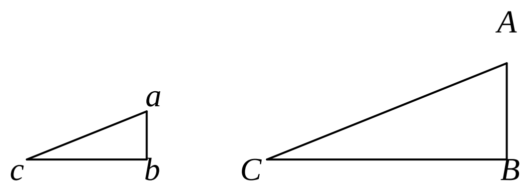
Ya hemos tenido ocasión de ver que la distinción entre la expresión [3] y la expresión [4] es fundamental en la lectura que hace Hegel del cociente de diferenciales. La expresión [3] tiene como su denominador y numerador no ya unos Cuanta sino Momentos de una comparación. Estos momentos no tienen, a diferencia de unos Cuanta, un Ser-ahí fuera de su mutua relación. La expresión [3] es el límite de una relación (*Grenzen des Verhältnisses*)[868] en el que tanto la relación como los componentes deben perder su carácter de Cuanto. En este sentido, dirá Hegel, tanto la relación como los elementos de la misma tienen que desaparecer[869]. Puede sorprender esta afirmación que habla de la desaparición de la relación o del cociente. Al fin y al cabo, se podría decir, el cociente de diferenciales, si bien es verdad que está constituido por polos evanescentes, no deja de expresar un Cuanto concreto. Contra esta afirmación cabe recordar que la expresión del cociente de diferenciales sólo tiene sentido en aquellas ecuaciones o, en general, relaciones cuantitativas, en las que la relación entre los lados no es lineal. En una relación así, la expresión para el cociente diferencial no es un

[865] Cf. Newton [1686] p. 36.
[866] Es decir, a favor de lo que Leibniz llama "cero absoluto".
[867] Cf. Newton [1686] p. 36: "Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum".
[868] Cf. Hegel [1985] p. 253.
[869] Entiéndase bien; deben desaparecer como Cuanta. Cf. Hegel [1985] p. 253: "Es sollen also sowohl die Quanta für sich, die Seiten des Verhältnisses, als damit auch das Verhältnis, insofern es ein Quantum wäre, verschwinden".

Cuanto particular sino una ecuación[870]. Esta ecuación es aquello que Hegel denominará una “determinidad cuantitativa en forma cualitativa” (*Größebestimmtheit in qualitativer Form*)[871].

Esta expresión con forma cualitativa expresa para el nivel, por así decir, infinitesimal, una proporción que tiene su origen en una relación finita. La tarea de los Lemmas 6 a 11 es la de ver cómo puede tener lugar esta conservación de esta relación finita en la relación infinita. La conservación de una relación en distintos espacios o figuras al mismo tiempo se logra mediante la analogía entre las figuras. Esto serviría si la relación a conservar fuese fija. No obstante, sabemos que en Newton, para dar con la última razón de una proporción, la proporción entre las variables[872] ha de ser, ella misma, variable. Para cumplir esta condicción Newton sitúa sobre la prolongación de la misma figura triangular las dos proporciones, de tal forma que mientras que una de ellas tiende a desaparecer en la última razón, la otra conserva, en la dimensión finita, una proporción igual a ella. La proporción última no llega así a perderse al haber sido registrada en una figura finita.

La perfecta traducción de la proporción *a/b* en *A*/*B* es garantizada por la propiedad de igualdad o analogía entre los triángulos[873] *abc* y *ABC*:



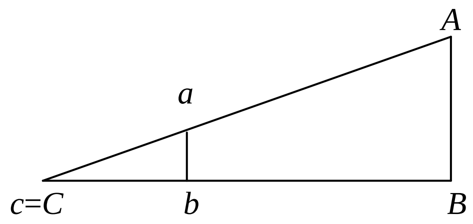
Con ello sólamente garantizamos la igualdad de la proporción en un tiempo dado. Para hablar propiamente de la conservación de la proporción, conservación que implica cambio de tiempo, tenemos que montar los dos triángulos sobre sí:

[870] En el caso más sencillo, la función derivada de la expresión $f(x) = x^2$ es la ecuación $f'(x) = 2xdx$, y de ahí que el cociente de diferenciales sea $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.

[871] Cf. Hegel [1985]p. 241.

[872] Es decir, la proporción entre las cantidades indeterminadas.

[873] Evidentemente, estos dos triángulos no tienene por qué ser rectángulos. Si hemos terminado por dibujar unos que sí lo son lo ha sido por comodidad. En los *Principia* Newton hará uso de triángulos no rectángulos (cf. Newton [1686] pp. 29 y 31).



Mediante esta nueva figura va a resultar posible hacer evanecer los segmentos *ca* y *cb* sin que su razón última llegue, con ello, a desaparecer. Esta razón última es conservada en la dimensión finita en la proporción entre los segmentos *CA* y *CB*.

La conservación de una proporción con componentes infinitos –i.e. infinitésimos– en otra finita tiene un marco de aplicación que sobrepasa el ámbito estrictamente geométrico. Las ilustraciones de las que hemos hecho uso para hablar de esta conservación geométrica pueden servir, a su vez, para hacerse una idea de lo que es la conservación del valor de un cociente cuando los lados de la misma se vuelven infinitesimales. Este concepto general de conservación de una proporción “infinitesimal” en otra finita es lo que se denomina continuidad de una proporción en otra. Este nuevo concepto de continuidad, concepto que no hay que confundir con la continuidad de la categoría de la Cantidad, será expresado por primera vez por Carnot. En la sección 4.2.4.2 trataremos de ver cuál es el contenido de este concepto así como cuál es el sentido que tiene el mismo para Hegel.

4.2.3.4 Abusos de lectura

El Lemma séptimo de la primer sección de los *Principa* es objeto de una falsa interpretación por parte de Hegel. Resulta algo desconcertante comprobar que este error de interpretación no será corregido en la seguna edición de la *Wissenschaft der Logik*. Hegel afirmará que, en dicho Lemma, Newton iguala en las últimas razones el seno, el coseno, la tangente y el *sinus versus*[874]. Frente a esto cabe decir que lo que de hecho hace Newton mediante un argumento basado estrictamente en el método de las primeras y últimas razones es igualar la tangente, la diagonal y la curva[875]. En contra de lo que afirma Hegel, no hay rastro de igualdad de proporción entre el *sinus versus* y algún otro segmento. Pero, veamos la formulación del Lemma:

Iisdem positis, dico quod ultima ratio arcus, chorœ & tangentis ad invicem est ratio œqualitatis [876].

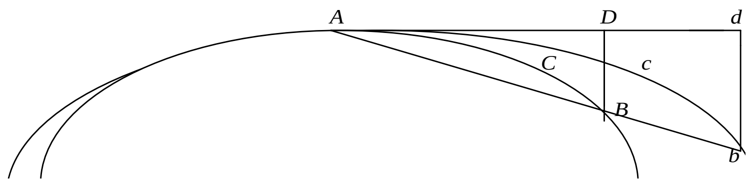
---

[874] Cf. Hegel, op. cit., p. 176: “so ist die unstatthefte Vorstellung hieraus entsprungen, welche es sich erlaubt, in dem letzten Verhältnis Abzisse und Ordinate oder auch Sinus, Kosinus, Tangente, Sinus versus und was alles noch, einander gleichzusetzen”. La segunda edición del pasaje (Hegel [1985] p. 269) es prácticamente idéntica.

[875] Cf. Moretto [1984] p. 197 n 99: “Hegel attribuisce erroneamente alla teoria newtoniana l´eguaglianza nell´ultima ragione, ad es., del seno e del seno verso”.

[876] Cf. Newton [1999] p. 436: “*Lemma VII*. With the same suppositions [a saber, que la línea AD es tangente al arco AB y que el punto B tienda a A], I say that the ultimate ratio of the arc, chord, and tangent, to one another are ratios of equality”.

La figura[877] que acompaña al Lemma es la siguiente:



El triángulo *ABD* es parte del triángulo *Abd* con lo que –cuando el punto *B* se aproxime a *A*– al disminuir el ángulo de los triángulos y hacerse los lados *AD* y *AB* infinitesimales, la razón entre ellas será conservada en la proporción finita *A*d/*Ab*. La última razón será una razón de igualdad tanto para los segmentos *Ab* y *Ad* como para la curva *Acb*. Esta proporción conserva las proporciones de los segmentos infinitesimales *AB* y *AD* así como de la curva infinitesimal *ACB*. Todas estas líneas tendrán, en su última razón, una razón de igualdad.

Las rectas cuyas razones últimas son, según la lectura de Hegel, de igualdad serían el seno *DB*[878], el coseno *AB*[879], la tangente *AD*, el *sinus versus*[880] así como "todo lo que haga falta"[881]. Podríamos incluir dentro de este *was alles noch* el segmento de la curva que Hegel no llega a mencionar. Con ello, la afirmación de Hegel acertaría al afirmar la igualdad entre la curva *ACB*, la tangente *AD* y el coseno *AB*. Pero no es cierto que Newton iguale el seno o el *sinus versus* con estos tres segmentos. El seno tiene la función de poder disminuir indefinidamente junto con el ángulo del triángulo. Tanto en la figura finita como en la infinita este segmento tiende a cero. Por esta razón, no es un segmento que se conserva en la figura finita mientras que en la infinita desaparece, es decir, no es uno de los segmentos que, en la última razón, llegan a igualarse, sino el indicador del error infinitesimal que se comete en tal igualación.

[877] No hemos conseguido centrar la elipse mayor de tal forma que el centro de su eje mayor coincida con el centro del eje mayor del elipse menor. Nótese que esta condición es necesaria para que la similitud entre los arcos *ACB* y *Acb* se cumpla efectivamente.
[878] Lo que tambíen es denominado por Hegel "Ordenada" (*Ordinate*) (En *Enz*. § 270 Zus. (Hegel [IX] p. 99)).
[879] Lo que tambíen es denominado por Hegel "Abcisa" (*Abszisse*) (En *Enz*. § 270 Zus. (Hegel [IX] p. 99)).
[880] El *sinus versus* es el segmento paralelo a *DB* que con su misma longitud y dirección parte del punto *A*.
[881] Traducimos así la expresión alemana "was alles noch". Los términos que utiliza en la *Enzyklopädie* son algo más groseros. En ellas se llegará a afirmar que "de noche [a saber, en las últimas razones] todas las vacas son negras [a saber, todos los segmentos son iguales entre sí]" (Cf. *Enz*. § 270 Zus (Hegel [IX] p. 99)): "Bei Nacht sind alle Kühe schwarz". Frase ésta que, en el prólogo de la *Phänomenologie*, estaba dirigido contra Schelling. La "noche" era, en este caso, el absoluto.

Este desliz[882] no anula el interés de la crítica de Hegel al método de Newton. Hegel considera que con esta igualación de los distintos segmentos, se traiciona al concepto que subyace en el método de las primeras y últimas razones y que consiste en afirmar la permanencia de la razón originaria en el desvanecerse de las partes[883]. Es cierto que si este fuese el concepto del método de Newton, su aplicación no estaría siendo fiel a él. Así, la aplicación en el Lemma 7 parte de dos magnitudes variables $f(x)$ y $g(x)$[884] que tienen una cierta proporción *c* entre sí: $\frac{f(x)}{g(x)} = c$. Si resulta que al variar *x* las magnitudes $f(x)$ y $g(x)$ tienden a la igualdad, entonces su última razón será de igualdad: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$[885]. Es evidente que, tal y como afirma Hegel, en este razonamiento se pierde el valor *c* o exponente del cociente de diferencias finitas. De ahí que sea cierto que no se está conservando el exponente originario *c* –e.d., la relación originaria– en el cociente de los evanescentes[886].

Podemos ver la razón de esta perdidad en los triángulos que hemos utilizado para ilustrar la conservación de la razón infinita o infinitesimal en la finita. La perdida del valor *c* tiene que ver con el hecho de que la conservación de la razón se da entre los triángulos de cada momento de disminución del ángulo pero no entre los distintos pasos o momentos. Es decir, entre el instante

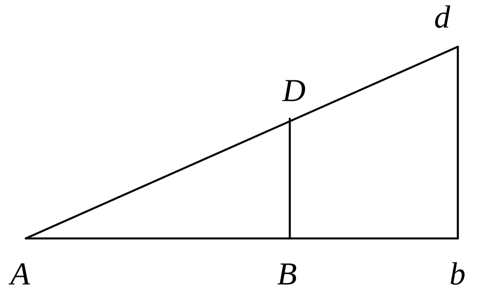
[882] Dado que nos hemos ocupado en el apartado 8.4 de la confusión en la que se embarca Hegel en su lectura del séptimo Lemma, nos limitaremos a explicar muy someramente las razones de tal confusión mediante esta nota. Resulta necesario remontarse al escrito de habilitación de Hegel –la *Dissertatio Philosophica de Orbitis Planetarum*– para comprender las razones por las cuales el filósofo suavo se empeña en afirmar una tesis según la cual Newton demostraría falsamente la igualdad del *sinus versus* y la tangente. La igualdad de estos dos segmentos obedece principalmente, según el Hegel de la *Dissertatio*, a una razón conceptual. Según la interpretación de Hegel, el *sinus versus* es el vector que representa la fuerza centrípeta de una órbita circular elíptica, mientras que la tangente representa la fuerza centrífuga. Para dar cuenta de los movimientos de los planetas en sus óribtras se afirmará, según Hegel, la igualdad de estas dos fuerzas. Con esta afirmación comienzan los problemas y la necesidad de recurrir a la igualdad entre estos dos vectores en un nivel infinitesimal. En contra de lo que hace el falso Newton de Hegel, esta contradicción no es superable mediante el recurso de las primera y últimas razones (cf. Hegel [1986] p. 13: "neque ad contradictionen istam tollendam confugi potest ad primam nascentium et ultimam evanescentium rationem, in qua ratio arcus, sinus versi et tangentis sit ratio aequalitatis, ita ut hae lineae pro se invicem usurpari possint"). La insuperabilidad de la contradicción se basa en la inviolabilidad de la diferencia cualitativa que existe entre estos dos vectores. Sobre la dificultad de dar cuenta del movimiento planetario sobre una elipse mediante la supuesta igualdad entre la fuerza centrífuga y la centrípeta Neuser se pregunta oportunamente lo siguiente: "Der Umlauf der Planeten auf einer elliptischen Bahn werde aus der Zu- und Abnahme von Zentrifugal- und Zentripetalkraft erklärt- was heißt dann eigentlich «Gleichheit»?" (en Hegel [1986] p. 10).

[883] Cf. Hegel [1978] p. 177: "Durch eine solche Verwechslung wird der zugrunde liegende Begriff, daß den veränderlichen Größen in ihrem Verschwinden das Verhältis, aus dem sie herkommen, erhalten bleibt, gänzlich zerstört".

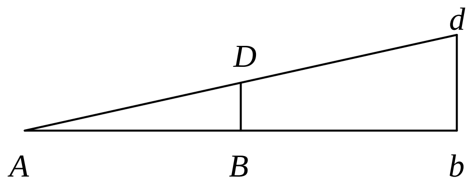
[884] Estas dos variables pueden ser la tangente, la curva o la diagonal.

[885] La variable independiente *x* puede ser tanto el ángulo del triángulo como el seno del triángulo *ABD*.

[886] El exponente originario es *c* mientras que el de los infinitesimales es 1.



y el instante



no hay conservación de las razones. La conservación de las razones tiene lugar solo dentro de cada instante, es decir, dentro de cada figura. Esta es la razón de que la idea que tiene Hegel del método de las primeras y últimas razones –idea según la cual las magnitudes variables conservan, al evanecerse, la proporción de la que provienen– se ajuste más al concepto del cociente de diferenciales que al método de las primeras y últimas razones. Este método es –en esto Hegel tiene razón– la noche en la que todas las diferencias se eliminan. La condición que tienen que cumplir las magnitudes para ello no es otra que la de evanecerse más rapidamente que su diferencia[887].

Todo esto no puede menos que recordar al lector un pasaje del *Parmenides* de Platón. En él[888] Platón presenta dos tiempos cuya diferencia es constante[889]. Cuando estos tiempos aumentan, la diferencia se hará, en relación a los nuevos tiempos, menor[890]. Esto significa que el mayor se ha hecho, en relación al más joven, más joven y el más joven, en relación al mayor, mayor. Lo que, sin embargo, nunca ocurrirá es que el más joven sea mayor que el mayor[891]. Si denominamos *a* uno de los tiempos –el tiempo menor– y *b* el otro tiempo –el

---

[887] Nótese que no decimos sólamente “evanecerse cuando su diferencia lo hace” sino que hablamos de evanecer más rapidamente. Esta mayor velocidad de evanescencia de la diferencia está garantizada por la disminución del ángulo del triángulo. Si sólo importara la simultánea evanescencia de las magnitudes y de la diferencia entre ellas, podría servir la figura de un triángulo idéntico para los sucesivos instantes en los que los lados se van disminuyendo sucesivamente. En este caso sí podríamos hablar de un método en el que “den veränderlichen Größen in ihrem Verschwinden das Verhältis, aus dem sie herkommen, erhalten bleibt” si bien pocos defenderían la rigurosidad de tal operación.

[888] Cf. ΠΑΡΜΕΝΙΔΕΣ 154d-155b.

[889] Por ejemplo, la edad de un niño y de un joven.

[890] Es decir, si el niño tenía tres años y el joven doce, la diferencia de nueve años es menor en, por ejemplo, cinco años tanto en relación al niño como en relación al joven: 9/3>9/8 y 9/12>9/17.

[891] La diferencia la marca la “γεγονὸς πρεσβύτερον” de la frase anterior frente a la “ἔστι πρεσβύτερον” de ahora.

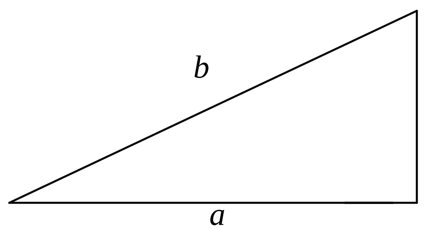
tiempo mayor– y si suponemos que la diferencia constante entre ellas es *c*, entonces, lo que Platón afirma puede expresarse así:

$$\forall n \in \mathrm{N}, \frac{a+c+n}{b+c+n} > 1$$

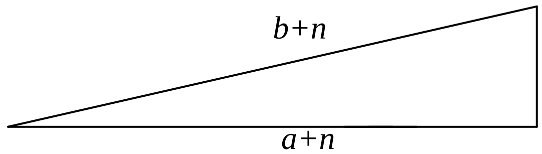
y, dado que Platón habla de un constante devenir el mayor más joven que el más joven, haciendo uso de las connotaciones de variabilidad de la variable que esto tiene tendremos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a+c+n}{b+c+n} = 1$$

Es decir, en el límite, la razón entre la edad del joven y la edad del mayor será una razón de igualdad. Haciendo uso de los triángulos que hemos utilizado para exponer la conservarción de la razón en el método de las primeras y últimas razones, los sucesivos triángulos de ahora serán tanto más aplanados cuanto mayores sean. Es decir, si suponemos que el tiempo menor es repesentado por el cateto mayor y el tiempo menor por la hipotenusa, el primer triángulo de la serie podría ser este:



Donde $a+c=b$. Un tiempo *n* más tarde la figura que representa la proporción entre los dos tiempos será, por ejemplo, esta otra:



Donde, como se había dicho, el triángulo se ha hecho más plano. Esta disminución del ángulo del triángulo es la que refleja el fenómeno que en Platón consistía en que el mayor se había vuelto más joven y el joven más mayor. En el límite, la hipotenusa del triángulo se irá aproximando cada vez más al cateto mayor con lo que, expresado con Newton, la razón entre estos segmentos será de igualdad. Con ello, vemos que el argumento de Newton es análogo al de Platón[892]. La diferencia entre ambas consiste en que mientras que el argumento de Platón se mueve dentro de lo infinitamente grande, el de Newton lo hará a nivel de lo infinitamente pequeño.

Las dificultades que ve Hegel[893] en la igualación de la diagonal, la tangente y la curva tienen que ver con con que, en tal igualación, desaparecen las relaciones cualitativas que se dan entre estos dos distintos segmentos. Hegel considera que la igualdad –y la posterior intercambiabilidad– entre estos tres segmentos no tiene nada que ver con el uso de la tangente para calcular la pendiente de una curva en un –por así decir– punto. Si bien es verdad que en los dos casos se recurre a los infinitesimales para realizar una operación de substitución de un segmento por otro, en el primer caso, como decíamos, el intercambio es injustificado mientras que en el segundo caso el intercambio es justificado. Ello se debe a que –a diferencia de lo que ocurre en la igualación entre la diagonal, la tangente y la curva– en la igualación entre la curva y la tangente la relación esencial (*wesentliche Verhältnis*) que comparten las dos es conservada mientras que esto no es así en la diagonal, la tangente y la curva. Esta relación esencial es la expresada por el ángulo de inclinación[894]. La diferencia aparentemente cualitativa consistente en que uno de los segmentos es una curva mientras que la otra es una recta, no supone un problema para Hegel. Según Hegel, esta diferencia cualitativa es reductible, en el fondo, a una diferencia cuantitativa. La diferencia entre una recta y una curva es una diferencia de más o de menos. Para fundamentar esta afirmación, Hegel parte de la siguiente definición de la línea recta[895]: una recta es aquel segmento que, con el menor recorrido posible, une dos puntos. La diferencia, aparentemente cualitativa, entre la recta y la curva se reduce así a una cuestión meramente cuantitativa[896]. Con ello Hegel pretende legitimar el uso que se hace de la tangente en el cálculo a su vez que desaprobar las igualdades decretadas por Newton mediante su metodo de últimas razones.

4.2.4 Lazare Carnot

Un acercamiento a la obra de divulgación sobre el calculo infinitesimal titulada *Réflexions sur le Métaphysique du calcul Infinitésimal* del matemático, político y físico francés Lazare Carnot nos permitirá enfrentarnos con dos problemas que, de manera más inmediata, nos acechaban desde el parágrafo anterior. El primero de estos dos problemas podría resumirse así: si, por una lado, las cantidades infinitesimales han sido definidas como

[892] No es, por ello, sorprendente que mientras que Newton habla de magnitudes que “tienden a” o “se aproximan a”, es decir, mientras que Newton habla de variables que varían, Platón, por su parte, hable de un “llegar a ser...” (γίγνομαι) de una “variable”. Del mismo modo en que en Platón el más joven sólo puede llegar a ser mayor que el mayor pero nunca ser mayor –ni, añadiríamos, igual que el mayor–, las últimas razones de Newton no son razones de cantidades últimas sino razones últimas de magnitudes en devenir. Tanto la afirmación de Newton como la de Platón son verdaderas cuando los polos son considerados en devenir.
[893] Cf. Hegel [1978] pp. 177-178 y Hegel [1985] pp. 269-270.
[894] Igual, tanto en la curva como en la tangente.
[895] Esta definición vuelve a aparecer en el §256 de la *Enziklopädie* dentro de debate con Kant sobre la analiticidad de la definición (cf. *KrV* B16).
[896] Cf. Hegel [1978] p. 177: “als unendlich behalten gerade Linie und Kurve kein qualitatives Verhältnis mehr gegeneinander, sondern geht jene vielmehr in diese über”.

aquellas que son menores que cualquier magnitud dada y si, por el otro lado, durante las operaciones del cálculo la obtención del resultado correcto suele exigir la omisión de estas magnitudes, entonces, ¿cómo no pensar que el cálculo es una herramienta, por muy precisa que sea, esencialmente afectada por un error infinitesimal? La solución absolutista y fácil, aquella que afirma que los infinitesimales no son más que ceros absolutos y, por ello, no necesitamos preocuparnos del error que comentemos al omitirnos, no puede satisfacernos debido a los problemas que ello implica. Ni siquiera Euler, alguien que, supuestamente, terminó igualando los infinitesimales a cero, sostendría una postura así. Hemos visto que, para este autor, es distinto un cero que aparecer en una relación aritmética que un cero que aparece en una relación geométrica. Al distinguir estos dos aspectos, veímos que los infinitesimales no eran absolutamente ceros para Euler.

El segundo problema que se nos presentaba tenía que ver con la ley de la continuidad que Hegel, erróneamente, proyectaba en los Lemmas de la primera sección de los *Principia* de Newton. Veíamos que las demostraciones por primeras y últimas razones no tenían que ver con una conservación de la proporción originaria en una escala finita en el momento de evanecer las magnitudes, sino que la proporción originaria evanecía cuando así lo hacían las magnitudes evanescentes. El método de las primeras y últimas razones de Newton no era capaz de explicar cocientes de diferenciales en los que la razón última no era de igualdad[897]. El problema, pues, persistía y no era otro que el de dar con una formulación análoga del método de las primeras y últimas razones que fuese válida para razones últimas distintas a la igualdad. Esta nueva formulación podría interpretarse como una ampliación del método de las primeras y últimas razones y vendría a responder a la siguiente pregunta: ¿cómo pueden tener dos magnitudes evanescentes no simplemente, como en Newton, una razón de igualdad, sino, en general, una razón?

En los siguientes dos apartados tendremos ocasión de ver que las dos preguntas están intimamente entrelazadas. Aunque el propio Carnot no alcanzó a ver esta trabazón, sí que llegó a tratar o, al menos, mencionar los dos problemas. El primer problema será resuelto mediante un interpretación del cálculo infinitesimal que recibirá las críticas de Hegel. La solución al segundo problema ofrecida por Carnot será, por el contrario, aprobado por Hegel. Pero veamos por qué.

4.2.4.1 El cálculo infinitesimal como compensación de errores

Carnot compartirá con Hegel la idea que considera el cálculo infinitesimal una herramienta que obtiene resultados exactos y no aproximativos. Según Hegel, la matemática no trata de la mayor o menor verosimilitud de sus resultados sino de la verdad de los mismos[898]. Carnot, por su parte, fundamente la afirmación de la exactitud de los resultados obtenidos por el calculo infinitesimal mostrando que éstos coinciden con los obtenidos mediante procedimientos geométricos clásicos. La diferencia entre uno y otro consiste en que, si para Hegel el procedimiento utilizado tiene que ser, a su vez, riguroso[899], Carnot acepta el

---

[897] Veremos si esto tiene que ver con el método mismo o con las aplicaciónes que hace Newton de él.
[898] Cf. Hegel [1978] p. 155 y Hegel [1985] p. 238: "Allein bei dem, was unter mathematischer Bestimmtheit zu verstehen ist, fällt aller Unterschied einer größeren oder geringeren Genauigkeit gäzlich hinweg, wie in der Philosophie nicht von größerer oder geringerer Wahrscheinlichkeit, sondern von der Wahrheit allein die Rede sein kann".
[899] Cf. Hegel [1978] p. 169 y Hegel [1985] p. 256: "ein absolut genaues Resultat nicht aus einem Verfahren herkommen könne, das ungenau wäre".

caracter aproximativo de tal procedimiento[900]. Para Carnot, el cálculo infinitesimal utiliza procedimientos de aproximación sin que llegue a ser por eso un método de aproximación[901].

Una respuesta fácil a la pregunta de cómo es posible que un método aproximativo dé lugar a resultados exactos consiste en afirmar que el error es infinitesimal. Hay dos razones por las cuales Carnot no va a decidir seguir esta via. La primera razón se basa en que, hacer algo así supone para Carnot igualar a cero los infinitesimales que forman parte de cocientes de aproximación. Esto implicaría encontrarse con expresiónes absurdas como 0/0 que Carnot precisamente quiere evitar[902]. La segunda razón se basa en un extraño corolario al *Principe Fondamental* de sus *Reflexions*. Según este Principio, dos magnitudes no arbitrarias –lo que con Hegel podríamos denominar "dos Cuanta" – tienen como diferencia una magnitud no arbitraria[903]. Lo que afirma el primer corolario a este Principio es que si creemos que entre dos magnitudes hay una diferencia infinitesimal entonces creemos falsamente[904]. Y esto no porque no puede haber ningún elemento infinitesimal que distinga a las dos magnitudes, sino por que la diferencia infinitesimal no es ninguna diferencia. Si substituimos el término de "diferencia" por el de "error" tendremos que Carnot, si siguiese por esta via, tendría que concluir que en el cálculo infinitesimal no se comete ningún error cuando, por ejemplo, se hace uso de un polígon de infinitos lados como aproximación de un círculo. Y, frente a esto, sabemos que Carnot aceptará que el método del cálculo es aproximativo, es decir, parte de un error.

Siendo el procedimiento del cálculo infinitesimal aproximativo, los resultados sólo podrán ser exactos si en algún momento del procedimiento tal aproximación pierde el carácter de tal. Es decir, si partimos de una expresión que, debido a la aproximación, tiene un error λ en relación a la expresión verdadera, entonces no sólo será legítima su posterior omisión, sino que esta omisión permitirá obtener un resultado rigurosamente exacto. Veamos esto haciendo uso de un ejemplo del propio Carnot.

Sea dada la figura siguiente:

---

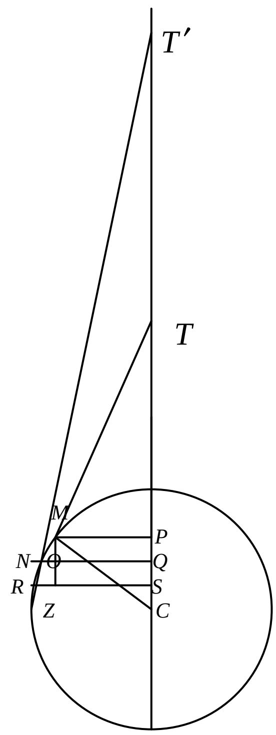
[900] Cf. Carnot [1813] p. 10: "car il suit des exemples rapportés, que ce qui n'avait été regardé en premier lieu que comme une simple méthode d'approximation, conduit au moins en certains cas, à des résultats parfaitement exacts".

[901] Cf. Carnot [1813] p. 42.

[902] Cf. Carnot [1813] p. 41. Recordemos que el error infinitesimal en la que derivaba la interpretación infinitesimalista era evitada por Euler haciendo los ceros estricamente iguales a cero: "nam si ea infinite parva, quae in calculo negliguntur, non sunt nihil, inde necesario error isque eo maior, quo magis ea coacervantur, resultare debet" (en Euler [1755] pp. LIX-LX).

[903] Es decir, si tenemos dos cantidades que no varían su diferencia tampoco variará. Cf. Carnot [1813] p. 30.

[904] Nótese que no se afirma que dos magnitudes no arbitrarias con diferencia arbitraia son entre sí iguales, sino que una diferencia infinitesimal no es ninguna diferencia. Cf. Carnot [1813] p. 31: "Deux quantités non-arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être supposée aussi petit qu'on le veut".



En él, suponemos que queremos obtener el valor de la subtangente *TP* para la tangente en el punto *M*. Para ello partimos de la suposición –que Carnot caracteriza de errónea– según el cual el círculo es un polígono de infinitos lados infinitesimales. Suponemos así que uno de los lados del polígono es la hipotenusa *RM* del triángulo compuesto por los catetos *RZ* y *ZM*. El error que cometemos nos permitirá obtener una subtangente erronea $T'P$ mediante la prolongación de la hipotenusa *RM*. Si suponemos que esta subtangente es la correcta tendremos:

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{PM} \qquad [6]$$

Por otra parte, si denominamos el radio del círculo como *a*, sabemos que la expresión para cualquier punto del círculo será

$$y^2 = 2ax - x^2$$

luego, si denominamos $DP=x$ y $MP=y$, para el punto R tendremos;

$$(y + RZ)^2 = 2a(x + MZ) - (x + MZ)^2$$

es decir,

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ} \qquad [7]$$

Ahora, sólo nos falta hacer un nuevo error con el que compensar el primero. Así, si el primer error se cometía cuando, al calcular la pendiente de la recta tangente en el punto *M*, se usaba el triángulo *RZM*, ahora, calcularemos la pendiente de este triángulo suponiendo que estamos en *M* y no en *P*. Para esto, no tenemos más que igualar a cero los segmentos infinitesimales *RZ* y *MZ* de la expresión [7]. Con ello tendremos;

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a - x}$$

Por último, igualando las expresiones [6] y [7] obtendremos el resultado correcto:

$$\frac{TP}{PM} = \frac{y}{a - x}$$

es decir,

$$TP = \frac{y^2}{a - x} \qquad [8]$$

La compensación de errores ha sido todo un éxito, este resultado es el mismo que se hubiese obtenido si hiciésemos uso de la propiedad de similitud de los triángulos *CPM* y *MPT*. En efecto, esto último nos daría:

$$\frac{CP}{MP} = \frac{MP}{TP}$$

luego,

$$TP = \frac{MP^2}{CP} = \frac{y^2}{a - x}$$

que es el mismo resultado que [8], obtenido mediante la compensación de errores (*compensation des erreurs*).

Esta interpretación del cálculo será defendidad por el propio Lagrange en su *Théorie des fonctions analytiques*. En él[905] Lagrange afirma que la interpretación de la compensación de errores es la que expresa la verdadera matefísica del cálculo (*véritable métaphysique de ce calcul*). El problema para Lagrange consiste en que, por muy verdadera que sea, la interpretación no deja de ser una metafísica. Ello se debe a que esta lectura hace uso de las magnitudes infinitesimales o menores que cualquier magnitud dada. Estos elementos son los que Lagrange querrá precisamente evitar.

Carnot no tendrá ningún problema en aceptar tales entidades. Su libro puede considerarse incluso como una defensa de la postura infinitesimalista de Leibniz[906]. Estos infinitesimales son unas herramientas auxiliares[907] cuya utilidad[908] es perfectamente verificable cuando contrastamos, tal y como hemos visto en el ejemplo, los resultados obtenidos con los de la geometría euclídea.

De manera harto interesante, la forma en el que se trabaja con tales herramientas infinitesimales es análoga a como trabaja el físico cuando, por así decir, *aplica* su Principio de desplazamientos virtuales. Según Carnot[909], el cálculo infinitesimal tiene como objetivo calcular las relaciones que se dan entre los elementos de un sistema. Este sistema equivale al sistema en equilibrio del físico de cuyas fuerzas[910] se pretende dar cuenta. En vez de calcular las relaciones de este sistema estático[911], el análisis infinitesimal –la mecánica analítica– calcula el estado del sistema en un momento que se aleja mínimamente del de equilibrio. Este nuevo sistema –denominado por Carnot *système auxiliaire*– es construido para calcular las relaciones del primer sistema. Nos permitimos hacer un error calculando la tangente haciendo uso del lado del un polígono –en la matemática– o cálculando las relaciones estáticas desde las dinámicas –en la física–, a condición de hacer que estas desviaciones –el despazamiento virtual de la mecáncia analítica– sean evanescentes. Es más, estas desviaciones han de ser compensadas por otro error que nos permitirá volver al sistema originario. Los resultados así obtenidos serán rigurosamente exactos[912].

---

[905] Cf. Lagrange [1797] p. 3. Ya en un texto titulado *Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (cf. Lagrange [1877] pp. 597-599), el joven Lagrange se mostrará partidario de la interpretación compensacionista del cálculo infinitesimal en la versión dada por Leibniz: “mais l’erreur est détruite par une autre erreur qu’on introduit dans le calcul [...] C’est en quoi consiste, ce me semble, la métaphysique du calcul des infiniment petits, tel que l’a donnée M. Leibniz”. Será la versión del cálculo de Newton la que Lagrange considerará impecable.

[906] Cf. Carnot [1813] p. 36 sig.

[907] Cf. Carnot [1813] p. 21.

[908] Cf. Carnot [1813] p. 10.

[909] Hacemos uso de términos como “equilibrio” o “dinámica” que, si bien no están en Carnot, ayudan a trazar la analogía que estamos proponiendo entre la física clásica y la moderna, por un lado, y el cálculo y la geometría euclídea, por el otro. Cf. Carnot [1813] pp. 28 y 29.

[910] O, cabría mejor decir, las relaciones entre ellas, ya que directamente no se pueden medir las fuerzas.

[911] Tal y como harían un físico como Arquímedes o un geómetra como Euclides.

[912] Los dos errores con los que el físico analítico logra el mismo resultado que alcanzado por Arquímedes son; 1) suponer que la proporción entre los pesos y los desplazamientos se conserva en el sistema auxiliar si estos desplazamientos son infinitesimales y 2) suponer que existe una proporción entre los brazos de la balanza romana y estos mismos desplazamientos. Vemos que el “error” que subyace en el fondo de estos dos errores es el de considerar un segmento circular como una recta infinitesimal. Y es que, el desplazamiento lateral de los brazos de la balanza siempre será un segmento de círculo y no una recta. Se denominamos *A* y *B* los pesos de la balanza, *a* y *b* los respectivos brazos y δ_A y δ_B los respectivos desplazamientos virtuales, el primer error nos dará: $A\delta_A + B\delta_B = 0$, es decir, $\frac{A}{B} = -\frac{\delta_B}{\delta_A}$. Por otro lado, el segundo error nos dará, $\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{a}{b}$. Con ello, ignorando el signo negativo que sólo tiene sentido en la perspectiva dinámica, el resultado será: $\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$. Este

La distinción entre la aproximación clásica y la infinitesimal se fundamenta, en última instancia, en la distinción entre las pruebas por reducción al absurdo y las pruebas basadas en las magntidues infinitesimales[913]. Ninguna de estas dos aproximaciones es ignorada por Hegel. La distinción entre las dos consiste en que la primera tiene que ver con operaciones del entendimiento mientras que la segunda se mueve dentro del ámbito de la razón. Hasta aquí, la distinción de Carnot es perfectamente asumible bajo la perspectiva de Hegel. No obstante, frente a la interpretación de Carnot, Hegel no considerará aceptable decir que el cálculo hace uso de presuposiciones erróneas que luego se compensan. El procedimiento del cálculo, del mismo modo que el resultado por él obtenido, son estrictamente rigurosos para Hegel.

El error de la interpretación de Carnot tiene su origen en una representación de los infinitesimales que los considera unos incrementos que se añaden a las variables. Esta interpretación supone que los infinitesimales son unos Cuantos que tienen subsistencia fuera del cociente de diferenciales. Sabemos ya que Hegel criticará esta representación *naiv* y espontánea del infinitesimal. Lo curioso es que parte de la formulación del cálculo del mismo Carnot será afín a la lectura que propone Hegel. Piénsese, por ejemplo, en la definición del cálculo que ofrece Carnot en el que considera que la tarea del mismo es la de encontrar las relaciones que se dan entre los elementos de un sistema[914]. La definición del infinitesimal que toma de Leibniz y que, como hemos visto, coincide con la de Newton, encaja en la definición del infinitesimal dada por Hegel en el que se hace uso del denominado infinito malo del proceso al infinito. Por último, no menos importante resulta la coincidencia entre Hegel y Carnot[915] en relación a la comprensión del cociente de diferenciales[916]: una proporción entre magnitudes evanescentes en el que el valor del cociente no llega, sin embargo, a desaparecer.

Esta proximidad entre las tesis de Carnot y las de Hegel se esfuma en cuanto aparecen en Carnot consideraciones de raigambre cuantitativa en relación al concepto del infinitesimal. Así, Carnot establece una alternativa propia de una visión cuantitativa en la que el infinitesimal tiene que ser un algo cuantitativo o una nada cuantitativa[917]. La segunda de las alternativas conduce a expresiones sin sentido –como 0/0– que es necesario desechar. La otra de las dos alternativas asigna un Cuanto –eso si, indeterminado– al infinitesimal y de ahí que tenga que concluir o bien que el cálculo da como resultado aproximaciones –es decir, resultados erróneos– o bien que hay en juego más de un error y que estos errores se compensan entre sí. Es esta última versión la que defenderá Carnot.

Y, sin embargo, la solución hegeliana del problema que se planteará Carnot, problema que consistía en que el infinitesimal tenía que ser algo o nada, es ya formulado por el mismo Carnot. El cálculo infinitesimal es un cálculo sobre las relaciones que existen entre los elementos de un sistema y no sobre los valores, por así decir, absolutos de estos elementos. De este modo, cuando en el ejemplo de la tangente de Carnot, en vez del punto *M*, se hace uso

---

resultado coincide con la perspectiva estática del mismo modo que el resultado obtenido con el cálculo coincidía con el que se obtenía haciendo uso de la similitud entre los triángulos *CPM* y *MPT*.

[913] Algo que ya ha sido analizado en la primera parte del capítulo 8.

[914] Cf. Carnot [1813] p. 27: "L'objet de tour calcul se réduit à trouver les relations qui existent entre certaines quantités proposées" y p. 20: "Les différences des quantités qui se correspondent entre tous ces systèmes, peuvent donc être supposées aussi petiter qu'on le veut, sans rien changer aux quantités qui composent le premier, et qui son celles dont on cherche la relation".

[915] Coincidencia que tiene su origen en Newton.

[916] En lo que se refiere a la versión de Carnot cf. Carnot [1813] p. 12. "il est visible que le point T' s'approchant en même temps de plus en plus du point *T*, et qu'on pourra par conséquent rendre la ligne $T'T$ aussi petite qu'on voudra, sans que la proportion établie ci-dessus cesse d'avoir lieu".

[917] Cf. Carnot [1813] p. 41.

del punto *R* infinitesimalmente próximo a él, no se está por ello cometiendo un error. El papel del cociente de diferenciales no consiste en calcular las cordenadas infinitesimales de un punto *R* en relación a punto *M*, sino en expresar una cociente. Si para ello –es decir, si para calcular lo que en la representación geométrica se denomina la tangente– hacemos uso, dicho algo toscamente, de un lado infinitesimal de un polígono de infinitos lados, entonces, la relación entre el cociente infinitesimal y el cociente, digamos, real y finito, no será aproximativa, sino absolutamente exacta. La razón de ello hay que buscarla en la denominada ley de la continuidad, objeto del siguiente apartado.

4.2.4.2 La ley de la continuidad

Carnot mismo hará uso[918] de la ley de la continuidad[919] en sus *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* para explicar, no sólo, la existencia de la proporción entre dos magnitudes evanescentes sino también la existencia de una proporción en particular. Es decir, la ley de la continuidad, en la versión de Carnot, no explica únicamente el que unas magnitudes evanescentes tengan una proporción y no, más bien, ninguna, sino el que esta proporción no sea arbitraria. Gracias a esta ley, la proporción de un cociente de diferencias no se pierde cuando evanecen el numerador y el denominador y, además de ello, será uno en concreto. Para Carnot, el que la proporción sea uno en particular y no cualquiera significa que el numerador y el denominador no son ceros absolutos[920].

Hegel celebrará en esta ley la relevancia que juega en él el concepto de relación. La propiedad de continuidad no se predica de las magnitudes evanescentes de la relación, sino de la misma relación[921]. La continuidad de la proporción entre magnitudes evanescentes significa así que en el momento de evanescencia de los cocientes la relación entre los mismos no desaparece y es igual a la proporción de la que provenían[922]. Debido a que los dos tienen la misma procedencia (*Herkunft*), el cociente de diferencias no es arbitrario o externo a su cociente de diferenciales. La comunidad de una procedencia es garantizada por una ley o un concepto que unifica a tal comunidad. El problema al que viene a responder la ley de la continuidad consiste en que la unión tiene lugar entre una comunidad de elementos finitos y una comunidad de elementos infinitesimales. Se trata de dos comunidades que, para decirlo con Leibniz, no son homogéneas pero sí homógonas[923].

Aunque ni Carnot ni Hegel lo digan, la ley de continuidad es la ley con la que fundamenta Leibniz el paso al límite del –entre otras razones o cocientes– cociente diferencial. La ley de continuidad será utilizada por primera vez por Leibniz para señalar la

---

918 Cf. Carnot [1813] p. 183.

919 Para Lagrange, el salto desde las diferencias finitas a las diferencias infinitesimales viola esta ley de continuidad y, por ello, hay que dejar de lado el cálculo diferencia y fundar el calculo de derivadas. Haciendo uso de la terminología de Leibniz, podríamos decir que para Lagrange la ley de la continuidad funciona únicamente dentro de lo homogéneo, mientras que para Leibniz lo hace también dentro de lo homógono. Cf. al respecto Lagrange [1806] p. 293: "le passage du fini à l'infini exige toujours une espèce de saut, plus ou moins forcé, qui rompt la loi de continuité, et change la forme des fonctions".

920 Cf. Carnot [1813] p. 184: "c'est [a saber, el que la proporción entre los cocientes no sea arbitraria] ce qui distingue les quantités que je nomme évanouissantes de celles qui sont simplement nulles".

921 Cf. Hegel [1985] p. 254: "Diese Vorstellung drückt die wahre Natur der Sache aus, insofern nicht die Stetigkeit des Quantums verstanden wird […] ist das Verhältnis das Stetige".

922 Cf. el texto ya citado de Hegel: "vermöge des Gesetzes der Stetigkeit die verschwindenden Größen noch das Verhältnis, aus dem sie herkommen, ehe sie verschwinden behalten" (en Hegel [1985] p. 254).

923 Para el concepto de homógono en Leibniz cf. Leibniz [1863] pp. 282 y 287.

inconsistencia entre la primera y la segunda ley del choque de Descartes[924]. Dicho brevemente, la desigualdad entre los presupuestos de la primera y la segunda ley se basa en una diferencia continua –el mayor o menor peso de un cuerpo en relación a otro– pero tiene como resultado una diferencia no continua –en un caso los cuerpos terminan expulsados en direcciones contrarias, en el otro la dirección en la que se moverán los dos cuerpos después del choque coincide con la dirección del cuerpo más pesado antes del choque. Esto choca contra la ley de la continuidad que es formulada en los siguientes términos por Leibniz:

Lorsque la difference de deux cas peut estre diminuée au dessous de toute grandeur donnée in datis ou dans ce qui est posé, il faut qu'elle se puisse trouver aussi diminuée au dessous de toute grandeur donnée in quasitis ou dans ce qui en resulte[925]

Un ejemplo geométrico en el que se hace uso de la ley de la continuidad es el caso de la parábola cuando se la considera como un caso límite de la elipse –la parábola es la elipse que tiene uno de sus focos en el infinito. Con esta unificación se aplican las leyes que sirven para la última en la primera. Del mismo modo, Leibniz reivindica una única ley para los choques entre dos cuerpos con pesos iguales y desiguales. El caso anormal –la parabola, en un caso, los cuerpos con pesos iguales en el otro– debe de poder ser considerado como un caso extremo o límite de la regla normal. Si, bajo una ley, la aproximación a un límite dado es continua, entonces, el límite debe de ser considerado como un caso más –el último– de la ley de aproximación. Es decir, tal y como lo expresará Leibniz en una carta dirigida a Christian Wolff, en el continuo podemos considerar el límite externo como interno:

ut in continuis extremum exclusivum tractari possit ut inclusivum[926]

De este modo, el punto es un caso de la línea[927], el reposo un caso de movimiento[928], el instante un caso del tiempo[929] y, en general[930], la igualdad un caso de desigualdad[931]. La ley de la continuidad afirma así la homogonia para magnitudes heterogéneas: el tiempo y el instante, el punto y la recta, el reposo y el movimiento, son heterogéneas pero, al mismo tiempo, homógonas entre sí. La garantía y la expresión de esta homogonía es la subsunción de todos los casos bajo una misma ley.

En el caso del cociente de diferenciales, la ley de continuidad garantiza que el cociente de diferencias infinitesimales sea un caso –una continuación– del cociente de las diferencias finitas y que, por ello, no sólo el coeficiente de la primera no evanezca, sino que sea una

---

924 Cf. Leibniz [1887] p. 53.
925 Cf. Leibniz [1887] p. 52.
926 Cf. Leibniz [1858] p. 385.
927 Cf. Leibniz [1858] p. 385.
928 Cf. Leibniz [1858] p. 385.
929 Cf. Leibniz [1863] p. 20.
930 Que estos tres ejemplos son un caso de la ley general "la igualdad es un caso extremo de la desigualdad", es algo que afirmamos nosotros, pero no, que nosotros sepamos, Leibniz mismo.
931 Cf. Leibniz [1859] p. 105. Cf. al respecto Cassirer [1998] p. 176: "Nach moderner mathematischer Bezeichnung (Georg Cantor) heißen zwei Größen gleich, wenn sie durch »äquivalente Fundamentalreihen« definiert sind, d.h. durch Fundamentalreihen, deren Differenz eine gegen 0 konvergierende Reihe ist. Hier wird also in aller Strenge die Gleichheit als verschwindende Ungleichheit aufgefaßt". Marc Parmentier hablará de una definición dinámica de la igualdad completamente inaudita (en Leibniz [1989] p. 319).

continuación del coeficiente –el exponente de Hegel– del cociente de diferencias finitas. La versión fuerte[932] de la ley de la continuidad no sólo afirma la continuación de algo en otro algo que es heterogéneo a él, sino que afirmará la continuidad de los efectos en el caso en el que se dé la continuidad de las causas. Traducido al lenguaje del análisis, podemos aplicar la ley de continuidad en el cociente de diferenciales, considerando, para ello, a los diferenciales que se aproximan continuamente a cero como las causas, y al cociente de diferenciales como el efecto al que el cociente de diferencias finitas se aproxima continuamente. De este modo, la ley de la continuidad asegurará que el caso límite –caso constituido por el cociente de diferenciales– es un ejemplar más de los casos de aproximación. Es decir, si lo dado –es decir, las diferencias finitas Δx y Δy – esta ordenado –es decir, si se aproximan continuamente a cero–, entonces lo buscado también lo estará –el cociente ${}^{\Delta x}\!/_{\Delta y}$ se aproximará también a ${}^{dx}\!/_{dy}$ [933]:

datis ordinatis quaesita sunt ordinata[934]

Si las propiedades de la parábola son calculables cuando es considerada como un caso de la elipse, si las leyes de choque para los cuerpos con masa y velocidades iguales deben de poder ser deducibles desde las leyes para cuerpos con masa y velocidades desiguales, entonces, los valores del cociente de diferenciales y el cociente de diferencias deben de poder ser expresables mediante una misma ley. Esta ley general es la ley para el coeficiente de diferencias finitas en la que, en el límite, está incluido la ley para el cociente de diferenciales[935].

Así, podemos obtener la expresión para el cociente de diferencias para la función $y = f(x) = x^2$ substituyendo y por Δy y x por Δx :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

lo que nos dará,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x \qquad [9]$$

---

[932] Es decir, la versión de la *Lettre de M.L. sur un principe general utile à l'explication des loix de la nature par la consideration de la sagesse divine, pour servir de replique à la reponse du R.P.D. Malebranche* que hemos reproducido un poco más arriba y que se encuentra en Leibniz [1887] p. 52.

[933] Cf. Grabiner [2005] p. 89: "It is by virtue of the 'law of continuity', wrote Lacroix, 'that the increments, though evanescent, still preserve the ratio to which they have gradually approached before they vanish'. Thus continuity seemed to be related in some way to differentiability".

[934] Cf. Leibniz [1887] p. 52. Cf. también Leibniz [1846] p. 40 para una formulación acaso más acertada: "Propositio quocunque transitu continuo in aliquem terminum desinente, liceat ratiocinationem communem instituere, qua ultimus terminus comprehendatur".

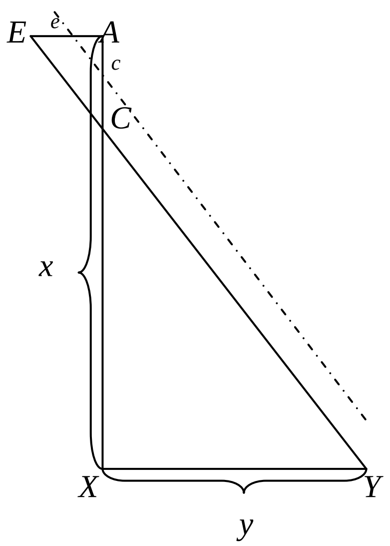
[935] Cf. Leibniz [1846] p. 40: "Exempli gr. si duo sint *A* et *B*, illud majus, hoc minus, et manente *B*, ponatur continue diminui *A*, donec aequalia fiant *A* et *B*, licebit rationcinatione communi comlecti tam casus priores, quibus *A* erat major, quam casum ultimum quo evanescente differentia *A* et *B* fiunt aequales". Nótese que hemos denominado "ley general" a aquello Leibniz llama "ratiocinatio communis".

Esta función[936] nos proporcionará el valor de la pendiente de las rectas que se aproximan sucesivamente a la tangente[937] en el punto *x*. El caso límite de la tangente, caso que está recogido en la expresión [9] es aquél en el que las diferencias desaparecen aunque su razón sea una en particular:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad [10]$$

De este modo, en el punto $(x_0, y_0) = (2{,}4)$, la ley de aproximación [9] nos proporcionará una serie que se aproximará continuamente al valor del cociente de diferenciales ${dy}/{dx} = 4$ cuando las diferencias, a su vez, se aproximen continuamente a cero.

Vistas las cosas desde Hegel, sabemos ya que resulta importante distinguir entre la continuidad de las diferencias finitas a cero y la continuidad del valor de la expresión [9] al valor de la expresión [10]. Para Hegel, la ley de continuidad se aplica al cociente de diferenciales pero no a sus componentes. La continua aproximación a cero de los infinitesimales es condición para la aplicación de la "ley de la continuidad" sobre le cociente diferencial. Los componentes o diferencias finitas nunca alcanzan el valor al que tienden, el valor cero. Esta tesis que, como hemos visto, tanta relevancia tiene en el concepto de diferencial de Hegel, puede también encontrarse en Leibniz. Así ocurre, por ejemplo, en un breve texto[938] datado en 1702 en el que Leibniz parte de la siguiente figura:



[11]

donde,

XY=y
AX=x

[936] Leibniz denominará a la expresión [9] "regula generalis, exprimens rationem differentiae ordinatraum ad diferentiam abscissarum" (en Leibniz [1846] p. 44).
[937] La tangente, recordemos, es el equivalente a la parábola cuando lo continuamente dado son las secantes.

[938] Cf. Leibniz [1859] pp. 104-106.

$EA=e$
$AC=c$

Debido a la similitud entre los triángulos[939] *EAC* y *CXY*, se cumplirá la proporción siguiente:

$$\frac{x-c}{y}=\frac{c}{e}$$

Si desplazamos la recta *EY* hacia el punto *A* la proporción seguirá siendo válida si bien los lados del triángulo *EAC* se volverán cada vez menores. Lo que nunca ocurrirá, dice Leibniz, es que las rectas *e* y *c* se vuelvan absolutamente iguales a cero. Si fuese tal el caso, la relación entre las rectas *e* y *c* sería de igualdad[940] y no uno cualquiera –en contra de lo que se había supuesto–:

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{e}=\frac{0}{0}=1$$

Los lados del cociente no son, para Leibniz, ceros absolutos sino ceros relativos[941]. La nulidad les viene a los infinitesimales de su relación o comparación[942] con las variables finitas *x* e *y*. Que la nulidad de los lados sólo tenga lugar en la relación con *x* e *y* significa que tal nulidad tiene lugar fuera de su relación mutua. Esta tesis será afirmada por Hegel[943]. La diferencia consiste en que cuando Hegel habla de relación (*Verhältnis*) del diferencial se referirá a la relación de un diferencial con otro diferencial, con lo que la tesis de Leibniz se expresará en Hegel diciendo que los lados son absolutamente, es decir, fuera de su relación, iguales a cero[944].

Esta tesis leibniziana según el cual el infinitesimal es cero fuera de la relación del cociente de diferenciales será utilizada por Leibniz para deducir la derivada del producto de dos variables: si *ay=xv* entonces *d(ay)=ady=xdv+vdx*. Para demostrar esto, Leibniz parte de la distinción entre las expresiones como *dx*, *dy*, *dv* que pueden evanecer si se encuentran fuera de un cociente y las expresiones como *(d)x*, *(d)y*, *(d)v* que tienen significado únicamente dentro de una relación y que son los equivalentes a nuestros diferenciales. De ahí que la derivada del producto entre dos variables sea expresado por Leibniz así: *a(d)y=x(d)v+v(d)x*. Pero veamos cómo tiene lugar la demostración[945]. Partimos de la diferencia entre los productos:

---

939 Triángulos que no tienen que ser necesariamente isósceles.

940 Hoy en día se afirmaría, más bien, que la expresión 0/0 es indeterminada. La igualdad 0/0=1 sólo se cumple para casos muy especificos como $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$ o $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

941 Es decir, haciendo uso de las expresiones que utiliza Grandi en una carta dirigida a Leibniz el 6 de Septiembre de 1713, los infinitesimales no son “nihil absolutum” sino “nihil respectivum” (en Leibniz [1859] p. 216). Cf. al respecto Cassirer [1998] p. 161.

942 Cf. Leibniz [1859] p. 105: “Donc *c* et *e* dans ce calcul d’Algebre ne sont prises pour des riens que comparativement par rapport à *x* et *y*”.

943 Cf. Hegel [1985] p. 241: “Außer diesem Verhältnis ist es Null”.

944 Con esta afirmación parecería que Hegel defiende algo que va en contra de su propia tesis en el que se definía lo infinitamente pequeño como un devenir o proceso al infinito. Es como si en el enfrentamiento virtual entre Newton y Zenón, Hegel tomara partido a favor de Newton.

945 Escribimos, $\Delta x, \Delta y$ y Δv cuando Leibniz escribe *dx*, *dy* y *dv*, y *dx*, *dy* y *dv* cuando Leibniz escribe *(d)x*, *(d)y* y *(d)v*. Ello se debe a que, tal y como afirma Bos (en Bos [1974] p. 59), las expresiones de Lebiniz *(d)x*, *(d)y*, *dx*,

$$ady = a(y+\Delta y) = ay + a\Delta y = (x+\Delta x)(v+\Delta v) = xv + x\Delta v + v\Delta x + \Delta x\Delta v$$

substrayendo *ay* en un lado y *xv* en el otro:

$$a\Delta y = x\Delta v + v\Delta x + \Delta x\Delta v$$

luego dividiendo ambos lados por Δx:

$$\frac{a\Delta y}{\Delta x} = \frac{x\Delta v}{\Delta x} + v + \Delta v$$

y, dice Leibniz, "transferendo rem ad rectas nunquam evanescentes qua licet", es decir, traduciendo esta expresión haciendo uso de los diferenciales *dx*, *dy* y *dv*, que han sido definidos como aquellas variables que conservan la relación de las diferencias, tendremos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\Delta x}{\Delta y},\ \frac{dx}{dv} = \frac{\Delta x}{\Delta v} \text{ y } \frac{dy}{dv} = \frac{\Delta y}{\Delta v}$$

con lo que:

$$\frac{ady}{dx} = \frac{xdv}{dx} + v + \Delta v \qquad [12]$$

donde, el término Δv, al encontrarse fuera del cociente de diferenciales, desaparecerá en el límite:

$$\frac{ady}{dx} = \frac{xdv}{dx} + v$$

multiplicando la expresión por *dx* obtenemos la expresión buscada:

$$ady = xdv + vdx$$ [946]

y *dy* son equivalentes, respectivamente, a las expresiones de las que hace uso Cauchy (en Cauchy [1899] pp. 22-27) $\Delta x, \Delta y$, *dx* y *dy*.

[946] De hecho, Leibniz afirmará también que de $\frac{ady}{dx} = \frac{xdv}{dx} + v$ se sigue $\frac{dy}{dx} = \frac{x+v}{a}$. Esta parte de la demostración es omitida por Bos bajo el argumento de que se trata de un error que no resulta interesante en su investigación (cf. Bos [1974] p. 58: "The few words omitted contain an obvius error in calculation and are not

Resulta importante poner en conexión esta demostración con el ejemplo del cociente de magnitudes evanescentes de Leibniz del texto *Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebra ordinaire* que ha sido reproducido más arriba. En él[947], la razón entre dos magnitudes evanescentes –es decir, la razón entre los segmentos *e* y *c*– es conservada en la razón entre los segmentos finitos *x* e *y*. En ese sentido, se tenía algo análogo a lo que en Newton era la conservación de la razón de igualdad entre los evanescentes en una razón finita. La diferencia consiste en que, en Leibniz, la razón entre los evanescentes podía ser cualquiera[948] y no, meramente, la de igualdad. Pues bien, el procedimiento de Leibniz para que la evanescencia de las diferencias no implique la desaparición de la razón que existe entre ellas consiste en definir dos segmentos fininitos *dx* y *dy* con la propiedad siguiente:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{dx}{dy} \qquad [13]$$

lo que en el dibujo [11] equivalía a[949]:

$$\frac{c}{e}=\frac{x}{y}$$

Una vez definido así el diferencial, resultará claro que la diferencia no tiene ningun significado fuera del cociente desde el que es definido. Es decir, la ley de la continuidad permite afirmar que la razón entre las diferencias finitas Δx y Δy en el límite será un caso más, será la continuación de o será igual a la expresión dx/dy. Lo que ocurre es que llevar al

important for the argument"). Frente a esta opinión, consideramos que el supuesto error no es un error y que, además de ello, resulta importante para el estudio de Bos. Uno de los objetivos de su trabajo consiste, precisamente, en mostrar en los origenes del cálculo infinitesimal en Leibniz el surgimiento del concepto de función y, lo que es indisociable a él, la distinción entre la variable dependiente y la independiente. Es en relación al fondo de la progresión aritmética con la que aumentará la variable independiente (recuérdese que Newton hablába de la fluxión tiempo) sobre lo que se "medirán" los aumentos y aumentos de aumentos y etc. de la variable dependiente. Pues bién, si en vez de una variable dependiente tenemos dos, es normal suponer que los dos aumentan, digamos, con la misma cadencia. Esto valdrá también si consideramos que las variables independientes no aumentan sino que disminuyen. Siendo esto así, es lógico suponer que si tenemos dos varialbes independientes *x* y *v*, el cociente de su límite cuando tienden hacia cero sea igual a uno: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ v\to 0}}\frac{x}{v}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim\limits_{v\to 0}\frac{v}{v}=1$. Esto es precisamente lo que tiene lugar en la demostración de Leibniz. Las variables independientes son *x* y *v*, y la igualdad $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ v\to 0}}\frac{x}{v}=1$ es lo que perimite pasar de la expresión $\frac{ady}{dx}=\frac{xdv}{dx}+v$ a la expresión $\frac{dy}{dx}=\frac{x+v}{a}$.

[947] Véase el dibujo [11].

[948] Es decir, el ángulo *BCA* podía ser uno cualquiera entre 0° y 90°.

[949] Con la diferencia de que, en el caso que ahora nos ocupa, el valor del cociente no es constante.

límite las diferencias Δx y Δy es hacer que estas expresiones tiendan a cero. Este valor sólo será efectivamente –es decir, absolutamente– alcanzado por las diferencias Δx y Δy si éstos se encuentran fuera del cociente diferencial. Esta es la razón de que en la expresión [12] no se haya substituido la diferencia Δv por su diferencial *dv* –tanto las diferencias como los diferenciales sólo estan definidos dentro de la relación– y de que en el paso al límite se haya anulado la diferencia que se encontraba fuera del cociente: es decir, $\Delta v=0$.

Un uso equivalente a la expresión [13] tiene también lugar en los *Principia* de Newton. En el segundo Lemma de la segunda sección del libro segundo[950], Newton hablará de las magnitudes *Genita* y de sus respectivos *Momenta*. Una magnitud *Genita* es lo que hoy en día llamaríamos un magnitud variable que se encuentra en variación. El espacio recorrido en su variación en un instante de tiempo es lo que Newton llamará su momento. Con ello, si denominamos al momento de una variable *a* como $\Delta a = \dot{a}o$ donde $o = \Delta t$ es el diferencial de la variable independiente –variable que, en Newton, resulta ser el tiempo[951]–, entonces, la expresión [13] tomará la forma siguiente:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \dot{a} \qquad [14]$$

En él, la variable dependiente generada –es decir, la *Genita*– sobre el fondo de la variable independiente *dt* será *da*. Con ello, podríamos representar esta igualdad haciendo uso del dibujo [11] si, en el momento en el que el triángulo *ECA* evanece[952], hacemos las substituciones siguientes:

$e=\Delta t$
$c=\Delta a$
$x=da=a+\Delta a$
$y=dt=t+\Delta t$

Donde las diferencias Δt y Δa tienden a cero o, en contra de lo que es habitual en Leibniz, en la *Historia et Origo calculi differentialis*[953] serán incluso igualadas a cero: $\Delta t=\Delta a=0$. Sabemos que esto último no será aceptado por Hegel[954]. La tentación de igualar a cero los diferenciales –es decir, la tentación de igualar a cero las diferencias infinitesimales– es resultado de haber considerado las diferencias como incrementos o, en general, como cantidades finitias. Si el diferencial es considerado como un Cuanta, no quedará otra alternativa que igualarlo a cero si no se quiere terminar hablando de errores infinitesimales o de compensación de errores[955]. Frente a esta concepción, la teoría de las magnitudes *Genita* de Newton recibirá el visto bueno de Hegel.

[950] Cf. Newton [1686] p. 250 y sigs.
[951] Una variable cuya, por así decir, natural progresión aritmética la convierte en una candidata perfecta para cumplir el papel de variable independiente.
[952] Momento último en el que cualquier relación no lineal entre los *Momenta* y los *Genita* se supone que es lineal y, por ello, expresado por la fórmula [14].
[953] Cf. Leibniz [1846] p. 44. La diferencia se pone igual a cero es, en particular, Δx –en Leibniz, *dx*–.
[954] Cf. Hegel [1985] p. 257: "denn eine Null hat überhaupt keine Bestimmteit mehr".
[955] No se olvide que la versión de la compensación de errores del cálculo infinitesimal será blanco de las críticas de Berkeley *The Analyst*. Éste pide a los matemáticos un acto de sinceridad para que reconozcan que creer en la

En efecto, un lenguaje sobre el Cálculo que habla de generación y en el que toda particula finita (*particulae finitae*) es considerada, por muy pequeña que esta sea, como un Cuanta, es un lenguaje muy cercano a Hegel[956]. Los momentos de los que habla Newton no son Cuanta, no son particulas finitas, sino que son los principios de la generación de las magntidues. Estos momentos no son considerados por Newton absolutamente, fuera de la proporción, sino que son considerados en su relación con otro momento[957]. Este otro momento puede ser, como hemos visto en la expresión [14], el momento de la variable independiente tiempo. En una proporción entre momentos, las magnitudes generadas quedan recogidas en su concepto o, como dirá Hegel, en su determinación cualitativa[958].

4.2.5 Lagrange

Muy probablemente sea la obra de Joseph Louis Lagrange, la *Théorie des fonctions analytiques*, la que goza de una mayor aceptación en las tres notas sobre el cálculo de la *Wissenschaft der Logik* de Hegel. Éste verá con buenos ojos el proyecto del matemático italiano de eliminar del cálculo, entre otras cosas, la noción de magnitud infinitesimal. Además de ello, la propuesta de Lagrange eliminará del cálculo las nociones vagas como son los evanescentes, los límites y las fluxiones[959]. Para tal fin, Lagrange reducirá el cálculo diferencial al estudio algebraico de las funciones, donde "algebraico" hace referencia al desarrollo de una función en una serie infinita[960].

---

exactitud de los resultados obtenidos por el metodo de la compensación de errores es equivalentes a las creencias en las que se fundamenta la Religión. Aún sin mencionarlo directamente, el rechazo de Hegel de la postura de compensación de errores incluye el rechazo a la lectura que hace Berkeley del cálculo Infinitesimal. Cf. G. Berkeley [1901] p. 22. Cf. también Berkeley [1901] p. 44: "And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantitites, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?".

[956] La analogía entre las cantidades *Genita*, el método de las primeras y últimas razones y los momentos de las *Genita* por un lado y los polos de *Enstehen* y el *Vergehen* del devenir de Hegel es completa si tenemos en cuenta que la generación de una magnitud puede ser, en Newton, tanto un aumento como una disminución de esta magnitud. La generación equivale así al denominado valor absoluto de la aritmética. Éste puede ser positivo y negativo al igual que la magnitud *Genita* puede ser resultado de un aumento instántaneo o una disminución asimismo instantánea. Esta última característica del momento es afirmada expresamente por Newton: "eorum [a saber, de las magnitudes generadas] incrementa verl decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo" (en Newton [1686] p. 251). Las oportunas observaciones a la versión algo dinamicista de Hegel que en estas líneas estamos proponiendo las haremos en los apartados 4.3.1 y 4.3.2.

[957] Cf. Newton [1686] p. 251: "enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio".

[958] Y es que, la proporción que tiene la forma de cociente de diferenciales, el límite de una proporción, *es* una determinación cualitativa. Cf. Hegel [1985] p. 255: "Das Quantum wird hier von sich selbst unterschieden, wie es als ein Produkt oder Daseiendes, und wie es in seinem Werden, in seinem Anfange und Prinzip, das heißt, wie es in seinem Begriffe, oder was hier dasselbe ist, in seiner qualitativen Bestimmung ist". Cf. también [1985] p. 265: "In der Vorstellung der Grenze liegt nämlich wohl die angegebene wahrhafte Kategorie der qualitativen Verhältnißbestimmung der veränderlichen Größen, denn die Formen, die von ihnen eintreten, *dx* und *dy*, sollen schlechtin nur als Momente von $\frac{dx}{dy}$ genommen, und $\frac{dx}{dy}$ selbst als ein einziges unteilbares Zeichen angesehen werden".

[959] Este proyecto será expresamente anunciado en el titulo de la obra de Lagrange: *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d´infiniment petits ou d´évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l´analyse algégraique des quantites finies.*

[960] Cf. Grabiner [1981] p. 319: "the concepts of the calculus could be made rigorous only if they were defined in terms of algebraic concepts, [...], by «algebraic» he [Lagrange] meant the algebra of infinite series".

Veremos que tal desarrollo algebraico de una función implicará el uso de la noción de incremento de una función introduciendo, con ello, consideraciones de carácter cuantitativo que son, para Hegel, ajenas al cálculo. Esta intromisión tendrá como consecuencia la necesidad de omitir de una manera más o menos fundamentada los diferenciales superiores en relación a los inferiores cuando se pretende representar una función por una serie finita. En el subapartado 4.2.5.2 de esta sección veremos que Lagrange hace frente a este problema mediante la definición de convergencia del denominado residuo de Lagrange[961]. Este uso del incremento de la función será, en la interpretación de Hegel, un mero recurso externo (*äußeres Mittel*)[962] que desvía la atención desde el carácter de relación que tiene la serie hacia la consideración de ésta como una mera suma de elementos.

Es este carácter de relación que tendrán, en el método de Lagrange, los coeficientes de la serie –las funciones de potenciación (*Funktionen der potenzierung*)– y la función originaria –la función de potencias (*Potenzenfunktion*)– la que se ajustará de una manera privilegiada al concepto de diferencial de Hegel. Esto supondrá considerar la serie de la expansión de la función como una relación que tienen los elementos entre sí y no tanto como una suma que expresa el aumento en el valor de la función producto del aumento de la variable independiente x en una cantidad i. Dedicaremos el siguente subapartado a ver cómo tiene esto lugar. Veremos, en particular, que las consideraciones de carácter cuantitativo tienen lugar en Lagrange cuando se trata de expresar el valor de una función por una serie, mientras que esta misma serie se considerará en su aspecto cualitativo cuando se trata de encontrar la función derivada.

El último gran logro de Lagrange consistirá en haber separado claramente la tarea formal y la tarea interpretativa o semántica del cálculo diferencial. Dicho brevemente, el aspecto formal de la *Théorie des fonctions analytiques* consistirá en encontrar la función derivada de una función originaria, mientras que la parte práctica intenta aplicar y traducir el cálculo en/a la geometría y la mecánica. Estas dos tareas serán el objeto de la primera y segunda parte de la *Théorie des fonctions analytiques*. A su estudio nos ocuparemos en el apartado 4.2.5.3.

4.2.5.1 La expansión de una función

Lagrange comenzará el primer capítulo de su *Théorie des fonctions analytiques* definiendo –siguiendo a Euler[963]– la analiticidad de una función como la propiedad de ser expandible en una serie infinita de potencias. Es decir, una función $f(x+i)$ es analítica si puede expresarse como una serie de potencias positivas y enteras[964] en i:

$$f(x+i) = f(x) + ip(x) + i^2 q(x) + i^3 r(x) + ... \qquad [15]$$

[961] Tal y como afirma Dieudonné (en Dieudonné [1978] p. 25), definir los criterios de convergencia de una inecuación era una verdadera excepción en el siglo XVIII en el que los matemáticos se ocupaban, más bien, de los criterios de convergencia de ecuaciones.
[962] Cf. Hegel [1985] p. 298.
[963] Cf. Euler [1755] p. 288.
[964] Sobre la dudosa prueba que ofrece Lagrange al respecto cf. Grabiner [1990] pp. 94-101. Parece que el presupuesto sobre el que se basa Lagrange es el de considerar la expresión [15], no tanto como una representación de la función *f(x)*, sino como la expresión de la función misma.

Después de esto, Lagrange descompone la variación de la función *f(x+i)* en dos partes. La primera parte dependerá únicamente del valor de *x*. La segunda parte dependerá tanto de *x* como de *i*. La parte que es independiente de *i* es la función *f(x)*. La parte que es dependiente de *i* podrá expresarse por una función $P(x,i)$ multiplicado por *i*. La expresión [15] tomará con ello la forma siguiente:

$$f(x+i) = f(x) + i \cdot P(x,i)$$

El movimiento[965] consistente en sacar la variable *i* como factor que multiplica la función $P(x,i)$ resulta clave para comprender toda esta sección. Con esta operación. Lagrange ha conseguido que haya un perfecto isomorfismo entre la función expresada por [15] y la función $P(x,i)$. En efecto, tanto la una como la otra están compuestas por una función que depende exclusivamente de *x*, y de una serie de potencias enteras y positivas en *i*. Esto se ve mejor si escribimos la función $P(x,i)$ con todos sus componentes:

$$P(x,i) = p(x) + iq(x) + i^2 r(x) + ... \qquad [16]$$

De este modo, podemos aplicar el mismo argumento utilizado en la desomposición de [15] en la descomposición de [16]. Esta expresión será dividida, a su vez, en una parte *p(x)* independiente de la variable *i*, y en una parte $iQ(x,i)$ dependiente de las variables *x* e *i*:

$$P(x,i) = p(x) + i \cdot Q(x,i)$$

La iteración de esta descomposición en cada nuevo miembro derecho y su sustitución en la función *f* nos proporciona la expresión inicial:

$$f(x+i) = f(x) + iP(x,i) = f(x) + ip(x) + i^2 Q(x,i) =$$
$$f(x) + ip(x) + i^2 q(x) + i^3 R(x,i) + ... = \ldots = f(x) + i \cdot p(x) + i^2 \cdot q(x) + i^3 \cdot r(x) + ...$$

En esta expresión se hace patente que las funciones *p(x)*, *q(x)*, *r(x)*,... han sido derivadas, indirecta o directamente, de la función primitiva *f(x)*. El objetivo de Lagrange es mostrar que estas derivadas son unas derivadas en el sentido actual del término. Es decir, se trata de mostrar que las funciones *p(x)*, *q(x)*, *r(x)*,... son cocientes de diferenciales de distinto orden. Para ello, Lagrange hace aumentar el valor de la variable independiente de la función *f(x+i)* en una cantidad *o* indeterminada e independiente de *i*. Dado que este aumento puede ser interpretado tanto como un aumento que se debe a la variable *x*, como un aumento de la variable *i*, tendremos dos expresiones con el mismo valor:

[965] Movimiento que presupone que la variable *i* es entera y positiva. Cf. Lagrange [1797] p. 8.

$$f\left(\left(x+o\right)+i\right)=f\left(x+\left(i+o\right)\right) \qquad [17]$$

Si denominamos $f'(x), f''(x),...$, $p'(x), p''(x),...$ a las funciones derivadas de las funciones originarias *f(x+o)*, *p(x+o)*,... el lado izquierdo de la expresión [17] nos dará:

$$\begin{aligned}&f\left(\left(x+o\right)+i\right)=f(x+o)+ip(x+o)+i^2q(x+o)+i^3r(x+o)+...=\\&+f(x)+of'(x)+o^2f''(x)+o^3f'''(x)+...+i\left(p(x)+op'(x)+o^2p''(x)+...\right)+\\&+i^2\left(q(x)+oq'(x)+o^2q''(x)+...\right)+...=\\&f(x)+ip(x)+i^2q(x)+i^3r(x)+...+of'(x)+iop'(x)+i^2oq'(x)+...\end{aligned}$$

A su vez, la parte derecha de [17] es igual a:

$$\begin{aligned}&f\left(x+(i+o)\right)=f(x)+(i+o)p(x)+(i+o)^2q(x)+(i+o)^3r(x)+..=f(x)+ip(x)+op(x)\\&+i^2q(x)+2oiq(x)+o^2q(x)+i^3r(x)+o^3r(x)+...\end{aligned}$$

Y dado que las dos expresiones tienen que ser iguales para cualesquiera valores[966] *i* y *o*, podemos igualar los coeficientes que multiplican las variables *i*, *o*, *io*, i^2o, io^2,.... Haciendo esto, Lagrange obtiene las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}&p(x)=f'(x)\\&q(x)=\frac{1}{2}p'(x)\\&r(x)=\frac{1}{3}q'(x)\\&s(x)=\frac{1}{4}r'(x)\end{aligned}$$

&c.

Por último, debido al isomorfismo que subyace en la operación de derivación, la función derivada de una función derivada de una función originaria será, por ejemplo, la segunda derivada de la función originaria:

$$p'(x)=\left(f'(x)\right)'=f''(x)$$

Con lo que tendremos,

[966] Debido a que el aumento *o* no depende del aumento *i*.

$$q(x) = \frac{p'(x)}{2} = \frac{f''(x)}{2}$$

$$r(x) = \frac{q'(x)}{3} = \frac{f'''(x)}{2 \cdot 3}$$

$$s(x) = \frac{r'(x)}{4} = \frac{f'^{v}(x)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

&c.[967]

Substituyendo estas expresiones en la formula [15] Lagrange obtiene la serie de Taylor:

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + i^2 \frac{f''(x)}{2} + i^3 \frac{f'''(x)}{2 \cdot 3} + i^4 \frac{f'^{v}(x)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \qquad [18]$$

En esta expresión se hace patente la relación que une a todas la funciones entre sí. La función *f(x)* es la función originaria de la que han sido derivadas las funciones $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. Por esta razón Lagrange llamará a *f(x)* la función primitiva de las funciones $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.

Es cierto que la expresión [18] aparecerá también en la *Institutiones Calculi Differentialis* de Euler[968]. Pero hay una diferencia esencial entre la manera en que procede Lagrange y la manera en la que lo hace Euler. Éste parte de la definición habitual de la derivada como la proporción entre dos magnitudes evanescentes. Una vez que dispone de esta definición, Euler interpreta los coeficientes de la serie de Taylor como iguales a las derivadas previamente obtenidas. Lagrange invierte el sentido de esta argumentación[969]. Para Lagrange

---

967 Nótese que la notación utilizada por Lagrange para nombrar a las funciones derivadas – $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, $f''(x) = \frac{d^2y}{(dx)^2}$, $f'''(x) = \frac{d^3y}{(dx)^3}$,...– subraya, en sintonía con Hegel, la unidad o inseparabilidad del coeficiente de diferenciales. Cf. Grabiner [1990] p. 91: "In writing the general term of the Taylor series for , ..., *f(x+i)* as $\frac{f^{(k)}(x)i^k}{k!}$ he found an extraordinarily expressive notation f', f'',..., $f^{(k)}(x)$, which stresses the fact that the derivative is not to be broken up into numerator and denominator [...] the essential step suggested by the notation is conceptual: to consider the functions *f*, f', f'', etc., instead of successive ratios of fixed quantities".

968 Cf. Euler [1755] p. 288.

969 Cf. Juschkewitsch [1959] p. 242. Para una comparación entre el uso de la serie analítica [15] en la defininción del diferencial en Euler y Lagrange cf. Juschkewitsch [1959] pp. 236 y 237: "Euler definiert ursprünglich die Ableitung als den Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Aber letzten Endes läuft der Algorithmus der Berechnung der Ableitung einer analytischen Funktion *f(x)* auf einen gewissen formalen Kunstgriff hinaus. Für *f(x)* wird $f(x+\Delta x) - f(x) = P\Delta x + Q\Delta x^2 + \ldots$ gebildet und die Ableitung als Koeffizient des hinsichtlich Δx linearen Gliedes der rechten Seite berechnet. Von hier ist es nur noch ein Schritt bis zur direkten Definition der

lo originario es la expresión de la función por la serie [15]. Es de esta serie desde donde saldrán las funciones derivadas. De ahí que no se calculan primero, como Euler, las derivadas para, en segundo momento, introducirlas en la serie. Para poder hacer esto último, Euler define el cociente de diferenciales como el caso límite del cociente de diferencias finitas. Con ello, Euler defiende una interpretación del diferencial como un caso límite del aumento de una variable. Sabemos que esta vía será criticada por Hegel, que verá asociada a ella el problema de la justificación de la omisión de los aumentos infinitesimales. La respuesta de Euler ante el problema consistía en considerar a los diferenciales como unos ceros aritméticos. Es decir, en Euler, la justificación de que los coeficientes de las potencias acaben siendo los diferenciales se encuentra en el proceso al límite mediante el cual se pasa de la variable finita ω al diferencial infinito *dx*. Lagrange, debido a que no parte de una noción previa de cociente de diferencial, va a poder evitar tener que recurrir a los controvertidos evanescentes, límites o infinitesimales.

Veamos ahora cómo tiene lugar la corresponencia de las funciones derivadas de Lagrange con las habituales funciones diferenciales. La primera función derivada de Lagrange es la función *p(x)*. Esta función es la parte independiente de *i* de la función *P(x,i)*. Con esta propiedad de independencia frente a *i* Lagrange está resolviendo el problema que consistía en que la evanescencia de los lados del cociente no debía implicar la evanescencia del cociente mismo. Expresado en el formalismo de Lagrange, la igualación a cero de *i* no implica la anulación de la expresión *P(x,0)=p(x)*. Será precisamente esta función derivada la que tenga las características del cociente diferencial. En efecto, podemos partir de la expresión,

$$f(x+i) = f(x) + i \cdot P(x,i) = f(x) + i(p(x) + iQ(x))$$

y escribir la función *P(x,i)* de la siguiente forma,

$$P(x,i) = p(x) + iQ(x) = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \qquad [19]$$

Si en la expresión [19] igualamos la variable *i* a cero, tendremos que el lado izquierdo será igual a la función *p(x)*, mientras que el lado derecho debe de ser igual al cociente de diferenciales:

$$P(x,0) = p(x) = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{df(x)}{dx} \qquad [20]$$

Como se ve, la substitución de *i=0* en la expresión [19] es enormemente problemática. Lagrange mismo no lleva a cabo la substitución de *i=0* en el cociente del lado derecho de la expresión [19], sino que, en vez de ello, definirá la parte independiente de *i* de la función *P(x,i)* como la función derivadad de la función originaria *f(x)*. Lagrange pretende evitar las expresiones como 0/0 que habían sido criticadas por él mismo en el prologo de su *Théorie des*

Ableitung als des eben genannten Koeffizienten, ohne Anwendung von Grenzübergangen; diese Schritt wird alsbald Lagrange machen".

fonctions analytiques[970] y, por esta razón, se moverá siempre en el lado izquierdo de la igualdad [20]. En este sentido, la expresión *p(x)* no se obtiene introduciendo *i=0* en la función *P(x,i)*, sino separando en esta función la parte que depende de *i* de la parte que depende únicamente de *x*. Esta última parte será la función *p(x)*.

Por ejemplo[971], si la función originaria es la función $f(x)=\frac{1}{x}$, la función *P(x,i)* será:

$$P(x,i)=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x}}{i}=\frac{-\frac{i}{x(x+i)}}{i}=-\frac{1}{x(x+i)}$$

Para obtener la función *p(x)=P(x,o)*, Lagrange se queda con la parte de la función *P(x,i)* que depende únicamente de *x*. Con ello obtiene la primera función derivada de la función originaria sin que haya tenido que recurrir para ello a las diferencias, ni a los límites o a los enavescentes:

$$f'(x)=p(x)=-\frac{1}{x^2}$$

El significado de esta expresión es, para Lagrange, el de ser el primer coeficiente de la expansión expresada por [15][972]. Es esta relación entre la función originaria y su primera derivada la que caracteriza el análisis algebraico de Lagrange. Éste hablará de "funciones que dependen de" o "no dependen de" una variable, y no de magnitudes que tienden a cero. Para Lagrange la función *p(x)* –la función que expresa el cociente de diferenciales– no es una función que dependa de *dx* –la variable *i* en Lagrange– sino que es una función que sólo depende de *x*. En la función que expresa el cociente de diferenciales de Lagrange se han eliminado los diferenciales sin que haya habido necesidad de igualarlos a cero o hacerlos evanescentes. La noción fundamental del cálculo de Lagrange es, con ello, el de la división del incremento de una función –*f(x+i)*– en dos partes. La primera de ellas –*f(x)*– dependerá únicamente de la variable independiente. La otra parte –*iP(x,i)* o, en la notación diferencial *dy*.– dependerá a su vez de *i*. Esta misma división se realiza con la función *P(x,i)* así como con las funciones derivadas sucesivas. Debido a que la parte que depende de *x* e *i* tiene a la variable *i* como factor, será posible encontrar expresiones que no dependen de *i* en la función *P(x,i)*. Esto equivaldrá, en el lenguaje del cálculo diferencial o fluxional, a obtener la expresión finita, no evanescente o ley de la proporción entre dos elementos evanescentes o infinitesimales.

---

[970] Cf. Lagrange [1797] p. 4: "Mais cette méthode a, comme celle des limites dont nous avons parlé plus haut, et qui n'en est proprement que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être quantités; car quoiqo'on conçoive toujours bienle rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ses deux termes deviennent l'un et l'autre nuls à-la-fois". Cf. Klaucke [1990] p. 133.

[971] Cf. Lagrange [1779] p. 9.

[972] Cf. Lagrange [1881] p. 34: "on voit que la fonction dérviée $f'(x)$ d'une fonction donée *f(x)* de la variable *x* n'est autre chose que le coefficient de *i* dans le premier terme du développement de cette fonction, après la substitution de *x+i* à la place de *i*".

Para Hegel, la interpretación de las distintas derivadas como los distintos coeficientes de las funciones expresadas por [15] y [18], hace posible que Lagrange se libere de lo infinito, de la aproximación infinita, del límite[973] o del devenir[974]. Con ello, Lagrange introduce el cálculo dentro de lo estrictamente formal siendo necesario una segunda parte del libro en el que se interpreten los resultados geométrica y mecánicamente[975]. Será en esta segunda parte donde se estudien los triángulos característicos, las tangentes, las fuerzas o las aceleraciones.

Al mismo tiempo, la interpretación meramente algebráica del cálculo permite desvincularse del argumento según el cual los términos que son multiplicados por infinitesimales de orden superior son eliminados en relación a los multiplicados por los de orden inferior. Así, por ejemplo, si la función originaria es $f(x)=x^n$, su expansión tendrá la forma:

$$f(x+i) = f(x) + ip(x) + i^2 q(x) + i^3 r(x) + ... = (x+i)^n = \binom{n}{0} x^n i^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} i^1 + $$
$$+ \binom{n}{2} x^{n-2} i^2 + ... + \binom{n}{n} x^0 i^n$$

Para obtener la primera derivada no es necesario argumentar que, cuando i tiende a cero, los infinitesimales $i^2, i^3, ...$ se anulan en relación al infinitesimal i, sino que es suficiente, según razona Lagrange, quedarse únicamente con el primer coeficiente de la variable i de la serie. Esto nos proporcionará la primera función derivada o función diferencial:

$$f'(x) = p(x) = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Haciendo uso de las reglas de transformación de los coeficientes en las derivadas, la segunda función derivada es el coeficiente del segundo término de la serie multiplicado por dos:

$$2q(x) = f''(x) = 2\binom{n}{2} x^{n-2} = n(n-1)x^{n-2}$$

[973] Cf. sobre este punto Klaucke [1990] p. 143.
[974] Cf. Hegel [1985] p. 267: "von den formellen Kategorien, vor allem des Unendlichen, der unendlichen Annäherung und der weiteren, hier ebenso leeren Kategorien von kontinuierlicher Größe und welche man sonst, wie Bestreben, Werden […] gereinigt".
[975] Frente a la parte formal de la primera parte, podría llamarse a esta segunda parte la parte semántica de la *Théorie des fonctions analytiques*. Cf. Hegel [1985] p. 300: "bei Lagrange die Trennung der sogenannten Anwendung von dem Verfahren des allgemeinen Teils, das von den Reihen ausgeht, eben dazu dient, die eigentümliche Sache der Differ.-Rechnung für sich zum Vorschein zu bringen".

Estos dos resultados ilustran suficientemente la diferencia que separa a Lagrange de sus antecedentes. Esta diferencia consiste en que la razón de la omisión de los distintos coeficientes no consiste en que están siendo multiplicados por infinitesimales de orden superior, sino en que, simplemente, no están en la relación en la que deberían estar con respecto a la función originaria: la razón de la omisión no es la relativa pequeñez de los términos sino el que no estén en una cierta relación. Es decir, la razón de la omisión no es cuantitativa, sino cualitativa[976]. Por esta razón afirmará Hegel que de lo que trata el cálculo de derivadas de Lagrange no es de la expresión [15] considerada como suma, sino considerada como una relación (*Verhältnis*)[977]. Esta relación no consiste en un caso aislado, sino que forma parte de una repetición de relaciones. En este sentido podemos hablar de un algoritmo diferencial en el que el *output* de una etapa puede funcionar de *input* de la etapa siguiente: ser la primera función derivada de otra función que es, a su vez, primera derivada de una función originaria equivale a ser la segunda función derivada de esta misma función originaria.

4.2.5.2 Los límites del error de Lagrange

La serie expresada por [15][978] puede utilizarse tanto para calcular las funciones derivadas de la función originaria como para expresar la función originaria misma. Al hacer esto último, debido a que no es posible tener en cuenta todos los elementos de la serie, se comete inevitablemente un error[979]. Las series finitas con este error, el así denominado resto (*reste*)[980] de Lagrange, servirán para encontrar tangentes, areas, volúmenes así como para simplificar la aplicación del cálculo a la mecánica[981]. El trabajo de Lagrange no se reducirá meramente a mostrar la forma que tomará el resto en cada grado de omisión, sino en establecer sus límites en relación a los términos que se han tenido en cuenta en la serie. Es más, mostrar los límites del error será, para Lagrange, más importante que mostrar cómo se calculan sucesivamente los restos[982]. La proposición fundamental[983] del cálculo de Lagrange

[976] Cf. Hegel [1985] p. 263: “Daß die übrigen Glieder nicht berücksichtigt werden, kommt so nicht von ihrer relativen Kleinheit her”.

[977] Cf. Hegel [1985] p. 263: “Indem es sich nicht um eine Summe, sondern um ein Verhältnis handelt, so ist das Differential vollkommen durch das erste Glied gefunden”.

[978] O, en su caso, por [18].

[979] La diferencia entre hacer uso de la serie [18] para encontrar las funciones derivadas y hacer uso para encontrar el valor de la función es expresada en sus *Leçons sur le Calcul des fonctions*: “Tant que ce développement ne sert qu’à la génération des fonctions dérivées, il est indifferénrent que la série aille à l’infini ou non; il l’est aussi lorsqu’on ne considère le développement que comme une simple transformation analytique de la fonction; mais si on veut l’employer pour avoir la valeur de la fonction dans les cas particuliers, comme offrant une expresion d’une forme plus simple à raison de la quantité *i* qui se trouve dégagée de dessous la fonction, alors ne pouvant tenir compte que d’un certain nombre plus o moins grand de termes, il est important d’avoir un moyen d’evaluer le reste de la série qu’on néglige, ou du moins de trouver des limites de l’erreur qu’on commet en négligeant ce reste”. Esta diferencia, clave para entender este apartado, es ignorada por Wolff cuando afirma lo siguiente: “Dieser Satz [la *Fundamentalsatz* que nos ocupa en este apartado] soll nach Lagrange rechtfertigen, daß beim Übergang von der ursprunglichen zur abgeleiteten Funktion die Restglieder der Reihe weggelassen werden können” (en Wolff [1986] p. 205). En contra de Wolff habría que decir que Lagrange, en lo que se refiere a la derivación de las derivadas, está más cerca de Hegel de lo que cabría imaginar. Consideramos que el texto de las *Leçons* que hemos citado en esta nota está perfectamente de acuerdo con la interpretación del cálculo ofrecido por Hegel.

[980] Expresión utilizada, por ejemplo, en Lagrange [1881] p. 74 y Lagrange [1797] p. 45.

[981] Cf. Grabiner [1990] p. 145.

[982] Cf. Lagrange [1881] p. 78: “Mais, pour notre objet, il importe moins de connaitre les restes exacts de la série développée jusqu’à un terme quelconque que d’avoir des limites de ces restes pour pouvoir apprécier l’erreur qu’on peut commettre en ne tenant compte que de quelques-uns des premiers termes”.

[983] Hegel hablará de *Fundamentalsatz* (en Hegel [1985] p. 264), Lagrange de “*un des principes fondamentaux de la théorie*” (en Lagrange [1881] p. 29).

será precisamente la encargada de sentar los límites del error del resto. Según esta proposición, siempre será posible escoger un valor de *i* tal que el valor absoluto del resto sea menor que el sumando de la serie que le precede[984]. Antes de entrar a ver cuál es el significado del resto en Lagrange, vamos a ver cuáles son los pasos que se siguen en la demostración.

Comencemos[985] escribiendo la serie infinta [18] en una forma finita con resto $r_n(x,i)$:

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{i}{1!} + \ldots + f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{i^{n-1}}{(n-1)!} + r_n(x,i)\cdot i^n$$

Substituyendo *(x-z)* por *x*, y definiendo $r_n(x-i,i) = q_n(x,i)$, tenemos:

$$f(x) = f(x+i) + f'(x-i)\cdot\frac{i}{1!} + \ldots + f^{(n-1)}(x-i)\cdot\frac{i^{n-1}}{(n-1)!} + q_n(x,i)\cdot i^n$$

Sustituyendo, $i = xz$ y $q_n(x,xz)\cdot z^n = p_n(x,z)$, se sigue que

$$f(x) = f(x-xz) + f'(x-xz)\cdot\frac{xz}{1!} + \ldots + f^{(n-1)}(x-xz)\cdot\frac{x^{n-1}z^{n-1}}{(n-1)!} + p_n(x,z)\cdot x^n \qquad [21]$$

Y de aquí, haciendo las derivadas parciales con respecto a z:

$$0 = -f^{(n)}(x-xz)\cdot\frac{x^n\cdot z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial p_n}{\partial z}\cdot x^n,$$

es decir,

---

[984] Tal y como afirma Grabiner (en Grabiner [1990] p. 54) será Arbogast el antecedente inmediato del teorema del residuo de Lagrange. El matemático francés afirmará que dado que es posible escoger un Δx suficientemente pequeño tal que los términos de la serie $a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n}(\Delta x)^n$ y $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}(\Delta x)^{n+1}$ estén en la relación $\frac{1}{2}|a_n| \geq |a_{n+1}|$ para todo *n*, entonces $|a_n| \geq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right|$. Como se ve, la demostración está inspirada en las propiedades de la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ en donde los terminos cumplen, precisamente, la condición $\frac{1}{2}|a_n| \geq |a_{n+1}|$ para todo *n*, y en el límite $\frac{1}{2^n} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$.

[985] Seguimos en nuestra exposición a Pringsheim [1900] p. 440 y sigs.

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = f^{(n)}(x - xz) \cdot \frac{z^{(n-1)}}{(n-1)!} \qquad [22]$$

y, puesto que de [21] se sigue que $p_n(x,0) = 0$ [986], tenemos que:

$$\int_0^z \frac{\partial p_n}{\partial z} = p_n(x,z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z y^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - xy) \cdot dy$$

Por otro lado, definiendo las funciones f_1 y f_2 bajo la condición:

$$f_1'(z) = z^m \cdot (M - Z(z)) \text{ donde } \quad M = \max\left|\frac{F'(z)}{z^v}\right| = \max|Z(z)| \quad \text{para } a \leq z \leq b \text{ y}$$

$$f_2'(z) = z^m \cdot (Z(z) - m) \text{ donde } \quad m = \min\left|\frac{F'(z)}{z^v}\right| = \min|Z(z)| \quad a \leq z \leq b$$

Tendremos que:

$$f_1'(z) = z^m \cdot (M - \frac{F'(z)}{z^m}) \succ 0 \qquad \text{y} \qquad f_2'(z) = z^m \cdot (\frac{F'(z)}{z^m} - m) \succ 0$$

y haciendo uso del Lemma siguiente:

si $f'(z) \geq 0$ para $a \leq z \leq b,$ entonces $f(a) - f(b) \succ 0.$

obtiene las inecuaciones siguientes:

$$M \cdot \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \succ F(b) - F(a) \succ m \cdot \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \qquad [23]$$

---

[986] Tal y como afirma Pringsheim (en Pringsheim [1900] p. 441) Lagrange evita utilizar los términos Diferencial e Integral en su exposición, y dice que la función $p_n(x,z)$ "devienne nulle" cuando z=0. Cf. Lagrange [1884] pp. 86-87.

Para obtener las inecuaciones para el resto $p_n = (x, z)$, tenemos que obtener primero la serie de Mac Laurin substituyendo z=1 en [21]:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{x}{1!} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + p_n(x,1)\cdot x^n \qquad [24]$$

y reformulando la expresión [22]

$$\frac{1}{z^{n-1}}\cdot\frac{\partial p_n(x,z)}{\partial z} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x - xz)$$

Para hacer uso de las inecuaciones [23] solamente tenemos que hacer las siguientes substituciones;

$$F(z) = p_n(x,z), m = n-1, a = 0, b = 1,$$
$$M = \max\left| f^{(n)}(x - xz)\right|, m = \min\left| f^{(n)}(x - xz)\right|, \text{para } 0 \le z \le 1$$

de esta forma obtenemos[987]:

$$\frac{M}{n!} \succ p_n(x,1) \succ \frac{m}{n!}$$

y suponiendo la continuidad de la función $f^n(x)$:

$$p_n(x,1) = \frac{f^n(u)}{n!} \quad \text{donde } u \text{ es un valor entre 0 y } x.$$

Por otro lado, las sustituciones siguientes

$$f(x) = \varphi(z + x),\ f(0) = \varphi(z),\ f^{(m)}(0) = \varphi^m(z),\ f^{(n)}(u) = \varphi^n(z + u)$$

en [24] nos proporcionan el desarrollo para la serie de Taylor en $\varphi(z + x)$. De este modo, si sustituimos $\varphi, z, x,$ por f, x, z, obtenemos la fórmula

---

[987] Téngase en cuenta que $F(a) - F(b) = F(1) - F(0) = p_n(x,1) - p_n(x,o) = p_n(x,1)$..

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{i}{1} + ... + f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{i^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x.+u)\cdot\frac{i^n}{n!}$$

Para obtener la primera derivada, no hay más que escoger un valor para *h* lo suficientemente pequeño para que

$$|\, i\cdot f'(x)| \succ \left|\frac{i^2}{2!}\cdot f''(x+u)\right|$$

algo que se cumple para todo

$$|\, i \,| \prec \frac{2\cdot|\min f'(x)|}{|\max f''(x+u|}$$

Luego siempre será posible encontrar un *i* lo suficientemente pequeño como para que podamos ignorar los sucesivos elementos de la serie bajo el "argumento" de que la suma del resto es menor que el último de los miembros de la serie que se conserva[988]. El recurso a la relativa pequeñez de los sumandos es para Hegel una erronea legimitimación que hace del cálculo un método de aproximación[989]. El teorema de los límites del resto de Lagrange, teorema que presuponen los cálculos diferencial y fluxional[990], vuelve a introducir consideraciones de caracter cuantitativo-aproximativo en el cálculo. La variable *i* que en la serie infinita [18] resultaba ser un mero recurso para expandir la función y obtener, con ello,

---

988 Cf. Lagrange op. cit., p. 12: "On pourra donc prendre *i* assez petit, sans être nul, pour que *iP* soit moindre que *fx*, ou pour que *iQ* soit moindre que *p*, ou pour que *iR* soit moindre que *q*, et ansi des autres ; et par conséquent pour que i^2Q soit moindre que *ip* , ou que i^3R soit moindre que i^2q, &c, ; donc, puisque (nº II) $iP=ip+i^2q+i^3r+\&c.$, $i^2Q=i^2q+i^3r+\&c.$, $i^3R=i^3r+\&c.$, il s´einsuit qu´on pourra toujours donner à *i* une valeur assez petite pour que chaque terme de la série $fx+ip+i^2q+i^3r+\&c.$, plus grand que la somme de tous les termes suivans". Lagrange se sitúa en este punto entre Euler y Cauchy. El primero postula la omisión de los infinitesimales de orden superior (en Euler [1755] pp. 98-108 y pp. 580-583), mientras que el segundo ofrecera un criterio de convergencia para el resto p_n. En relación a Euler cf. Juschkewitsch [1959] p 239: "in der unendlichen Reihe (18) [$f(x\pm a) - f(x) = \pm\alpha\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{\alpha^3}{6}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + ...$] der absolute Betrag eines beliebigen Gliedes (mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten) bei hinreichend kleinend α größer als der absolute Betrag der Summe aller nachfolgenden Glieder der Reihe gamacht werden kann". En relación a Cauchy cf. Cauchy [1899] p. 10 : "… et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant plus être admisse comme générale qu´autant que la série qu´elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de ternues et complétée par une intégrale définie" (citado en Juschkewitsch [1959] p. 450). Cauchy prefiere hacer uso (por *rigueur* y *simplicité*) de las magnitudes infinitesimales frente a la serie de Taylor.

989 Por muy perfecta que, gracias al Principio fundamental del cálculo de Lagrange, este método fuera. Cf. Lagrange [1881] p. 85: "Le tréorème précédent pourra servir, dans beaucoup d'occasions, à donner à ces méthodes [los métodos de aproximación] la perfection qui leur manque et sans laquelle il est souvent dangereux de les employer".

990 Cf. Lagrange [1881] p. 29.

el primer elemento de la serie[991], tomará ahora el significado cuantitativo de aumento (*Zuwachs*)[992]. Además de ello, este recurso a la relativa pequeñez recurre, de un modo más o menos explícito, a la noción de límite que Lagrange quería, precisamente, eliminar[993]. Esto se hará patente con Cauchy que será el que se dedique a estudiar los criterios de convergencia[994] de los distintos restos de Lagrange. Y es que, si la serie que constituye el resto no llega a converger, el error no será despreciable y la función no será representable por la serie. Sea esto como fuere, hemos adelantado ya en la introducción que el resto de Lagrange no se aplica para calcular la derivada de una función sino que expresa el error que resulta de hacer uso de una serie con términos finitos en vez de infinitos –el error de hacer uso de una serie finita en vez de la función originaria. Es por ello que los argumentos de carácter meramente cualitativo descritos en el apartado 4.2.5.1 siguen siendo perfectamente válidos. De ahí que la introducción del resto de Lagrange no introducirá argumentos basados en la relativa pequeñez de una variable en el cálculo de las funciones derivadas. Las razones de la sintonía de Hegel con el cálculo algebraico de Lagrange no han sido alteradas en lo más mínimo.

4.2.5.3 El significado del formalismo

Para Hegel[995], la separación del Cálculo Diferencial en una parte formal en donde se deducen algebraicamente los teoremas y algoritmos y en otra parte[996], digamos, práctica en la que se hace uso de estos algoritmos en la geometría y la física será la razón del carácter científico de la teoría de funciones de Lagrange. La primera parte se ocupará principalmente de encontrar las funciones derivadas de una función originaria *f(x)*. A su vez, la segunda parte se ocupará de encontrar las realidades geométricas y físicas que cumplan la condición de encontrarse en la relación indicada por las funciones derivadas[997]. Esta separación es lo que permitirá a Lagrange verse liberado de las nociones ajenas al rigor algebraico como el del infinitesimal o la fluxión. La razón de que estas nociones hayan terminado por invadir el terreno de la matemática de los tiempos de Lagrange hay que buscarla, precisamente, en la falta de separación de estos dos ámbitos. En lo que se refiere al cálculo integral, esta misma separación permitirá a Lagrange desvincularse de la definición de la integral como la suma de indivisibles o de polígionos de lados infinitesimales. El proceso de integración es para

[991] Este carácter meramente auxiliar de la variable *i* lleva a Hegel afirmar que habría sido más correcto hacer uso, en su lugar, del número uno. Con ello se eliminarían, en opinión de Hegel, las connotaciones de lo cuantitativo y de variabilidad de la noción de aumento –algo que no ocurre si hacemos uso de la variable-aumento *i*–. Cf. Hegel [1985] p. 281: “indem nur um der Entwicklung willen ein Zuwachs angenommen ist, der onhe Quantum sei, es am geschicktesten gewesen wäre, 1 (das Eins) dafür zu nehmen, indem derselbe in der Entwicklung immer nur als Faktor vorkommt, womit eben der Faktor Eins den Zweck erfüllt, daß keine quantitative Bestimmtheit und Veränderung durch den Zwachs gesetzt werden solle”.

[992] Cf. Hegel [1985] pp. 264-265: “Es wird auch in dieser Methode von den Kategorien vom Zuwachs und von der Differenz der Function angefangen, deren veränderliche Größe den Zuwachs erhalte, womit die lästige Reihe hereinkommt, von der ursprünglichen Function angefangen, deren veränderliche Größe den Zuwachs erhalte, womit die lästige Reihe hereinkommt, von der ursprünglichen Function; so wie im Verfolg die wegzulassenden Glieder der Reihe nur in der Rücksicht, daß sie eine Summe constituieren, in Betracht kommen, und der Grund sie wegzulassen, in das Relative ihres Quantums gesetz wird”.

[993] Cf. Wolff [1986] p. 205.

[994] Es decir, los criterios bajo los cuales el resto no se vuelve infinito.

[995] Cf. Hegel [1985] p. 286.

[996] Parte que en la *Théorie des fonctions analytiques* consta de dos partes: la *Application de la Théorie des fonctions a la Géométrie* (Lagrange [1881] pp. 183-336) y la *Application de la Théorie des fonctions a la Mécanique* (Lagrange [1881] pp. 337-413).

[997] Es así como presenta Hegel las partes segunda y tercera de la *Théorie des fonctions analytiques*: “Der andere Teil der Auflösung ist nun die Findung derjenigen Linien an der Kurve, welche in jenem Verhältnis stehen”.

Lagrange meramente el inverso de la derivación: la derivada de una función es otra función cuya derivada es igual a la primera función.

La preocupación por el rigor y la evidencia del cálculo es también presente en la segunda y tercera parte de la *Théorie des fonctions analytiques*. El paradigma de este rigor lo constituyen, para Lagrange, los antiguos[998]. A ellos apelará Lagrange cuando define la tangente a una curva como aquella recta que, tocando la curva en un punto, no admite otra recta entre ella y la curva. Vamos a ver primero cómo hace uso Lagrange de esta definición para obtener, mediante su teorema del residuo, las condiciones que debe cumplir la función de la tangente. Después de esto pasaremos a ver cómo elimina Lagrange los coeficientes de diferenciales de orden superior en la expansión de la función que describe el espacio en función del tiempo.

4.2.5.3.1 El significado del formalismo en la geometría

Podría decirse que la definición de la tangente de la que hace uso Lagrange en la segunda parte de su *Théorie des fonctions analytiques* es la menos controvertida de todas las que él mismo llega a proponer[999]. Una tangente, dice Lagrange, es la secante en la que los dos puntos de intersección son uno, o es también la prolongación infinitesimal de la curva considerada como un polígono de infinitos lados o, por último, la tangente es la dirección del movimiento mediante el cual se puede describir la curva. Estas tres definiciones, o bien hacen uso del movimiento –la tercera–, o bien utilizan fluxiones, diferenciales o variables no nulos que en el desarrollo del cálculo se igualan a cero –las dos primeras definiciones . De ahí que ninguna de estas definiciones sea aceptada por Lagrange.

El método para la obtención de la tangente de Lagrange hace uso del comportamiento de la tangente alrededor –punto $x_0 + i$ – del punto de contacto –punto x_0. Supongamos que *f(x)* representa la función de la curva y *F(x)* representa otra función que toca a la primera función en el punto x_0: $f(x_0) = F(x_0)$. En los alrededores de este punto de contacto el valor de la ordenada de la curva diferirá del de la segunda curva. Lagrange denomina *D* a esta diferencia:

$$D = f(x+i) + F(x+i)$$

El siguiente paso hace uso del teorema del residuo de Lagrange. Según este teorema, podemos escribir las funciones *f(x+i)* y *F(x+i)* mediante una expansión finita de, por ejemplo tres términos:

---

[998] Lagrange no dice quiénes son los que considera antiguos pero podría pensarse que se refiere, entre otros, a Euclides y a Arquímedes. Cf. Lagrange [1881] p. 184. Recuérdese que el texto de Arquímedes –su Ἔφοδος, camino o acceso (pero no método)– donde hace uso de elementos clásicamente poco escrupulosos como los indivisibles –no infinitesimales–, la suma de todos los cortes de una superficie o volumen, el peso de estas superficies etc. no será descubierto hasta comienzos del siglo XX.

[999] Cf. Lagrange [1881] pp. 183 y 184: “on les regardées comme des sécantes dont les deux points d’intersection sont réunis, ou comme le prolongement des còtés infiniment petits de la courbe, considerée comme un polygone d’une infinité de còtés, ou comme la direction du mouvement composé par lequel la courbe peut être décrite”.

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x+j)$$

$$F(x+i) = F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2} F''(x+j)$$

Supongamos que existe otra recta[1000] expresada por la función $\varphi(x)$ que, tocando la curva principal en el punto x_0[1001], pasa entre las curvas *F(x)* y *f(x)* en el punto $x_0 + i$. Esta nueva curva podrá expresarse así;

$$\varphi(x+i) = \varphi(x) + i\varphi'(x) + \frac{i^2}{2} \varphi''(x+j)$$

Donde *j* es un valor entre 0 y *i*. La diferencia entre la primera y la segunda función en el punto $x_0 + i$ será con ello:

$$D = i\big(f'(x_0) - F'(x_0)\big) + \frac{i^2}{2}\big(f''(x_0+j) - F''(x_0+j)\big)$$

Y la diferencia que hay entre la primera y la segunda será esta otra:

$$\Delta = i\big(f'(x_0) - \varphi(x_0)\big) + \frac{i^2}{2}\big(f''(x_0+j) - \varphi''(x_0+j)\big)$$

La condición de que, en base a la definición de la tangente de la que parte Lagrange, la tercera curva $\varphi(x)$ pueda pasar entre las curvas $f(x)$ y $F(x)$, es que la diferencia que separa a estas dos primeras curvas sea mayor que la diferencia entre la curva $\varphi(x)$ y la curva $f(x)$. Si suponemos que $F'(x_0) = f'(x_0)$, entonces la condición para que $\varphi(x)$ pase en el punto $x_0 + i$ entre las curvas *f(x)* y *F(x)* será:

$$D = \frac{i^2}{2}\big(f''(x_0+j) - F''(x_0+j)\big) > i\big(f'(x_0) - \varphi(x_0)\big) + \frac{i^2}{2}\big(f''(x_0+j) - \varphi(x_0+j)\big) = \Delta$$

Dividiendo en los dos lados por *i*:

[1000] Esta recta será la candidata a tangente.

[1001] Luego se cumplirá que $f(x_0) = \varphi(x_0)$.

$$\frac{i}{2}\left(f''(x_0+j)-F''(x_0+j)\right)>\left(f'(x_0)-\varphi(x_0)\right)+\frac{i}{2}\left(f''(x_0+j)-\varphi(x_0+j)\right)$$

Algo que sólo podrá ocurrir para todo *i*, por pequeño que ésta sea[1002], bajo la condición de que:

$$f'(x_0)=\varphi'(x_0)$$

Si, en vez de desplegar sólo tres términos de la serie desplegamos series con cuatro, cinco, etc. términos, Lagrange obtendrá las condiciones siguientes para la función tangente $\varphi(x)$:

$$f''(x_0)=\varphi''(x_0)\,,\ f'''(x_0)=\varphi'''(x_0)\,,\ f'^{v}(x_0)=\varphi'^{v}(x_0)\,,\ f^{v}(x_0)=\varphi^{v}(x_0)\,,\ \ldots$$

La curva $\varphi(x)$ estará más próxima de la curva *f(x)* cuantas más veces su derivada sea igual a la derivada de la curva en el punto x_0. En el límite, todas las derivadas en el punto x_0 de la función $\varphi(x)$ deberán coincidir con las de la función *f(x)* para poder hablar de tangente a la curva.

Hegel no considera que el proceso de derivación dé lugar a una nueva ecuación (*Gleichung*). La derivación de funciones tiene como resultado una relación entre la primera función derivada de la variable dependiente y la primera función derivada de la variable independiente[1003]. La función de la tangente tiene una condición más que cumplir a diferencia de la derivada. La recta tangente no sólo se encuentra en la misma relación que la expresada por el cociente de diferenciales[1004] –la función derivada– sino que tiene que llegar a tocar además la curva. Veamos esto en un ejemplo.

[1002] Nótese que el cumplirse o no cumplirse de la inecuación no depende de diferencias cuantitativas sino, como dirá Hegel, de diferencias de potencias: así, *i* es en sí y por sí mayor que i^2. De este modo, la pequeñez de la variable *i* no tiene nada que ver con la "pequeñez" del infinitesimal. Cf. Hegel [1985] p. 287: "Diese scheinbar nur relative Kleinheit […] ist qualitativ durch die Natur der Formel gesetzt, wenn der Unterschied des Momentes, von dem die zu vergleichende Größe abhängt, ein Potenzunterschied ist […] so ist i^2 an und für sich kleiner als *i*, so daß selbst die Vorstellung von einer beliebigen Größe, in der man *i* nehmen könne, hier überflussig uns sogar nicht an ihrem Orte ist. Eben damit hat der Erweis der größeren Kleinheit nichts mit einem Unendlich-Kleinen zu tun".

[1003] Cf. Hegel [1985] p. 283: "Die Operation des Depotenzierens einer Gleichung, sie nach den abgeleiteten Funktionen ihrer veränderlichen Größen betrachtet, gibt den ein Resultat, welches an ihm selbst wahrhaft nicht mehr eine Gleichung, sondern ein Verhältnis ist". Cf. también Hegel [1985] p. 285: "Es werden erstlich die Potenzenbestimmungen […] auf ihre ersten Funktionen herabgesetzt […] es bleibt daher keine Gleichung mehr, sondern es ist nur ein Verhältnis entstanden zwischen der ersten Funktion der einen veränderlichen Größe zu der ersten Funktion der anderen". Cf. también [1985] p. 283: "Übergang von der ursprünglichen Funktion, d.i. welche eine Gleichung ist, zu der abgeleiteten, welche ein Verhältnis ist, und zwar zwischen gewissen in der Kurve enthaltenen Linien".

[1004] En este sentido la recta tangente expresa también la ley de la variación de una relación.

Sea dada la función de la curva $f(x) = x^2$. La recta tangente propuesta para esta función tendrá la forma general: $\varphi(x) = a + bx$. Las dos condiciones con las que obtendremos las incógnitas *a* y *b* serán las siguientes:

$$f(x_0) = \varphi(x_0)$$

y

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

de la primera condición tendremos que

$$f(x_0) = x_0^2 = \varphi(x_0) = a + bx_0 \Rightarrow a = x_0^2 - bx_0$$

y de la segunda condición tendremos que

$$f'(x_0) = 2x_0 = \varphi'(x_0) = b$$

luego la función de la tangente tendrá la forma siguiente:

$$\varphi(x) = x_0^2 - (2x_0)x_0 + 2x_0 x = -x_0^2 + 2x_0 x$$

por ejemplo, la función de la tangente en el punto $(x_0, y_0) = (2,4)$ será:

$$\varphi(x) = -4 + 4x$$

o en el punto $(x_0, y_0) = (3,9)$:

$$\varphi(x) = -9 + 6x$$

Si dibujamos estas dos rectas, veremos que tocan la curva expresada por la función $f(x) = x^2$. El primero lo hace en el punto $(x_0, y_0) = (2,4)$ y el segundo en el punto $(x_0, y_0) = (3,9)$. La ley de la variación de la relación entre la primera función derivada de la variable dependiente y la primera función derivada de la variable independiente es expresada por el componente $2x_0$ de la tangente. Así, en el primer ejemplo, la ley de la variación toma el valor 4, mientras que en el segundo ejemplo este valor es 6. En la interpretación geométrica, estos valores expresan las pendientes de la primera y segunda rectas, respectivamente[1005].

La parte en donde la recta tangente expresa su pendiente es el cociente de diferenciales. Así, si la función es $y = f(x) = x^2$, la relación entre la primera función derivada de la variable dependiente con respecto a la primera función derivada de la variable independiente será[1006]:

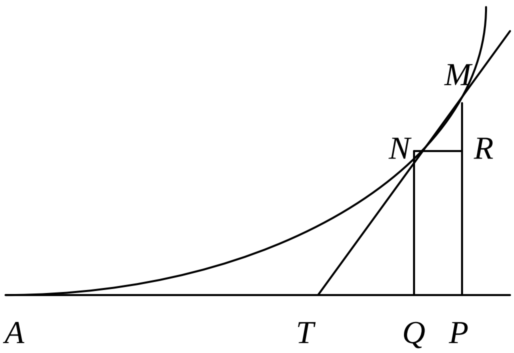
$$dy : dx = 2x : 1 \qquad [25]$$

El problema consiste en que esta expresión no expresa más que el cociente de diferenciales es una relación. La proporción [25] expresa que hay una relación de proporcionalidad entre dos elementos lineales[1007] pero no expresa a qué otra relación es igual este cociente de diferenciales[1008]. Para saber a qué otra proporción es igual la expresión [25] necesitamos introducir una nueva condición en el planteamiento del problema. Esta nueva condición es, en el caso que ahora nos ocupa, el siguiente:

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

Con esta igualdad afirmamos que la proporción “infinitesimal” de los diferenciales de la curva y la proporción entre la ordenada de la tangente y la subtangente son iguales. Esta condición no será algo exclusivo de Lagrange sino que una igualdad equivalente a ésta será utilizada también por el método geométrico de la obtención de la tangente. Barrow, por ejemplo, en la lección X de sus *Lectiones Geometricae*[1009], parte del siguiente dibujo sobre el que realiza la mencionada igualdad:

[1005] Esto se debe a que $b = 2x_0$ “exprime la tangente de l’angle que cette droite [la recta expresada por $\varphi(x)$] fait avec l’axe” (en Lagrange [1881] p. 192).
[1006] Como es habitual, hacemos uso del signo “:” en vez de “=” para expresar una proporción en vez de una igualdad. Hegel hará también uso de esta notación (cf. Hegel [1985] p. 285).
[1007] Hegel habla de la “proporción en la que se encuentra unas ciertas líneas” (en Hegel [1985] p. 285). Parece que esta afirmación es correcta únicamente sobre diferenciales de variables elevadas a dos.
[1008] Cf. Wolff [1986] p. 225: “Die Gleichung *dx/dy=P* drück gar nichts weiter aus, als daß *P ein Verhältnis* ist, und es ist dem *dy/dx* sonst kein reeller Sinn zuzuschreiben. Von diesem Verhältnis=*P* ist es aber ebenso noch unbekannt, welchem anderen Verhältnis es gleich sei”.
[1009] Cf. Barrow [1674] p. 81.



En él, Barrow supone que la proporción entre *MR* y *NR* es igual a la proporción entre *NQ* y *TQ*[1010]. La proporción entre *MR* y *NR* equivale, en el límite, a la proporción entre los diferenciales de la función, es decir, a la proporción expresada por la primera función derivada $f'(x)$. A su vez, la proporción entre *NQ* y *TQ* es el equivalente a la primera derivada de la función de la tangente o $\varphi'(x)$. Por esta razón, decíamos, la igualdad entre las proporciones

MR:*NR*::*NQ*:*TQ*

es equivalente, en Lagrange, a esta otra igualdad;

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

La diferencia entre los dos autores, diferencia merced al cual se distingue Lagrange frente a sus precedentes, consiste en que, en Lagrange, el cociente de diferenciales tiene realidad antes de ser igualado al cociente que expresa la pendiente de la tangente. Como ya se ha visto, esta característica de $f'(x)$ es el de ser el primer coeficiente de *i* en la expansión de $f(x+i)$. Frente a esto, en una aproximación geométrica como la de Barrow, la proporción *MR*:*NR* no sólo no tiene sentido sino ni siquiera realidad fuera de la proporción *MR*:*NR*::*NQ*:*TQ*. Lagrange, debido a que llega a separar el formalismo de su aplicación, puede obtener la función derivada sin que tenga que recurrir a su significado, digamos, intuitivo. Como decíamos, esto hace que Lagrange consigua librarse de las nociones poco rigurosas como el de la fluxión, la diferencia infinitesimal o, en el ejemplo de Barrow, el triángulo infinitesimal *NMR*.

Además de ello, la derivada de una función se distinguirá de un cociente como *MR*:*NR* en el hecho de que la primera es, a su vez, una función que depende de *x*. Lo que cambia con el valor de la variable independiente *x* no es el valor de la variable dependiente *y*, sino la variación de la relación entre la variable *x* y la variable *y*. De ahí que, tal y como dice Hegel,

[1010] Barrow hace uso de la notación siguiente: *m*=*PM*, *t*=*PT*, *a*=*MR* y *e*=*NR*. De este modo podrá decir: “Pro *a* ipsam *m*; (vel *MP*) pro *e* ipsam *t* (vel *PT*) substituo”.

el cociente de diferenciales no sea una igualdad, sino, más bien, una relación o, mejor dicho, la ley de la variación de una relación. Dado que el denominador del cociente de diferenciales suele ser el diferencial de la variable independiente, su derivada será igual a uno[1011] y el cociente de diferenciales expresará lo que se denomina la pendiente de la tangente.

Por último, es importante observar la analogía entre la estructura que rige esta demostración y aquella que domina en la definición de la continuidad mediante el uso del límite[1012]. Si en el caso del límite teníamos que para cualquier ε era posible encontrar un δ menor que él, ahora, en el caso de la tangente, tenemos que para cualquier posible candidato para la tangente *f(x)* que sea distindo de $\varphi(x)$ es posible encontrar una solución según el cual la función $\varphi(x)$ siga siendo la verdadera tangente. Un razonamiento análogo a éste volverá a aparecer en la aplicación del cálculo en la física. De esta aplicación pasamos a ocuparnos en el siguiente apartado.

4.2.5.3.2 El significado del formalismo en la física

La principal diferencia entre el razonamiento que sigue Lagrange en la aplicación del cálculo en la física y el que sigue en la aplicación en la geometría consiste en que, en el primer caso, la expansión de la función que se propone como aproximación a la función que describe, digamos, la verdad está limitada a tres términos. En esta aplicación fisica se parte de una función del espación en función del tiempo: *f(x)*. El espacio recorrido después de un tiempo *i* será:

$$f(x_0+i)-f(x_0)=if'(x_0)+\frac{i^2}{2}f''(x_0)+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x_0+j)$$

Donde, nuevamente, *j* toma un valor entre 0 y 1. Esta función es la que describe el movimiento verdadero[1013] del cuerpo. La aproximación en el punto x_0 para la función del espacio expresado por:

$$f(x_0+i)=f(x_0)+if'(x_0)+\frac{i^2}{2}f''(x_0)+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x_0+j)$$

[1011] Es decir, si tenemos que $y=x^2$, entonces, $d(y)=d(x^2)$ luego $1dy=2xdx$ luego $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1}=2x$.

[1012] Aquella definición cuyo origen habíamos localizado –cuando se trataba de definir el infinitesimal– en Leibniz y que denominábamos *epsilóntica*. Veremos en el apartado 4.3.1 que la formulación primitiva –definción que, anacrónicamente, estamos denominado *epsilóntica*– no coincide plenamente con la de Cauchy. Digamos que si Cauchy definía la variable ε en el dominio de la variable dependiente y la variable δ en el dominio de la variable independiente, nosotros nos estamos limitando a una versión anterior de la misma en la que tanto ε como δ se definen en el dominio de la variable dependiente. Sobre la importancia para el proceso de *desdinamización* de comenzar definiendo primero el límite de precisión de la variable dependiente para luego pasar a hayar un valor de δ cf. Courant [1969] pp. 46 y 47. Sobre la relación entre los diferenciales y la noción del continuo cf. Russell [1937] p. 326.

[1013] Lagrange habla de "véritable mouvement" (en Lagrange [1881] p. 341).

es éste:

$$f(x_0+i)=f(x_0)+if'(x_0)+\frac{i^2}{2}f''(x_0) \qquad [26]$$

La razón de que no se consideren términos en la función de aproximación que tengan como multiplicando un coeficiente *i* con una potencia mayor que el dos consiste en que estos movimientos no encuentran una correspondencia en ningún movimiento cognoscible. Es decir, debido a que los únicos movimientos que se pueden conocer en la mecánica clásica son las expresadas por las fórmulas $f(x)=ax$, $f(x)=bx^2$ y el compuesto $f(x)=ax+bx^2$, la función $f(x)=ax+bx^2+cx^3+\ldots$ que expresa el movimiento de cualquier cuerpo resultará superflua a partir del tercer término[1014]. El error que cometemos a raíz de esta limitación teórica será igual a $\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x_0+j)$.

Tomemos ahora otra expresión alternativa para la descripción del movimiento que sea teoricamente aceptable. La forma general de esta expresión será:

$$F(x)=ax+bx^2$$

El error que se cometerá con esta aproximación general será:

$$i\big(f'(x_0)-F'(x_0)\big)+i^2\left(\frac{1}{2}f''(x_0)-\frac{1}{2}F''(x_0)\right)+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x_0+j)=i\big(f'(x_0)-a\big)+$$
$$+i^2\left(\frac{1}{2}f''(x_0)-b\right)+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x_0+j)$$

Luego, la condición para que este error sea, para cualquier valor de *i*, menor que el error cometido por la primera primera aproximación será:

[1014] Nótese que la justificación de la omisión de lo términos mayores que la segunda potencia es más teórica que positiva. La razón de la omisión no se basa en que no se pueda detectar un movimiento cuya descripción correcta sea dada por la expresión [18], sino a que tal movimiento carece de traducción teórica. La postura positivista, postura que Lagrange mismo a veces defenderá, tiene que cargar con la inconsecuencia de que teniendo una formula cognoscitivamente más potente que otra, se quede con la menos potente bajo el argumento de que ir más allá sería ir más allá de lo cognoscible: es decir, se rechaza lo que permite conocer mejor bajo el argumento de que no se puede conocer mejor. Una vez que haya quedado claro esto, resultará extraño encontrar afirmaciones de Lagrange en donde considera que la naturaleza –en el sentido de “lo empírico”– demuestra los presupuestos con los que se estaba trabajando al reducir la formula para la descripción del movimiento a un polinómio de segundo grado: “Plusieurs phénomènes de la nature, et surtout les résultats des differentes expérieneces qu’on a imaginées sur la chute des corps, confirment pleinement la conclusion que nous venons de trouver, et qui doit être regardée comme le principe fondamental de toute la théorie du mouvement” (en Lagrange [1881] p. 342). ¡Como si un Principio fuese capaz de ser corroborado –o refutado– por la experiencia!

$$F'(x_0) = a = f'(x_0)$$

$$F''(x_0) = b = f''(x_0)$$

y, en general[1015], si la aproximación ha de ser válida en cualquier punto:

$$F'(x) = a = f'(x)$$

$$F''(x) = b = f''(x)$$

Es decir, cualquier otra aproximación que sea diferente a la nuestra –es decir, que sea diferente a la aproximación [26]–, será una aproximación peor. Vemos así que el argumento físico de Lagrange es estrictamente análogo[1016] al argumento geométrico que ha sido ilustrado con el ejemplo de la tangente. El razonamiento recuerda las pruebas de reducción al absurdo en las que se demuestra la igualdad entre dos términos demostrando el carácter contradictorio de todas la desigualdades posibles.

4.3 HEGEL DESPUÉS DE HEGEL

4.3.1 El retorno de la noción de límite: Cauchy

En una primera aproximación, la terminología de la que hace uso Cauchy en su obra principal sobre el cálculo infinitesimal[1017] llama la atención por el retorno de expresiones que se presuponía habían sido desterradas del cálculo por Lagrange. Cauchy no sólo hablará de límites o de aproximaciones, sino que tampoco tendrá reparos en hacer uso de los controvertidos infinitesimales. Parece así que el lenguaje "dinámico" tan denostado por Lagrange vuelve a aparecer en las lecciones de Cauchy. De este modo, las variables podrán "aproximarse indefinidamente"[1018] a un valor constante que, en el caso del infinitesimal, puede ser cero. Este valor constante es el límite de la variable en cuestión.

Sin embargo, una aproximación mejor al texto de Cauchy muestra que el trabajo del matemático francés en la fundamentación del cálculo no se reduce a retomar simplemente conceptos pre-lagrangianos para ofrecer una mayor precisión en la definición de los mismos. El concepto de límite que ofrece Cauchy en su *Résumé* ofrece novedades importantes que ahora toca analizar. La definición verbal del límite es el siguiente:

[1015] Cf. Lagrange [1881] p. 342. Cf. sobre este punto Moretto [1984] p. 197.

[1016] Con la diferencia a la que hemos hecho alusión al comienzo de este apartado.

[1017] Nos referimos al *Résumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul infinitesimal* y a las *Leçons sur le Calcul différentiel*, ambos publicados en Cauchy [1899].

[1018] Cf. Cauchy [1899] p. 16. Cf. al respecto Wolff [1986] p. 209: "ist die phoronomische Vorstellung der ‚Annäherung', die in der Limes-Definition auftritt, noch ein Rest von Anschaulichkeit, der erst seit Weierstraß durch ε, δ-Definitionen beseitigt worden ist".

Lorsque les valeurs succesivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette derniére est appelée la limite de toutes les autres[1019]

Nótese que Cauchy no dice que la variable sea igual al límite, como dirá Newton, en la última razón, sino únicamente que la diferencia puede ser menor que cualquier diferencia dada. Esto no significa que Cauchy comparta la clausula de "jamais surpasser la grandeur dont elle approche" de la definición del *limite* de d'Alembert[1020]. Esta prohibición no aparece en la definición de Cauchy. Si tenemos en cuenta que era habitual encontrar esta clausula en las definiciones del límite del siglo XVIII[1021], la ausencia de la misma en la definición de Cauchy bien puede considerarse una omisión.

Si bien es verdad que Cauchy atribuye una aproximación a la variable hacia un valor fijo, cierto es también que esta aproximación no se explica desde algo así como el *movimiento* de la variable o su *tendencia* a alcanzar el límite. El acento se pone en el concepto de la variable como un conjunto de valores de entre los que se van tomando, sucesivamente, unos[1022]. De hecho, en la definición de la derivada hay dos conjuntos involucrados de los que se toman los valores. Estos dos conjuntos son el conjunto de la variable independiente x y el conjunto de la variable dependiente $f(x)$. Cuando se trata de expresar la aproximación de una variable f a un límite, lo habitual es hacer que f dependa de una variable independiente x de modo tal que cuando ésta varíe hacia una cierta constante el valor de $f(x)$ tienda al límite. Esta formulación es la que podríamos llamar "formulación cinemática del límite". Frente a esto, en la formulación de Cauchy no hay algo así como un fluir de una variable sobre cuyo fondo varíe la variable dependiente. La definición *epsilóntica* de Cauchy comienza por definir dos variables ε y δ en el conjunto de la variable independiente y dependiente respectivamente. En vez de comenzar a variar la variable independiente, Cauchy determina un error ε[1023] para la variable dependiente. La parte propiamente asertiva de la definición afirma que es posible encontrar un valor δ de la variable dependiente tal que el valor $f(\delta)$ esté dentro del error permitido ε. Como se supone que los valores de la variable independiente aumentan o[1024] disminuyen con la variable dependiente en los alrededores del límite, el error será menor cuando la variable independiente disminuye, con lo que para todo valor i menor que δ tendremos que el error cometido es menor que el prescrito ε. El último paso consistirá en afirmar la posibilidad de encontrar un valor δ que cumpla con las mencionadas características no ya para un valor ε en particular, sino para cualquier valor ε[1025]: para cualquier límite propuesto ε[1026], siempre será posible encontrar un valor de la variable independiente tal que el correspondiente valor de la variable dependiente se encuentre dentro de este límite. Vemos así que la formulación de Cauchy no recurre al fluir de las variables para garantizar la aproximación de la variable independiente a su límite. En vez de ello, Cauchy propone un mecanismo lógico con el que, sin recurrir a representaciones del movimiento, se recorra todo

[1019] Cf. Cauchy [1899] p. 13.
[1020] Cf. el artículo "limit" de d'Alembert en la *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*.
[1021] Cf. Grabiner [2005] p. 84.
[1022] Cf. Grabiner [1990] p. 203: "This focussing on the set of values, rather than on a magnitude which moves or changes, brings us away from the intuitive realm of motion and into the realm of arithmetic or algebra".
[1023] Cf. Grabiner [2005] p. 76: "[...] the Greek letter ε used by modern mathematicians –a notation that Cauchy originated and applied in several of his proofs– probably comes from the correspondance between '*epsilon*' and the initial letter of the French word *erreur*".
[1024] La disyunción es aquí exclusiva.
[1025] Cf. Courant [1969] p. 47.
[1026] Es decir, para cualquier error dado.

el espectro de los valores de la variable hasta alcanzar el límite. Es importante observar que el motor de este complejo lógico[1027] no es otro que el de la contradicción o la reducción al absurdo. El absurdo no es otro que el de suponer que hay un valor ε, un error, que no es superable o mejorable. La definición *epsilóntica* del límite, definición con la que se define la continuidad o el diferencial de una función, niega que pueda haber tal posibilidad. Y lo niega no para un error ε particular, sino para cualquier[1028] valor de ε. De este modo, el único lugar en el que se está a salvo de la contradicción es el límite y por eso habrá una tendencia lógica a *moverse* hacia él.

Vemos así que, en contra de lo que se suele afirmar, la definición de límite de Cauchy no invalida ni va en contra de la lectura hegeliana del cociente diferencial. Más bien al contrario. La contradicción, motor de toda la implosión de la *Wissenschaft der Logik*, era, en su forma concreta del infinitesimal, aquello cuya superación exigía el cociente diferencial. Pero decir cociente diferencial es decir que el límite, si es que existe, ya se ha alcanzado[1029]. Del mismo modo en que la superación de la contradicción en el que consiste el infinitesimal es el cociente infinitesimal, la superación de la contradicción que subyace en la definición del límite de Cauchy es el mismo límite. Podría parecer que la diferencia entre Cauchy y Hegel consiste en que para el primero lo contradictorio es la entera relación en el que se define la noción de límite, mientras que para el segundo sólo las partes del cociente son lo contradictorio[1030], siendo la totalidad en el que consiste el cociente lo especulativo. Esta afirmación olvida, sin embargo, que para Cauchy el infinitesimal es ya un compuesto relacional y, más concretamente, el resultado de la aplicación de la noción de límite[1031].

Otro aspecto importante sobre el que Grabiner[1032] llama la atención consiste en que la aproximación al límite puede realizarse indistintamente, digamos, desde la izquierda o la derecha. Es decir, lo importante es el valor absoluto del error o la diferencia y no su signo. Como veremos, esto hará posible traducir al álgebra de las inecuaciones la definición de límite dada por Cauchy y, con ello, ofrecer una definición moderna del cociente diferencial. El álgebra de inecuaciones y la formulación *epsilóntica* del límite permitirán a Cauchy ofrecer una definición de la derivada en la que se unifiquen los dos sentidos del concepto de "límite" habituales en el lenguaje del cálculo del siglo XVIII[1033]. El límite puede ser, por un lado, el valor fijo al que tiende o se aproxima una variable. Por otro lado, el límite de una variable es la frontera en la que se encuentran los valores posibles de esta variable. Hemos tenido ocasión de ver que la noción de "límite", en su primera acepción, es eliminada del lenguaje del cálculo por Lagrange. No ocurre lo mismo con la segunda acepción de "límite" que es utilizada por Lagrange cuando procede a calcular los límites del resto que lleva su nombre. Este segundo sentido de la noción de límite tiene su expresión matemática en las inecuaciones.

[1027] Complejo ya analizado en nuestro trabajo en la versión primitiva ofrecida por Newton.
[1028] Recuérdese que, a raíz de la distinción que hemos detectado entre Leibniz y Euler, evitamos decir "todo" en lugar de "cualquier".
[1029] Debido a que se ha dejado atrás el cociente de diferencias finitas.
[1030] A saber, los infinitesimales.
[1031] Para la definición del infinitesimal cf. Cauchy [1899] p. 16: "Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable dècroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite".
[1032] Cf. Grabiner [1990] p. 203.
[1033] Cf. Grabiner [1990] p. 199.

De este modo, unificar los dos sentidos de límite en la noción de derivada significará hacer uso de la definición de límite reproducida más arriba haciendo uso de inecuaciones. Siendo esto así, la definición verbal de la derivada ofrecida por Cauchy será la siguiente[1034]:

$$(1)\ \frac{f(x-\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h\,,$$

La limite vers laquelle converge le premier membre de l'équation (1), tandis que la variable α s'approche indéfiniment de zéro, la quantité h demeurant constante, est ce qu'on appelle la différentielle de la fonction y=f(x)[1035]

A su vez, la versión formal de esta definición será la siguiente:

Désignons par δ, ε deux nombres très petits, le premier ètant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inferieures à δ, et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0 *, X, le rapport*

$$\frac{f(x+i)+f(x)}{i}$$

reste tojours supérieur à $f'(x)$ *- ε et inférieur à* $f'(x)+\varepsilon$[1036]

La inecuación tendrá, por ello, esta forma:

[1034] Téngase en cuenta que *i* es definido como *i*=*αh*, donde las variables *α* y *i* son infinitamente pequeñas y *h* es una variable finita. Esta última variable representa la unidad con la que comienza la progresión aritmética que representará la variación de la variable independiente *x*. Recordemos que el aumento de variable *x*, al ser independiente, es representada por una progresión aritmética que, en el caso en el que *h*=1, tendrá la forma: 1,2,3,... La forma general de este progresión es: *h*, 2*h*, 3*h*,... Esta forma general, forma con la que trabaja Cauchy, pone de manifiesto que la elección de la unidad de medida de la progresión aritmética en relación al cual se medirán las progresiones de las restantes variables dependientes es tan arbitraria que, de hecho, puede tomar un valor indeterminado *h*. Dado que, al ser posible elegir el orden en el que queremos considerar la uniformidad en el que varía la variable dependiente, se parte del orden infinitesimal como aquél en el que comparar las progresiones de las distintas variables, será lógico asignar a la diferencia infinitesimal *dx* el valor *h*. A este resultado llega Cauchy cuando procede a obtener el diferencial de la función identidad. De hecho, Cauchy llegará al resultado doble de *dy*=*h* y *dx*=*h*. El caso es que al ser la variable *x* la que implícitamente es considerada independiente, el resultado con el que se queda, resultado que va más allá de ser una mera aplicación de la expresión para el diferencial de Cauchy sobre la función idéntica, será *dx*=*h*. Con ello la expresión $dy=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=y'h$ dará lugar a la expresión habitual para nosotros $y'=\frac{dy}{dx}$. Sobre esta *h* se expresará Cauchy en estos términos en las *Leçons sur le Calcul différentiel*: "Quant à cette dernière quantité, qui représente la différentielle de la variable indépendante, elle reste entièrement arbitraire, et l'on peut la supposer égale à une constante finie *h*, ou même la considerar comme une quantité infiniment petite" (en Cauchy [1899] p. 289).

[1035] Cf. Cauchy [1899] p. 27.

[1036] Cf. Cauchy [1899] p. 44.

$$f'(x)-\varepsilon \leq \frac{f(x+i)-f(x)}{i} \leq f'(x)+\varepsilon$$

o, lo que viene a ser lo mismo:

$$f(x+i)=f(x)+i(f'(x)\pm\varepsilon) \qquad [27]$$

Donde esta última expresión es la versión sintética de la expresión de Taylor utilizada por Lagrange en su *Théorie des fonctions analytiques*. Vemos que con Cauchy, la expresión [27] es algo que se obtiene directamente de la definición del diferencial y no, como en Lagrange, una de las propiedadades del diferencial[1037]. Esta diferencia se debe al papel central que tiene en Cauchy la definición *infinitesimalista* con δ y ε. El uso de las variables δ y ε sólo tiene sentido en su relación mutua sin que sea posible desvincular la variación de la variable δ de la variación de la variable ε. El límite δ es puesto en relación con el límite ε. Esto último encaja con la afirmación en el que Hegel subraya la importancia de considerar a la variable *dx* en su relación a *dy* y no en relación a la variable *x*[1038]. La segunda de las interpretaciones es la que considera a *dx* como un incremento de la variable *x* y la que termina recurriendo a argumentos cuantitativos dificilmente sostenibles cuando se enfrenta con el problema de justificar la omisión de los infinitesimales de distintos ordenes[1039]. Hemos visto ya que la definición de la derivada por δ y ε tiene en cuenta esta relación entre la variación de la variable independiente y la variación de la variable dependiente. Esta relación es consecuencia de haber definido a la variable dependiente *y* como una función de la variable independiente *x*. Cauchy tendrá en cuenta esta perspectiva pero, al mismo tiempo, concebirá los diferenciales a partir de las diferencias finitas[1040]. Pero sabemos ya cuál es el problema de partir de las diferencias finitas. Este problema consiste en considerar también a los infinitesimales como diferencias cuando lo cierto es que, la infinitud de los infinitesimales

[1037] Propiedad que, como hemos visto, se fundamentaba en el hecho de que la expresión *p* era el coeficiente de la variable *i*.

[1038] Cf. Hegel [1985] p. 269.

[1039] No estamos de acuerdo con Wolff cuando afirma (en Wolff [1986] p. 234) que Cauchy olvida la relación en la que se definen *dx* y *dy*. Para Wolff en el *Résumé* de Cauchy la igualdad $df(x)=f'(x)dx$ es un resultado y no la expresión misma de la definición de la derivada. Según Wolff, para llegar a este resultado es necesario pasar por el caso particular (*spezieller Fall*) consistente en aplicar la definición de la derivada sobre la función *f(x)=x*. Pero lo cierto es que la aplicación de la definición de la derivada sobre la función identidad *no* es una más de las aplicaciones posibles de esta definición. Tal y como ha tenido que quedar claro en la parte dedicada a la evolución histórica del cociente diferencial en Newton, la función idéntica no es una más de entre las funciones sino aquella en la que se basan todas ellas a la hora de expresar cuantitativamente la variación de sus respectivas variables dependientes. De este modo, el resultado *dx=h* al que llega Cauchy no es un resultado particular sino algo que está en la base de todas las restantes funciones de dos variables; a saber, que en todas ellas la variable independiente es la variable *x*. En definitiva, la supuesta aplicación de la definición de la derivada forma parte, más bien, de ella y no es un añadido o una nueva proposición. Cauchy expresará la importancia de considerar los infinitesimales en su relación en el siguiente pasaje: "Mais, tandis que ces deux termes [Δy y Δx] s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative" (en Cauchy [1899] p. 22). La versión de las *Leçons sur le Calcul différentiel* añade: "qui sera la dernière raison des différences infiniment petites Δy et Δx" (en Cauchy [1899] p. 288).

[1040] Pueden encontrarse algunos ejemplos del paso de las diferencias finitas a los diferenciales en Cauchy [1899] p. 290. Recuérdese que el riesgo de hacer uso de las expresiones de las diferencias finitas consiste en, entre otras cosas, ingorar la dependencia de la diferencia Δy con respecto a la diferencia Δx .

consiste, precisamente en que, como dirá Hegel, tienen este caracter de ser una diferencia o una aproximación a sus espaldas[1041].

Es muy probable que el conocimiento de Hegel de la obra de Cauchy se reduzca a la recensión[1042] que escribió su amigo y profesor de matemáticas Dirksen sobre el *Résumé* de Cauchy en una revista en la que Hegel mismo era redactor: la *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik*. En esta recensión[1043] Dirksen se propone resumir el contenido de dos novedades editoriales del ámbito del análisis que aparecieron en el periodo comprendido entre la primera y la segunda edición de la *Wissenschaft der Logik*. La primera de ellas, los *Neue Principien des Fluentencalcüls* de Wilhelm Spehr fue publicado en el año 1826. El segundo libro recensado por Dirksen es el *Resumé* de Cauchy publicado en 1823. Lo cierto es que el artículo de Dirksen es algo más que un resumen de estas dos obras. Así, toda la primera mitad del artículo está dedicada a ofrecer un repaso de la historia del surgimiento del cálculo de Leibniz a Lacroix. Después de ello viene la recensión del *Principien des Fluentencalcüls* de Spehr. En éste el matemático alemán hace uso de conceptos como el de "devenir" (*Werden*), "magnitud que fluye" (*fliesende Größe*) o "tendencia" (*Bestreben*), conceptos éstos que, para Hegel, no son más que residuos con contenido empírico que hay que soterrar del cálculo[1044]. Es importante observar aquí que precisamente aquellas nociones o conjunto de nociones por las cuales será criticada la filosofía del Cálculo de Hegel por todos aquellos que no han tenido el cuidado de leerla son expresamente rechazadas por éste. Y si entre estas nociones descartadas se encuentra también el devenir o el llegar a ser –categoría ésta que forma parte del devenir de la *Wissenschaft der Logik*– entonces habrá que concluir que lo mentado por Hegel con esta palabra y lo mentado por Spehr apenas tienen algo que ver entre sí. Dicho brevemente, esta diferencia consiste en que este último entiende por devenir algo que tiene lugar en el tiempo mientras que para Hegel el devenir[1045] es algo que tiene lugar en el medio denominado pensamiento.

La recensión de Dirksen del *Résumé* es algo más concisa y, al mismo tiempo, más completa. Éste llega a ofrecer un resumen, a veces de una mera línea, de cada capítulo de la obra de Cauchy. En lo que a nuestro tema se refiere, Dirksen reproduce el texto original en el que Cauchy define la propiedad de la continuidad de una función o el diferencial. Esta última definición[1046] apenas le merece a Dirksen una mención especial. La definición del cociente diferencial de Cauchy es para Dirksen equivalente a las definiciones ofrecidas por Newton o Leibniz[1047]. No parece que Dirksen, probablemente el único acceso que tiene Hegel a la obra de Cauchy, sea consciente de la distinción entre la definición del cociente diferencial de Leibniz o Newton y la de Cauchy. Para ver si esto es así, es necesario pasar a ver la lectura de Dirksen del cociente de diferencial de Leibniz y Newton. En lo que se refiere al primero[1048],

---

[1041] Cf. Hegel [1985] p. 269: "*dx* hat die Annäherung bereits im Rücken".
[1042] La referencia a esta recensión se encuentra en Hegel [1985] p. 268.
[1043] Cf. Dirksen [1827] pp. 1217-1271.
[1044] Cf. Hegel [1985] p. 267: "Die Kategorie von der kontinuierlichen oder fließenden Größen stellt sich mit der Betrachtung der äußerlichen und empirischen Veränderung der Größen, die durch eine Gleichung in die Beziehung, daß die eine eine Funktion der anderen ist, gebracht sind, ein". Cf. también Hegel [1985] p. 300: "ist es zu verwundern, wie derselbe [Spehr] sich in die (ebendas. angeführte) formelle Metaphysik von kontinuierlicher Größe, Werden, Fließen u.s.f. hat einlassen und solchen Ballast noch mit neuem gar hat vermehren wollen".
[1045] Devenir que es lo mismo que "contradicción" siendo una de sus manifestaciones el diferencial.
[1046] Definición recogida en Cauchy [1899] p. 27 y que hemos reproducido en la pág. 245.
[1047] Cf. Dirksen [1827] p. 1264: "Man sieht leicht, das diese Definition des Differenzials, dem Wesentlich nach, mit der von Leibniz und Newton gegebenen vollkommen übereinstimmt".
[1048] Cf. Dirksen [1827] p. 1225.

Dirksen se basa en una epístola[1049] de Leibniz para afirmar que según éste el valor de la diferencial de una función φ es aquél valor $X_{(1)}$ tal que la expresión $\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-X_{(1)}$ se aproximará a cero cuanto más se aproxime Δx a cero. Vemos con ello que esta definición, si bien es cierto que se ajusta a lo que Leibniz entiende por diferencial y que contiene, como hemos visto, los gérmenes de la definición *epsilóntica* de Cauchy, hace uso, sin embargo, de la noción de aproximación ajena a la definición de Cauchy. La definición parte de dos variables, una independiente, otra dependiente, en el que la variación y la consecuente aproximación de la primera a un cierto límite implica la sucesiva aproximación de la otra a un cierto límite. Pero ya hemos visto que esta lectura del límite –y, por ello, del diferencial– tiene necesariamente que recurrir a nociones, por así decir, foronómicas que serán desterradas del cálculo por Cauchy y de la filosofía del cálculo por Hegel.

En lo que se refiere a la definición newtoniana del diferencial presentada por Dirksen, cabe decir que la misma apenas se distingue de la definición que da Dirksen del coeficiente diferencial leibniziano. Decimos con Newton que *T* es el valor del coeficiente diferencial de una función si su valor se aproxima a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero[1050]. Lo mismo que hemos dicho de la versión del cociente de diferencial de Leibniz cabe decir aquí sobre la versión de Newton. La diferencia entre las dos consiste en la distinta terminología a la que recurren para nombrar el momento en el que las diferencias pasan a ser diferenciales. Así, mientras que el primero recurrirá a la ley de continuidad, el segundo hablará de la primera y última razón del cociente.

Pero el descuido de Dirksen a la hora de apreciar la diferencia entre Cauchy, por un lado, y Leibniz y Newton, por el otro lado, puede ser menos relevante de lo que pudiera parecer para nuestro propósito. En una situación como ésta en la que el diálogo que *de facto* pudiera haberse dado entre Hegel y Cauchy corre el peligro de, o bien, disolverse, o bien, de distorsionarse, hemos optado por reconstruir un diálogo en el que se manifieste la capacidad del dicurso de la *Wissenschaft der Logik* para dar una respuesta a la novedad introducida por Cauchy en los conceptos fundacionales del cálculo. En definitiva, hemos visto que aquello que podría considerarse como el logro principal de las definiciones de Cauchy, a saber, la eliminación de elementos empírico-foronómicos del cálculo, concuerda con el proyecto de Hegel en relación al cociente diferencial. Con ello no podíamos menos que considerar un verdadero despropósito la postura de todos aquellos que se limitaban a sacar al terreno de

---

[1049] Cf. *Responsio ad nonnullas Difficultates, a Dn. Bernardo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalen motas* en Leibniz [1858] pp. 320-328.

[1050] Cf. Dirksen [1827] pp. 1235-1236: "*T* gleich dem letzten Verhältnisse von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; und $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=T$. Eliminiert man hier den Begriff des letzten Verhältnisses mittels der obigen Erklärung, so erlangt man *T* gleich einer Größe, welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich nähere, je nachdem Θ sich der Null nähert, und welcher dieses Verhältniß, bevor $\Theta = 0$ wird, so nahe komme, daß der Unterschied kleiner als jeder gegebene werde. Da nun, der Annahme nach, Δx der Null sich nähert, je nachdem Θ der Null sich nähert; so hat man auch, die Zeit Θ eliminierend, *T* gleich einer Größe, der $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich nähere, je nachdem Δx sich der Null nähert, und welcher das Verhältnis, bevor Δx Null erreicht, so nahe kommen könne, daß der Unterschied kleiner als jeder gegebene werde; und dann ferner $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=T$".

juego los nombres de Cauchy y Weierstraß para, con ello, descalificar el supuesto caracter dinámico de la lectura hegeliana de los diferenciales[1051]. Las fuentes de esta confusión culpable las localizábamos en la pereza de algunos críticos en general y en el despieste creado por el término *Werden* en particular.

4.3.2 Weierstraß

En relación a la definición del cociente de diferenciales, el trabajo de Karl Weirstraß presenta una doble cara. Por un lado, en los trabajos más técnicos del matemático la definición de la derivada recurre a la noción usual de infinitesimal sin que pretenda ajustarse a los márgenes de rigor establecido por Cauchy[1052]. En este mismo sentido, no faltarán en Weierstraß expresiones en los que se hable del aumento observado en una variable independiente o dependiente[1053]. Algo enteramente distinto ocurre cuando Weierstraß pretende definir el cociente diferencial y no meramente usarlo. De este modo, si queremos encontrar el rigor característicamente *weierstrassieno* en la fundación del cálculo lo tendremos que buscar en los apuntes publicados de sus lecciones sobre la teoría de funciones y no, por ejemplo, en sus artículos sobre la Teoría de las funciones elípticas[1054].

La definición de lo infinitamente pequeño (*unendlich klein*) de Weierstraß tiene la peculiaridad de que no lo define aisladamente[1055], sino que lo hace en el contexto de otro infinitesimal. En particular, veremos que lo infinitamente pequeño o el diferencial es definido únicamente dentro del coeficiente diferencial. Por ejemplo, la definición de las lecciones sobre la teoría de las funciones analíticas es la siguiente:

Wenn jedem Werthe von x ein Werth von y entspricht, so können x und y unendlich klein werden, wenn nämlich nach Feststellung einer beliebig kleinen Grösse ε für die eine

[1051] Habrá quedado claro a lo largo de los distintos apartados de este trabajo que lo que Hegel entiende por "movimiento" del concepto no tiene nada que ver con algo que tenga como fundamento la representación del tiempo. Cf. al respecto Hegel [1985] p. 302: "aber die Bewegung schließt die Zeitbestimmung ein und erscheint so in jener Vorstellung mehr nur als eine zufällige, äußerliche Veränderung des Zustandes; es ist aber die Begriffsbestimmtheit, die als Außersichkommen ausgedrückt worden, zu nehmen". El movimiento al que se refiere Hegel en este pasaje es aquél con el que se pretenden construir figuras de una dimensión *n+1* a partir de figuras con una dimensión *n*. Volveremos sobre este punto en el apartado 6.2.4.

[1052] Cf. por ejemplo, Weierstraß [1894] p. 51: "es sei für jeden unendlich kleinen Werht von k der Unterschied der Quotienten: $\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk}$, $\frac{F(x+k)-F(x)}{k}$ ebenfalls unendlich klein für jeden Werth von x innerhalb der bezeichneten Grenzen und für jeden Werth von h".

[1053] Cf. Weierstraß [1988a] p. 153 y Weierstrasß [1988b] p. 74.

[1054] Sobre las dificultades derivadas de este desdoble de la obra de Weirstraß cf. Poincaré [1899] pp. 3-4: "C'est pour cela qu'il est si difficile de rendre un compte exact des travaux mathématiques de Weierstrass; ce n'est pas seulement parce que son oeuvre imprimée este considérable; c'est surtout parce que cette oeuvre ne le contient pas tout entier. Longtemps les plus importants de ses ouvrages son restés inédits et c'était dans son enseignement oral qu'il prodiguait les trésors de sa science".

[1055] Algo que, recordemos, sí hará Cauchy. En el curso de 1878 Weierstrasß define un infinitesimal sin la remisión a otro inifinitesimal en los siguientes términos: "Wir sagen von einer veränderlichen Größe –sei sie nun unbeschränkt oder beschränkt veränderlich–, sie könne unendlich kleine Werthe annehmen oder sie sei solcher Werthe fähig, wenn unter den Werthen, die sie annehmen kann, Größen sind kleiner als jede beliebig klein angenommene Größe" (en Weierstraß [1988b] p. 57).

Variabele sich für die andre eine kleine Grösse δ bestimmen lässt, dass die erste $<\varepsilon$ wird, wenn die zweite $<\delta$ ist[1056]

Esta definición es la que se necesita para definir el concepto de continuidad. Por ejemplo, haciendo uso de la noción de entorno para expresar para los números complejos lo mismo que Cauchy expresa en términos reales diciendo que una variable es menor que δ, la definición de continuidad recogida en los apuntes del semestre de invierno de 1877-78 es ésta[1057]:

Una funzione di una variabile x si dirà continua entro certi limiti di valori di x se preso un valore qualunque x_0 entro quei limiti e un numero ε piccolo ad arbitrio, sarà possibile trovare un tale intorno di x_0 che per tutti i valori x' presi in questo intorno, sia in valore assoluto $f(x')-f(x_0)<\varepsilon$ [1058]

Extendiendo el procedimiento de Lagrange a las funciones con variables complejas, Weierstraß recurre a la expansión de una función mediante una serie de potencias para definir el diferencial. En una definición equivalente en las funciones complejas a la de la continuidad en las funciones con variable real, Weierstraß mostrará[1059] que para cualquier δ siempre será posible encontrar un valor absoluto de *h* tal que $f(x_0+h)+f(x_0)<\delta$. Una vez sentado esto, la expansión de una función con una única variable *x* será[1060]:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf_1(x_0)+h^2 f_2(x_0)+...=hf_1(x_0)+h^2(f_2(x_0)+...)$$

El argumento para omitir el término cuyo coeficiente es h^2 y, con ello, el fundamento para quedarse únicamente con la función $f_1(x)$ con el que definir el diferencial no es otro que el argumento clásico que subraya la pequeñez de *h* en comparación con h^2. Tal y como hemos visto ya, el argumento de la relativa pequeñez será criticado por Hegel que, frente a ello,

---

[1056] Cf. Weierstraß [1986] p. 39. Cf. también Weierstraß [1988b] p. 57: “Eine veränderliche Größe *x* wird mit einer andern *y* gleichzeitig unendlich klein, heißt: “Nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε läßt sich für *x* eine Grenze δ feststellen, so daß für jeden Werth von *x*, für welchen $|x|<\delta$, der zugehörige Werth von $|y|<\varepsilon$ wird””.

[1057] Una definición en la que se hace uso tanto de η como de ε es recogida por el discípulo de Weierstraß, E. Heine: “Eine Function *f(x)* heisst *bei einem bestimmten einzelnen Werthe x=X continuirlich*, wenn, für jede noch so klein gegebene Grösse ε, eine andere positive Zahl η_0 von solcher Beschaffenheit existiert, dass für keine positive Grösse η, die kleiner als η_0 ist, ser Zahlwerth von $f(X\pm\eta)-f(X)$ das ε überschreitet” (en Heine [1872] p. 182). Cf. también Heine [1872] p. 184: “Eine Function [...] heisst *gleichmässig continuirlich* von *x=a* bis *x=b*, wenn für jede noch so kleine gegebene Grösse ε eine solche positive Grösse η_0 existiert, dass für alle positiven Werthe η, die kleiner als η_0 sind, $f(x\pm\eta)-f(x)$ unter ε bleibt”.

[1058] Cf. Pincherle [1880] p. 246. El texto está en italiano porque se trata de los apuntes publicados por un alumno italiano que asistión a las lecciones sobre los fundamentos del análisis de Weierstraß.

[1059] Cf. Weierstraß [1986] p. 38.

[1060] Cf. Weierstraß [1986] p. 41. Una versión acaso más sofisticada de la definición se encuentra en Pincherle [1880] p. 247.

defenderá el razonamiento utilizado por Lagrange. Este argumento clásico será omitido por el mismo Weierstrasß en la lección que impartirá 10 años más tarde, en 1878. En esta ocasión Weierstrasß dirá simplemente que la segunda parte que depende de *h*, la parte $h^2(f_2(x_0)+...)$ [1061], desaparece junto con *h* incluso si la expresión es dividida por *h*.

No vamos a repetir ahora los argumentos con los que defendíamos la incorporación de la definición *epsilóntica* del cociente diferencial en la noción hegeliana del cociente. Esto es algo que ha debido de quedar suficientemente claro en el apartado anterior en el que hemos tenido como protagonista a Cauchy. Weierstraß será el que elimine los últimos restos de *cinemática* de la definición del diferencial si bien es verdad que, como hemos visto, no siempre es consecuente con este objetivo. Esto nos induce a pensar que aquello por lo que Weierstraß será tantas veces celebrado[1062] no formaba parte explícitamente de su proyecto matemático. Sea esto como fuere, consideramos que aquello que tenía más interes para nuestro propósito –a saber conciliar las definiciones del diferencial de Cauchy y Weierstrasß con la noción del diferencial en Hegel– ha quedado suficientemente fundamentado en estos dos últimos apartados.

4.3.3 Russell: ¿crítico de Hegel?

No se alejaría uno mucho de lo que son las cosas si afirmara que lo mismo que dice Russell sobre Hegel en relación a la contradicción se podría decir sobre Russell en relación a Hegel. En efecto, del mismo modo en que, según Russell[1063], el filósofo alemán alerta tantas veces de la existencia de una contradicción que, como al pastor con el lobo, al final ya nadie termina por hacerle caso, tampoco son pocas las veces en las que Russell cita a Hegel –se supone que para someterlo a una crítica *feroz*–, sin que el contenido de su crítica poco más que un despropósito desesperanzador. Del mismo modo que aquél que ya no confía en los avisos del pastor ha tenido que creer previamente en ellos, es necesario que Russell, para afirmar lo que afirma, haya tenido que creer en el pastor fuente de sus desilusiones. A su vez, para poder afirmar que lo que dice el pastor del sinsentido sobre el pastor de la contradicción es un despróposito, es necesario que nos hayamos tenido que acercar con algún mínimo de espectativas al primero de ellos[1064]. Los resultados de un análisis así pueden ser muy distintos entre sí. Así, puede ser que el pastor no era, en verdad, un pastor, o que sí lo era pero que lo que vio no era un lobo sino algo que para él era algo semejante, o que la semejanza lo es también de la cosa, o que lo que vio fue, simplemente, nada, etc. Dependiendo de cuál sea la casilla bajo la que se lo ordene, el resultado será interesante para una u otra especialidad. Y sin embargo, vaya por adelantado que si nos hemos decidido por expresar los resultados no lo ha sido tanto por considerar que son relevantes para el saber en cuestión, sino porque

---

[1061] Expresión que ahora adquiere la forma $hf_0(x,h)$.

[1062] Cf. Boyer [1959] p. 284: “it was Karl Weierstrass who constructed a purely formal arithmetic basis for analysis, quite independent of all geometric intuition”, cf. también p. 285: “In order to secure logical exactitude, Weierstrass wished to establish the calculus (and the theory of funtions) upon the concept of number alone, thus separating it completely from geometry”, cf. asimismo p. 286: “since the time of Weierstrass it has been recognized that the ideas of variable and limit are not essentially phoronomic”.

[1063] Cf. Russell [1937] p. 355: “And as for Hegel, he [el Platón del *Parménides*] cries *wolf* so often that when he gives the alarm of a contradiction we finally cease to be disturbed”. En todo este apartado cuando decimos “Russell dijo” nos limitaremos a lo que afirma en sus dos trabajos principales sobre la filosofía de la matemática: *The Principles of Mathematics* y la *Introduction to mathematical Philosophy*.

[1064] Hacer algo así en relación a Russell es algo poco habitual entre los *hegelianos*. Lo normal entre ellos suele ser, simplemente, no hacer caso al pastor sin entrar a mostrar cómo los avisos fueron un fraude.

pensamos es relevante para la academia que, hoy por hoy, administra este saber. No en vano, después de Weiestraß, es probablemente Russell el primer autor que se suele nombrar[1065] cuando se pretenden desacreditar las *incursiones* de Hegel en la Filosofía de Cálculo Infinitesimal.

Lo primero[1066] que llama la atención en este análisis es la relativa proximidad entre las posturas de Russell y Hegel acerca de lo que es el cociente de diferenciales. Lo segundo que llama la atención es la terminología *precauchyana* con la que Russell define este cociente. De este modo, el cociente de diferenciales será, para Russel, el límite de un cociente cuando tanto el numerador y el denominador tienden a cero. Frente a ello, hemos visto en el apartado dedicado a Cauchy que la noción de "tendencia de una variable" será eliminado de la definición del cociente diferencial por Cauchy y en qué sentido esto no comprometía la el concepto de diferencial hegeliano.

Russell define el cociente de diferenciales como el valor de la expresión

$$\{f(x+\delta)-f(x)\}/\delta$$

cuando δ se aproxima a cero[1067]. Los valores del denominador como del numerador son, para Russell, siempre valores finitos. La expresión carece de sentido cuando δ es igual a cero. El concepto clave del cálculo infinitesimal no es el del infinitesimal sino el de límite[1068].

Sabemos ya que, con excepción de la presentación dinámica que ofrece Russel del diferencial, todo esto es algo con lo que Hegel estaría perfectamente de acuerdo. El problema es que Russell cree que no es así. Para Russell, Hegel –lo mismo que Leibniz– consideran que es esencial al cálculo la noción de cantidad infinitesimal (*infinitesimal quantity*)[1069]. Frente a esto, lo cierto es que ni Hegel ni Leibniz habrían admitido la expresión "cantidad infinitesimal". Para Hegel una cantidad menor que toda cantidad es una contradicción. El infinitesimal es la contradicción del Cuanto, el momento en el que la cantidad deja de ser candiad y no tiene sentido, por ello, afirmar de él que es una cantidad. En Leibniz el infinitesimal no es una cantidad sino una variable en su variación. Este reconocimiento de la noción de variabilidad para el infinitesimal es algo que tiene lugar también en Hegel y en Russell. Lo que ocurre es que mientras que para Russell el infinitesimal es una cantidad, para Leibniz y Hegel es una variable[1070] o el proceso lógico en el que se encuentra una variable. En este sentido, es curioso observar a Russell hablar de variables que se aproximan a

[1065] Independientemente de si se ha llegado a leer o nó a Hegel. ¿Para qué?, si ya lo ha hecho ya uno antes –se supone que el joven Russell– que afirma además que, para nuestro bienestar, lo que dice es un auténtico sinsentido quedando uno con ello eximido del martirio que supone tener que leerlo.
[1066] "Lo primero", si exceptuamos la sorpresa ante la poca seriedad con la que discute Russell con autores como Hegel o Kant. Por poner un ejemplo, la, por así decir, exposición del carácter sintético *a priori* de los juicios de la aritmética en Kant que ofrece Russell en sus *The Principles of Mathematics* (cf. Russell [1937] p. 355) es verdaderamente lamentable.
[1067] Cf. Russell [1937] p. 328.
[1068] Cf. Russell [1937] p. 329: "it is the doctrine of limits that underlies the Calculus, and not any pretended use of the infinitesimals".
[1069] Cf. Russell [1920] p. 107.
[1070] Es muy revelador al respecto el siguiente pasaje de las *Introduction to mathematical Philosophy*: "it was supposed that infinitesimals were involved in the foundations of these subjects [se refiere al Cálculo diferencial e integral], but Weierstrass showed that this is an error: wherever infinitesimals were thought to occur, what really occurs is a set of finite quantities having zero for their lower limit" (en Russell [1920] p. 97). Para Leibniz, como para Hegel o Cauchy, no hay tal contraposición entre el infinitesimal y el conjunto de valores finitos –es decir, la variable– que tiene cero como su valor inferior; el infinitesimal *es* esta variable.

(approaches to)[1071] cero después de que, al menos desde Cauchy y Weierstraß[1072], se haya intentado vaciar de toda connotación dinamicista a la definición del diferencial. El carácter de aproximación de algo a otro algo introduce en la noción de variable una connotación de movimiento que Russell, al menos en la fecha en la que escribe sus *The Principles of Mathematics*, no está seguro de si pertenece propiamente a él[1073].

Frente a esto, sabemos ya que para Hegel no es la representación del movimiento lo que tiene lugar en el infinito del proceso "infinitesimal", sino, algo muy distinto a él: el devenir[1074]. Tanto para Hegel como para Russell el diferencial por sí solo es una expresión que carece de sentido[1075]. Para Hegel los diferenciales son la expresión de la contradicción del proceso al infinito. El infinito de este proceso es, como ya se ha visto, el infinito malo (*schlechte Undendlichkeit*). Russell estará de acuerdo con llamar a este infintio del infinitesimal el infinito malo. Lo que ocurre es que Russell no expresa esta coincidencia. Lo único que Russell afirma es que el carácter relacional del infinitesimal hace de éste lo que Cantor llama un infinito impropio (*Uneigentlich-Unendliches*) [1076]. Lo que Russell no afirma es que, para Cantor, este infinito impropio es lo mismo que el mal infinito de Hegel[1077]. Es curioso observar que Cantor llegará a denominar a los infinitesimales como "magnitudes en [proceso de] devenir infinitamente pequeñas"[1078], haciendo uso –de un modo significativo– del verbo *werden*.

En su *Introduction to mathematical Philosophy* Russell distinguirá[1079] entre el límite que no es cuantitativo sino ordinal y el límite tal y como es utilizada en la teoría de las funciones. El primer sentido de la término "límite" remite a la teoría de los números transfinitos de Cantor y no resulta relevante para nuestro tema presente. El concepto de límite que sí es relevante para nuestro trabajo es analizado por Russell en el capítulo IX[1080]. En él Russell define el concepto de continuidad de una función $f(x)$ en el punto a haciendo uso del concepto de vecindad. La vecindad del punto a se define por los puntos que forman parte del intervalo a-ε. Este intervalo definirá un sección que estará formado por los valores que no son mayores

---

[1071] Cf. Russell [1937] pp. 327 y 328.

[1072] Matemático éste que, dicho sea de paso, será –al menos supuestamente– la referencia de Russell en cuestiones relativas a la fundamentación del Calculo diferencial.

[1073] Cf. Russell [1937] p. 344.

[1074] Algo que, como ya se ha visto, no implica ni el espacio ni el tiempo. Los partidarios de las posturas *antidinamicistas* del cálculo que tanto se escandalizan ante el carácter móvil del devenir de Hegel tienen más razones para escandalizarse ante Russell.

[1075] Cf. Russell [1937] p. 331: "The *dx* and *dy*, as we saw in the last chapter, are nothing at all: *dy/dx* is the limit of a fraction whose numerator and denominator are finite, but is not itself a fraction at all".

[1076] Cf. Russell [1937] p. 331.

[1077] Cf. Cantor [1883] p. 8: "Das Uneigentlich-Unendliche ist oft von neueren Philosophen „schlechtes" Unendliche gennant worden". Se deduce por el contexto que Cantor se refiere aquí a Hegel y a los *hegelianos*. Estos últimos son mencionados explícitamente a raíz del infinito propio: "Auch die Philosophen der Hegel'schen Schulen lassen die eigentlich-unendlichen Zahlen nicht gelten" (en Cantor [1883] p. 45). Otra asunto es si Cantor tiene razón cuando afirma que la distinción entre la mala infinitud y la infinitud de veras la ha tomado Hegel de Spinoza: "was Hegel etwa Zutreffendes über den hier erörterten Unterschied [la diferencia entre el infinito propio y el impropio] gesagt haben mag, wie so manches andere bei ihm, dem Spinoza entlehnt ist" (en Cantor [1890] p. 29).

[1078] Cf. Cantor [1883] p. 9: "unendlich klein *werdenden* Grössen". Se podría decir que lo que en este mismo texto Cantor llama "eigentlichunendlichkleine Grösse" tendrá que esperar hasta el Análisis *Non-standard* para su axiomatización.

[1079] Cf. Russell [1920] p. 104: "The notions of *limit* and *continuity* which we have been defining must not be confounded with the notions of the limit of a function for approaches to a given argument".

[1080] Titulado "Limits and continuity of functions" (en Russell [1920] p.107). Se trata de un resumen de las secciones *231 y *232 de los *Principia Mathematica*.

que todos los valores tomados por la función en ese intervalo[1081]. A esta sección denominará Russell la sección inferior (*below section*). La sección superior estará constituida por los valores de la recta real que son iguales o mayores que el mínimo de la función en el intervalo a-ε . Tanto la sección inferior como la superior dependerán así del valor de ε. La unión de todas las secciones inferiores dará lugar a la última sección inferior (*ultimate section*)[1082]. Del mismo modo, la unión de todas las secciones superiores dará lugar a la última sección superior[1083]. La unión de la última sección inferior y la última sección superior da lugar a la última oscilación. Si la última oscilación es el conjunto vacio entonces el límite de la función por la izquierda es el límite superior de la última sección inferior[1084]. Si la última oscilación está constituido por un único número éste será el valor del límite de la función. Si la última oscilación está constituido por más de un número, pero el límite superior de la última sección inferior y el límite inferior de la última sección superior coinciden tanto para a-ε como para $a+\varepsilon$, entonces, este valor será el límite de la función y la función será continua en el punto a.

El objetivo del capítulo es el de mostrar que la noción de límite no necesita de la noción de número[1085]. Parece que con esta tesis lo que Russell quiere afirmar es que el cálculo no necesita de números –cantidades– infinitesmales y que con ello pretende refutar, de paso, la posición de su versión de Hegel. Hemos visto que Russell incluye falsamente a Hegel entre aquellos que definen el cociente diferencial haciendo uso de lo que Russell llama “cantidad infinitesimal”. Para Hegel la expresión “infinitesimal” es la expresión de la contradicción de una cantidad que no debe ser ninguna cantidad. De ahí que no tenga ni pies ni cabeza paa él la expresión “cantidad infinitesimal”. El cociente de diferenciales es la superación de la contradicción en la que se encuentran los dos polos de los momentos del numerador y el denominador. La necesaria remisión de los polos del cociente viene expresado en el hecho de que Hegel llame a estos polos “momentos” del cociente diferencial. Esta necesaria vinculación no tiene lugar con los indivisibles. De ahí que Hegel rechace la interpretación del cociente de diferenciales como un cociente entre dos entidades indivisibles. Un cociente entre magnitudes indivisibles[1086], es decir, un cociente entre unos, es un cociente en el que el numerador y el denominador son independientes entre sí, son sin relación[1087]. De ahí que, si Russell entiende por “infinitesimal quantity” algo así como un indivisible, está interpretando falsamente a Hegel cuando supone que la intepretación del cálculo infinitesimal de éste hecha mano de las *cantidades infinitesimales*. De hecho, hemos podido ver que aquello que estos dos autores entienden por la noción de infnitesimal no se aleja tanto entre sí. La diferencia consiste en que uno –Russell– acepta el término como dado y el otro no. Es decir, mientras que para el primero el término *infinitesimal* es algo con el que uno se encuentra en las matemáticas, para el segundo el *infinitesimal* es un concepto que, como todo concepto, exige que sea mostrada su necesidad. Además de ello, hemos visto que Russell recurre a la noción de “tendencia” de una variable que ya había sido dejado de lado por Cauchy a la hora de definir el cociente diferencial.

[1081] Es decir, se trata de los valores que son iguales o menores que el valor máximo de la función en el intervalo a-ε.

[1082] Cf. Russell [1920] p. 111.

[1083] Que el valor z forma parte de la última sección superior significa que para cualquier valor de ε la función no tomará un valor mayor que z.

[1084] Russell no llega a demostrar esta afirmación.

[1085] Cf. Russell [1920] p. 116: “There is thus nothing, in the notions of the limit of a function or the continuity of a function, that essentially involves number”.

[1086] Suponeindo que semejante expresión tenga sentido.

[1087] Cf. Hegel [1985] p. 254: “daß es letzte Größen, Untelibare, gebe […] wäre […] ein Absprung von dem abstrakten Verhältnis auf solche Seiten desselben, welche für sich außer ihrer Beziehung einer Wert haben sollten, als Unteilbare, als etwas, das ein Eins, ein Verhältnisloses sein würde”.

5. CAPÍTULO

MÁS ALLÁ DE LOS DIFERENCIALES: LA MEDIDA

La Medida (*Maß*) es el tercer y último momento del movimiento epeculativo que tiene lugar en la *Lehre vom Sein*. Como no podía ser de otro modo, el cierre de movimiento de traspaso del primer libro de la *Wissenschaft der Logik* es resultado de la unión o negación de la negación de las dos categorías previas a la Medida: la Cualidad y la Cantidad. En relación a este traspaso, hemos tenído ocasión de ver cómo la categoría de la Cantidad terminaba por retornar a la categoría de la Cualidad[1088]. Sin embargo, este retorno inmediato no es, ni puede ser, la consumación de este primer libro. La razón de ello reside en el carácter meramente inmediato de este retorno. Por esta razón, la tarea pendiente que deberá cumplir la categoría de la Medida es el de llegar a poner (*setzen*) o mediar este retorno. Con esta mediación, la culminación de la *Lehre vom Sein* tendrá la forma de un cerrarse del círculo en sí[1089]. Un cerrarse que, en la Medida en que es un retorno *a la* Hegel[1090], será un volver al τέλος.

El comienzo de la categoría de la Medida será, como todo comienzo, inmediato. En este caso, la inmediatez tendrá como punto de partida el resultado final de la categoría precedente - i.e. la unidad de Cualidad y Cantidad -. Cuando, ya al final de la categoría de la Medida, se haya puesto esta unidad, se habrá completado el proceso de interiorización (*Erinnerung*)[1091]

[1088] Recuérdese que la categoría de la Cantidad era asimismo resultado de la superación de las contradicciones de la categoría de la Cualidad.

[1089] Recuérdese en este sentido el § 84 de la *Enzyklopädie* donde el movimiento de la entera "Doctrina del Ser" es calificado como un "ir en sí del Ser" (*insichgehen des Seins*).

[1090] En relación a este retorno (*Rückgang*) cf. Artola [1972] p. 31: "Para que el ser -y las sucesivas esferas y niveles- se constituyan en «sí mismos» desde ellos mismos, necesitan retornar. Este retorno es precisamente el fruto de la negatividad que se aniquila a sí misma bajo la peculiar forma de la «Aufhebung»".

[1091] En contra de la traducción obvia del termino alemán *erinneren* por "recordar", traduciremos esta palabra por "interiorizar". A favor de esta decisión está el empeño de Hegel en poner de relieve el contenido supuestamente etimológico del término *erinnern*. Así en sus *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie* (cf. Hegel [XIX] p.45: "Aber Erinnerung hat auch einen anderen Sinn, den die Etymologie gibt, den: Sich-innerlich-machen, Insichgehen") Hegel identifica el sentido etimológico de *erinnern* con *insichgehen*. Como hemos visto, era precisamente esto último, el "ir en sí", aquello que caracterizaba el entero movimiento de la *Lehre vom Sein*. Nuestra traducción pretende recoger este significado etimológico a costa de perder con ello la remisión que pretende hacer Hegel a la doctrina de la *Anámnesis* de Platón. El lector español tendrá que recordar esta remisión cuando se encuentre con la palabra "interiorización" a lo largo de este capítulo. A su vez, el lector alemán tendrá que acordarse del significado, según Hegel, etimológico de la palabra *erinnern*. Sea ello como fuere, la remisión a Platón no impide a Hegel criticar en éste el carácter temporal y empírico con el que presenta a veces su doctrina de la *Anámnesis*.

de la “Doctrina de ser”[1092]. De este modo, la progresión de la deducción categorial der Ser es el proceso de ir al fundamento (*Grund*), al interior, del Ser mismo[1093]. El proceso es así un pasar por parte del conocimiento desde la superficie al interior, de lo inmediato a lo mediato del Ser. El resultado del proceso, esto es, aquello que se encontrará en las profundidades del Ser será aquello que lo rige de antemano. Este “aquello que era Ser” es la Esencia (*Wesen*)[1094], objeto del segundo libro de la *objektive logik*.

El paso de la “Lógica del Ser” a la “Lógica de la Esencia” se articula en torno a la absoluta indiferencia[1095], que no es sino una incoherencia interna sita en la última etapa de la “Lógica del ser”. Tal y como tendremos ocasión de ver en más detalle, la inconsistencia de este momento estriba en lo siguiente: la unidad entre la unidad y la relación inversa resultaba ser una unidad externa. Esto significa dos cosas: En primer lugar, (1) la unidad no será capaz de dar cuenta de sus factores (es decir, de sus diferencias). En segundo lugar (2), las diferencias no conseguirán que mediante su negación la unidad retorne a sí. Por esta razón, la superación de este falta implicaba que la unidad debía poner sus determinaciones (contra (1)) y que mediante la negación de estas determinaciones la unidad tenía que retornar a sí (contra (2)). En definitiva, la solución a la primera falta significa que la absoluta indiferencia debe hacerse Substancia (i.e.: un algo que puede dar cuenta de sus factores). La segunda se solucionaría subjetivando la indiferencia absoluta. Con ello el Uno va a poder mediarse en sus factores, va a poder reconocerse en ellos y retornar a sí. Estas dos soluciones se hallan en mutua relación. Por un lado, el que las determinaciones han de ser, no ya accidentes de algo, sino predicados que definen el concepto de ese algo implica pensar la Substancia como Sujeto[1096]. Por otro lado, la igualdad a sí ha de ser pensada como negatividad frente a las determinaciones. Y esto es pensar el Sujeto como Substancia. Aquello que cumple con estas dos condiciones, aquello cuyas diferencias no son ya exteriores sino que las tiene negadas, aquello que se define como la negación del Ser es la Esencia. La Esencia es aquello cuyas

---

[1092] Cf Hegel [2001] p. 134: “[Das] Maß ist Einheit der Quantität und Qualität, also aufgehobene Quantität und Qualität, dies Aufheben aber ist noch nicht gesetzt, [es ist] zunächst nur unmittelbare Einheit; in dieser Einhiet, insofern Qualität und Quantität wieder unterschieden werden, so sind sie in Beziehung. Die eine ist vermittelst der anderen, in dieser Beziehung haber sie sich beide, damit ist die Einheit beider aufgehoben, und so negativ bestimmt ist die Einheit gesetzt. Diese gesetzte Einheit und dies gesetzte Aufgehobensein des Seins ist das Wesen. Es ist das als Aufgehobensein gesetzte Sein. Im Wesen habe ich das Sein schon durchdrungen, das Sein als aufgehoben als unmittelbares, das Wesen ist auch unmittelbar, aber [es] resultiert durch [das] Aufheben der Vermittlung”.

[1093] Cf. Hegel [1985] p. 57: “das Vorwärtsgehen ein Rückgang in den Grund [ist, J.Z]”.

[1094] La expresión “aquello que era ser” es la traducción más o menos literal del τὸ τί ἦν εἶναι aristotélico (cf. Met. 988b4, 993a12, 994a10, 994b16, 1007a22, 1013a27, 1016a27, 1016b1, 1017a6, **1017b22**, 1022a26, 1024b28, 1025b28, **1028b34**, 1029b20, 1030a1, 1030a5, 1030a12, 1030a17, **1030a29**, 1030b6, 1030b27, 1030b35, 1031a9-16, 1031b4, 1021b6-10, 1031b20-25, 1031b30, 1032a4, 1032a10, **1032b2**, **1032b14**, **1033b7**, 1035b16, 1035b32, 1037a1, 1037a21, **1037a33-b1**, 1038b3, 1038b14, 1038b17, 1041a28, **1042a17**, **1043 b1**, 1044a1-2, 1044a36, 1045a33, 1045b3, **1074a35** y 1075a2. Hemos escrito en negrita los pasajes de la metafísica que hemos considerado más relevantes para el significado de la expresión τὸ τί ἦν εἶναι). La traducción al uso del término aristotélico es esencia. El hecho es que el término para decir esencia en alemán, *Wesen*, aparece en el imperfecto del indicativo del verbo ser: *gewesen*. Esta coincidencia es subrayada por Hegel al comienzo de la *Lehre vom Wesen* (cf. Hegel [1978] p. 241: “Die Sprache hat im Zeitwort: Sein, das Wesen in der vergangenen Zeit: gewesen, behalten; denn das Wesen ist das vergangene, aber zeitlos vergangene Sein”). Con ello se pretenderá introducir un argumento para-lógico en la fundamentación de la proceder lógico. Algo análogo ocurría con las expresiones “aufheben” (en Hegel [1978] p. 58) y “was für ein Ding etwas sei” (en Hegel [1985] p. 147) en los que expresiones del habla común conservaban un contenido altamente especulativo. Sobre la expresión τὸ τί ἦν εἶναι véase Heidegger [2002] p. 32-33. En grandes rasgos, podemos decir que la esencia (τὸ τί ἦν εἶναι) de algo es aquello cuya delimitación (ὁρισμός) es una expresión (λόγος), la esencia es la Substancia sin la materia (ὕλη) de una cosa en cada caso.

[1095] Cf. sobre este punto Henrich [1978] p. 231 y sig.

[1096] Cf. Henrich [1978] p. 217.

determinaciones no le son exteriores, sino que los tiene en sí. Decir que las determinaciones los tienen en sí significa que la exterioridad de estas determinaciones ha sido negado. A su vez, si la exterioridad, el ser otro de las determinaciones, es negación, la negación de la exterioridad será una doble negación. A estas determinaciones Hegel las llamará presencia (*Schein*). De este modo, la Esencia es aquello que retorna a sí reflejado en su presencia y la *Lehre vom Wesen* será la realización[1097] de este retorno[1098].

Con ello se habrá consumado lo que estaba ya *in nuance* en la categoría de la Medida[1099]: a saber, el retorno de la exterioridad al en sí de algo (o, lo que es lo mismo, la igualdad de la exterioridad con el en sí de ese algo[1100)]. A partir de aquí podemos entender la referencia de Hegel a la tríada kantiana de las categorías de Modalidad. Como se sabe, Kant las sitúa después[1101] de las categorías de la Cantidad y Cualidad. Las categorías de la modalidad no añaden nada al concepto del objeto. Más bien expresan la relación de la facultad de conocer con el objeto[1102]. Y, sin embargo, de esta exterioridad depende la cualidad de algo. El reconocimiento que esto es así la tenemos, dice Hegel, cuando decimos que todo depende del modo y manera con el que se mire[1103]. La modalidad kantiana expresa este pensamiento unicamente en abstracto[1104], de un modo indeterminado[1105]. El desarrollo de esta inmediatez es el desarrollo de la categoría de la Medida. La verdad de la la modalidad kantiana es así la modalidad reflejada en sí, la Medida de Hegel.

Tal y como observaba Wiehl[1106], es Rosenkranz quien propone por vez primera -ya en 1844– exponer la dialéctica hegeliana de las categorías de la Cualidad, Cantidad y la Medida a la luz del *Filebo* de Platón. En contra de lo que cabría esperar, tal exposición no puede hacerse basándose en la lectura que hace el mismo Hegel de éste diálogo en sus *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*. En la sección dedicada a la interpretación de los diálogos *Sofista*, *Parménides* y *Filebo*, Hegel defenderá la lectura según el cual el diálogo expone la dialéctica entre el límite (πέρας) y lo ilimitado (ἄπειρος). Si esto fuera todo, el problema se reduciría a asimilar los conceptos platónicos de "el límite" y "lo ilimitado" a las categorías de la Cualidad y la Cantidad de Hegel, respectivamente. Pero hay más. En la lectura de Hegel, el término que se presta a ser identificado con la categoría de la Medida, el

[1097] El uso del término *Realisieren* con el significado que aquí le asignamos la tomamos de Hegel [1985] p. 326. Cf. también Hegel [1978] p. 190.
[1098] Véase el esquéma de este retorno en Duque [1998] p. 637: "1) la esencia reflexiona dentro de sí y ve su reflejo, tal como a ella le *parece*; la apariencia de esa reflexión es de *inmediatez*, y de ésta se destaca la esencia en cuanto reflexión; 2) mas dado que esa reflexión negativa a sí, no es sino ella misma – no algo distinto – la que se *aparece* a sí; 3) por fin, en cuanto que ella es ella misma («esencia») y *su* propia aparición, se manifiesta sin resto o se «pone en obra » a sí misma, en cuanto «realidad efectiva»".
[1099] Recordemos que en la cantidad, en el reino de la exterioridad indiferente, tenía lugar un retorno análogo sólo que con el Cuanto como fondo. Cf. Ferrini [1991] p. 709: "Le divisioni interne del capitolo ["La relazione quantitativa", J.Z], le forme del rapporto diretto, indiretto o inverso, e potenziale, sono intese come gradi della «riflessione» del quanto stesso in sé, a cominciare da quella assoluta steriorità che consisteva nell'avere la propria determinatezza in un altro numero, e che caratterizzava il «cattivo infinito» quantitativo".
[1100] Cf. Hegel [1978] p. 190: "Dies ist die Wahrheit, zu der das Sein nunmehr sich bestimmt hat, die Gleichheit der Äußerlichkeit mit sich selbst zu sein".
[1101] Un "después" que tiene un significado meramente expositivo en Kant.
[1102] Cf. *KrV* B266.
[1103] En alemán: "das alles auf die Art und Weise ankomme" (en Hegel [1985] p. 325).
[1104] Cf. Hegel [1985] p. 325.
[1105] Cf. Hegel [2000] p. 48.
[1106] En Wiehl [1965] p. 160. Desgraciadamente el texto de Wiehl no cumple con lo que promete el título. Tanto es así que la analogía apuntada por el autor entre el *Filebo* de Platón y la *Lehre vom Sein* no es objeto de estudio del mismo.

μέτρον, es colocado junto a los conceptos de la proporción, la determinación o el límite[1107]. Según esta lectura, la superación de la dialéctica entre el límite y lo ilimitado es, llana y simplemente, la mezcla (μεῖξις) entre estos dos momentos. Esta mezcla entre el límite y lo ilimitado dará lugar a la armonía (ἁρμονία), conmensurabilidad (σύμμετρος), mesura (ἔμμετρος) y, en definitiva, a todo lo que es bello[1108]. Vemos así que esta lectura hace imposible la última de las deseadas parejas de correspondencia: πέρας - Cualidad, ἄπειρος - Cantidad y μέτρον - Medida.

Sin embargo, no hay que más que dirigirse al diálogo de Platón para ver que lo que es bello[1109] no es resultado de la unión de lo ilimitado y el límite o la Medida, sino que lo que es bello es, ella misma, Medida. Es decir, el tercero de los grupos, el que es resultado de la mezcla entre lo cualitativo y lo cuantitativo, es el de la Medida. Este género, dirá Platón, tiene su origen en las Medidas que tienen lugar con la colaboración del límite[1110]. El límite será, por ejemplo, la prudencia (φρόνησις). Lo ilimitado será, a su vez, aquello que es siempre capaz de más (μᾶλλόν) y menos (ἧττον). El ejemplo que ofrece Platón es el del placer (ἡδονή): algo que es mero exceso (σφοδρός) y que no acepta lo igual ni, en general, relación númerica alguna con el que compararse[1111]. De este modo, podríamos identificar lo ilimitado de Platón con la magnitud (μέγεθος)[1112]. Ahora bien, para tal asimilación es necesario tener en cuenta que lo que Hegel llama Cuanto (*Quantum*) es lo que Platón llamará ποσόν[1113], y que en Platón esta propiedad pertenece a las cosas que son finitas. Frente a ello, lo ilimitado es la pasta homogénea indefinida sobre el que se establecen los cortes de finitud[1114]. Tanto es así que, ya al final del diálogo, se llegará a equiparar el placer con la materia (ὕλη)[1115], observando que ámbos tienen que ver más con la generación (γένεσις) que con la Substancia (οὐσία).

1107 Cf. Hegel [XIX] p. 78: "So haben wir vier Bestimmungen: erstens das Unbegrenzte, Unbestimmte; zweitens das Begrenzte, Maß, Bestimmung, Grenze, wozu die Weisheit gehört". Cf. tambíen *loc.cit.*: "Das Endliche ist dagegen die Grenze, die Proportion, das Maß".

1108 Cf. *Filebo*, 26b.

1109 Distinguimos entre τὰ ὅσα καλὰ, "lo que es bello" o "las cosas bellas" y τὸ καλός, "la belleza".

1110 Cf. *Fil*. 26d: "γένεσιν εἰς οὐσίαν ἐκ τῶν μετὰ τοῦ πέρατος ἀπειργασμένων μέτρων".

1111 Para algo así habrá que esperar al *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* de Oresme y a su pensamiento analógico con el que cuantitativizar las intensidades o *latittude*. Cf. al respecto Clagett [1968] p. 11 y Clagett [1959] p. 348. Véase la nota 1558 al respecto.

1112 La identificación de μέγεθος con lo ilimitado así como su traducción por el término "cantidad", obedece a la intención de hacer posible la identificación entre la cantidad en Hegel y lo ilimitado de Platón. Con ello no se pretende afirmar que Platón llegara a pensar la cantidad desde lo ilimitado, sino que aquello que para nosotros es la cantidad es en Platón lo ilimitado. No obstante, hay un pasaje del *Filebo* (cf. 45c) en el que Sócrates preguntará a Protarco por la cantidad de un placer. Si fuese posible hacer una traducción basándonos únicamente en las apariciones de un mismo término a lo largo de un único texto, el pasaje en cuestión permitiría situar bajo el mismo *genus* al μέγεθος y a la ἄπειρος. En general, en Grecia el ποσόν puede tener la forma de la μέγεθος (magnitud continua) o de la πλῆθος (magnitud discreta). En este sentido resulta significativo el hecho de que Platón coloque en una lado lo que es capaz de ser mayor o menor, y por el otro lo que admite el cuanto.

1113 Evitamos la traducción habitual del substantivo neutro ποσόν por "cantidad" con el fin de reservar este término para traducir μέγεθος. El cuanto, el ποσόν, es siempre en Platón algo finito y de ahí que, para un moderno, su traducción por cantidad puede llevar a confusiones. La razón de ello reside en que para nosotros, a diferencia de Platón, la cantidad es algo que se piensa sobre la base de la infinitud.

1114 Un ejemplo de lo ilimitado que resulta ser más ilustrativo que el del placer es el del plano indefinido de las ideas y de los sonidos de Saussure (cf. Saussure [1979] p. 156). El ejemplo de la Substancia *fónica* para ilustrar lo ilimitado se encuentra en el mismo Platón (en *Fil.* 18b).

1115 Cf. *Fil.* 54c. Estamos ante el primer uso abstracto del término ὕλη en Platón.

Como decíamos, la mezcla de estos dos géneros, lo ilimitado y el límite, da lugar a la Medida, mesura y conmensurabilidad de las cosas bellas. Sin embargo, todavía falta un cuarto elemento para completar el cuadro. Debido a que todo lo que ha llegado a ser lo ha llegado a ser por una causa[1116], la investigación no habrá concluido hasta que se haya dado con la causa de la mezcla entre el límte y lo ilimitado. Pues bien, esta causa será identificada[1117] con el intelecto (νοῦς), en particular, y en la Medida en que no puede haber intelecto sin el alma[1118], con el alma en general. El intelecto es, con ello, aquello que pone (τὸ δὲ ποιοῦν)[1119] la mezcla. Hasta aquí nuestra lectura del diálogo de Platón. En él, como dirá Hegel[1120], se hecha de menos una demostración dialéctica de las representaciones que entran en juego. Habrá que esperar al *Parménides* para poder encontrar una demostración de tal calibre. Lo que ocurre es que tal cosa tendrá lugar en este diálogo sobre un terreno de juego distinto.

Volviendo al *Filebo*, resulta interesante observar cómo sintoniza Platón con Anaxágoras en la causalidad del cuarto elemento. En concreto, con la doctrina de Anaxágoras según la que el todo está regido por el intelecto[1121]. La novedad frente a Anaxágoras consiste en que, como hemos visto, Platón llamará “lo que pone” a la causa de toda mezcla entre lo infinito y el límite. “Lo que pone” es para Platón el intelecto o el alma. Pues bien, si tenemos en cuenta que “poner” se traduce al alemán por *setzen* y que, en Hegel, *setzen* es la forma de la Reflexión[1122], es decir, el proceso que consiste en superar todo en sí[1123] inmeditao del comienzo, podremos trazar la analogía entre Platón y Hegel incluso más allá de la correspondencia πέρας - Cualidad, ἄπειρος - Cantidad y μέτρον - Medida.

5.1 LA CANTIDAD ESPECÍFICA

La Medida es la unidad de Cualidad y Cantidad, sus dos momentos anteriores en la *Wissenschaft der Logik*. Esta unidad es, al comienzo de la exposición de la Medida, una unidad inmediata. Esto significa que tanto la Cantidad como la Cualidad son al comienzo inmediatos –es decir, son dados. La forma inmediata o mas simple de la Medida es lo que llamamos medición. En el proceso de medición, un Cuanto, la unidad de Medida (*Maßtab*), se refiere a otro Cuanto que va a ser medido. El primer Cuanto actúa como unidad (*Einheit*) mientras que el segundo ejerce de Monto (*Anzahl*). Estos dos Cuantos no son, tal y como ocurría en el momento de la Cantidad, unos Cuantos indiferentes cuyo límite (*Grenze*) les es indiferente. En la medición un Cuanto se refiere a otro Cuanto. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en la Cantidad, esta referencia a sí no es una referencia en el que el Cuanto vaya fuera se sí[1124]. A cada Cuanto no le es indiferente cuál sea su otro Cuanto. Al Monto no

[1116] Cf. *Fil.* 26e.
[1117] Cf. *Fil*. 30e.
[1118] Cf. *Fil*. 30c.
[1119] Cf. *Fil*. 26e.
[1120] Cf. Hegel [XIX] p. 69.
[1121] Sócrates no se refiere directamente a Anaxágoras sino a “los antiguos”. Cf. *Fil.* 30d.
[1122] Cf. Theunissen [1994] p. 309.
[1123] Y es que en Hegel estar puesto es lo contrario de ser-en-sí. Cf. Henrich [1978] p. 274.
[1124] Este “ir fuera de sí” en su referencia a sí era la responsable de que en la cantidad tuviese lugar el momento de la mala infinitud. Como veremos, en la Medida, será también el carácter de reflexividad, de ser-para-sí, el que introduzca la mala infinitud en su desarrolo. Cf. sobre este punto Hegel [1978] p. 192: “Es [das Maß] ist ein Quantum, aber diese an sich gleichgültige Grenze mit der Bestimmung, nicht gleichgültige, sondern sich auf sich beziehende Aeusserlichkeit zu seyn, die nicht über sich hinausgeht”.

le es indiferente cual sea su unidad de Medida. Con otra unidad de Medida obtendríamos como resultado otro Monto[1125]. Del mismo modo, un cambio de Monto implica, a su vez, un cambio de la unidad de Medida[1126]. El que la relación entre estos dos Cuantos sea inmediata quiere decir que a algo le es exterior, le es indiferente, qué unidad de Medida utilizar en su medición. En este sentido no tiene ni pies ni cabeza hablar de una unidad de Medida natural.

El hecho de que cada Cuanto tiene su determinidad en su otro lo expresa Hegel diciendo que el Cuanto es cualitativo. Hemos visto que, en la medición, esta relación es algo externo al algo. Sin embargo, la Cantidad conserva en la Medida su carácter cualitativo de una forma tal que, un cambio en él es un cambio en la cualidad de algo. En esta relación de los Cuantos el algo será especificado por la Medida. Un algo especificado es un algo en el que el Monto y la Unidad no le son externos -es decir, indiferentes. En este nivel, manteniendo uno de los cuantos constante, la variación del otro hace variar al algo cualitativamente. De este modo, un cambio en la cantidad afecta así a la cualidad del algo. Ya hemos visto que esto era imposible en el momento de la Cantidad, donde la variación cuantitativa era indiferente al algo. En la Medida, sin embargo, en tanto que es la unidad de la Cualidad y la Cantidad, tal incapacidad es suprimida.

Esta supresión no puede, a su vez, adquirir la forma de la relación directa[1127]. Si el Monto y la unidad de Medida tuviesen una relación directa, el exponente de esta relación sería un Cuanto externo al algo. Para ilustrar[1128] esto piénsese en un gráfico que representa el calor suministrado a una Substancia en las abcisas y la temperatura de esta misma Substancia en las ordenadas. Siempre que la relación entre el calor suministrado y la temeperatura es directa el exponente es un algo fijo y la variación en los Cuanto “calor suministrado” y “temperatura” es algo exterior al cuerpo en cuestión. Se trata de un intervalo de temperatura en el que el calor suministrado es directamente proporcional a la temperatura del cuerpo. Sin embargo, en puntos de temperatura particulares, la proporcionalidad entre el calor suministrado y la temperatura se ve alterada de modo tal que tiene lugar un nuevo exponente entre el calor suministrado y la temperatura. En estos puntos se da un cambio de exponente o una especificación[1129]. Este cambio apunta a algo que es própio a la Substancia calentada: el denominado calor específico o calor latente. Dentro de cada intervalo definido por el calor específico no se añade nada nuevo a lo que sabemos ya de la Substancia. En este intervalo, la variación entre el calor específico y la temperatura es algo externo al cuerpo. Lo específico de la substancia son los puntos en los que tiene lugar la ruptura de estos intervalos lineales

---

[1125] Esta operación de cambio de unidad de Medida es imposible realizarla en la Cantidad. Ello se debe a que la unidad de la Cantidad no es una unidad cualificada, es decir, no hay otra unidad que pudiese utilizarse como unidad de Medida. La unidad de la Cantidad es *la* unidad.

[1126] De este modo, la unidad de Medida de un algo cuyo monto denominamos, por ejemplo, 6 es la mitad de la unidad de Medida de ese mismo algo cuyo monto es 3.

[1127] Recuérdese que la relación directa (*direkte Verhältnis*) era la expresada por la fórmula y/x=a.

[1128] Seguimos el ejemplo del propio Hegel ofrecido en Hegel [1985] pp. 335 y 336. Para ello cambiamos la expresión “äußerliche Temperatur” del que hace uso Hegel por el de “calor suministrado”. Hegel necesita hablar de dos Temperaturas, una que hace de unidad, otra que hace de monto especificado. Ello se debe a que, en esta etapa del desarrollo de la categoría de la Medida, los cuantos tienen todavía la misma cualidad. Cf. Hegel [1985] p. 333-334: “Jenes immanente Messende ist eine Qualität des Etwas, dem dieselbe Qualität an einem anderen Etwas gegenübersteht, aber an diesem zunächst relativ mit maßlosem Quantum überhaupt gegen jene, die als messend bestimmt ist”. Es decir, lo que se ha de medir es una cualidad de un algo, por ejemplo la longitud, la extensión, de un armario, que tiene enfrente la misma cualidad de un otro algo, es decir, tiene la cualidad “extensión” de una unidad de Medida, por ejemplo, de un metro, frente a sí. La diferencia entre los dos algos consiste en que el primero está determinado como lo inmensurado (*maßlos*), mientras que el segundo es determinado como midiente (*messend*).

[1129] Cf. Hegel [1985] p. 335: “In der Veränderung oder Verminderung der Temperatur zeigt sich somit eine besondere Spezifikation”.

El gráfico[1130] correspondiente al calentamiento del agua es determinado por los respectivos calor específico del hielo, calor de fusión del hielo, calor específico del agua y el calor de ebullición del agua. El eje de las ordenadas representa la temperatura del agua en grados centígrados y el de las abscisas las calorías suministradas. La función que se obtiene es la siguiente:

$$y=\begin{cases} 2x-10 & \textbf{si}\ \ 0\le x\le 5\\ 0 & \textbf{si}\ \ 5\prec x\prec 85\\ x-85 & \textbf{si}\ \ 85\prec x\prec 185\\ 100 & \textbf{si}\ \ 185\prec x\prec 725 \end{cases}$$

Vemos que la función dicontinua está compuesto por cuatro tramos. El salto del primero y al tercero es lo que hemos llamado especificación. En este salto obtenemos como resultado un nuevo valor del calor específico del agua. La relación entre el calor suministrado y la temperatura -o, en términos de Hegel, la relación entre la temperatura exterior y la temperatura del cuerpo- no es una relación constante[1131]. Esto último significa que la relación no es expresable mediante un exponente que sea un Cuanto inmediato –i.e., mediante un exponente que no sea cualitativo. En el ejemplo del agua necesitamos cuatro Cuantos inmediatos para dar cuenta del cambio de temperatura del agua en su paso desde el estado sólido hasta la completa ebullición. Estos cuatro Cuantos son los exponentes de cada intervalo en cuestión. Su significado analítico es el de la pendiente de un gráfico[1132].

Algo análogo ocurre con la relación de potencias, sólo que el fenómeno de la inconstancia de la relación es llevada al límite. Efectivamente, en una relación de potencias los puntos de especificación no son unos Cuantos sino todos los valores que admite la función. Cada punto de la función de potencias es un punto de especificación. Para poder ver esta analogía, no tenemos mas que representar una función potencial como $y=x^2$ mediante una función en la que la Regla es distinta en cada punto de su recorrido:

$$y=\begin{cases} \ldots & \\ 2\cdot x & \textbf{si}\ \ 2\le x\le 2\\ \ldots & \\ 3\cdot x & \textbf{si}\ \ \mathbf{3\le x\le 3}\\ \mathbf{\ldots} & \end{cases}$$

En los dos casos una variación aritmética de la variable independiente *x* no tiene siempre como consecuencia una variación aritmética de la variable dependiente *y*. Esto significa para Hegel que la relación entre los dos Cuantos no es conmensurable. De ahí que la relación potencial sea el punto en el que la Cantidad retorna a la Cualidad. En el caso de la

---

1130 Cf. Moretto [1984] p. 253.

1131 Cf. Hegel [1985] p. 335: “Das Verhältnis der Temperatur, die als äußerliche vorgestellt wird, zur Temperatur eines bestimmten Körpers hat nicht einen festen Verhältnisexponenten”.

1132 Los exponentes en cuestión son 2 para el primer tramo, 0 para el segundo, 1 para el tercero y 0 para el último.

función potencial no hay un Cuanto que exprese la relación entre las variables x e y. Esto significa a su vez que la determinación cuantitativa de la relación es inmanente a la relación. En el caso del calentamiento del agua la especificación de la misma es inmanente al agua.

La diferencia entre una función potencial y la función que resume el comportamiento del calentamiento del agua consiste en que la primera es una relación entre dos meros Cuantos, mientras que la segunda es una relación entre dos Medidas inmediatas[1133]. Sin embargo, una vez que hemos obtenido el calor específico del agua como algo inmanente a él, no hay motivo para no pensar que, a su vez, el medium con el que se suministra el calor al agua[1134] tendrá su propia serie de calores específicos. Es decir, como resultado de la especificación hemos obtenido una relación entre dos lados: el primero es el especificado o cualitativo y el segundo es el exterior cuantitativo[1135]. La relación entre las Medidas inmediatas se convierte así, por reflexión, en una relación entre cualidades que, como dirá Hegel, son en si misma una Medida. La Medida es ahora una relación entre dos Medidas no ya inmediatas, sino una relación entre cualidades.

Es decir, en la relación entre dos Medidas inmediatas[1136] hemos obtenido un momento especificante[1137]. Uno de los lados de esta relación, el denominador, es el lado cuantitativo. El otro lado, el numerador, es el lado que cualifica el Cuanto[1138]. Este último lado, el cualitativo, presupone el lado cuantitativo[1139]. A su vez, el lado cuantitativo está en relación con el lado cualitativo. Ahora bien, a diferencia de lo que ocurría en la categoría de la Cantidad, en la Medida un Cuanto no está en relación a otro Cuanto, sino que está en relación a algo cualitativo[1140]. La diferencia de este Cuanto con respecto al lado cualitativo no puede ser más

[1133] O, tal y como se expresa Hegel (en Hegel [1985] p. 335: “als Verhältnis von einem bloß quantitativen [Verhältnis] zu einem qualifizierenden [Verhälnis]”) , una relación entre una relación cuantitativa y una relación cualificante (*qualifizierend*). La primera relación es la temperatura del agua en cada caso. La segunda la “Temperatura” suministrada al agua. Al ser los dos lados una misma cualidad (la temperatura) Hegel podrá afirmar que en última instancia se trata de una relación entre dos cuantos de una misma cualidad. Cf. así Hegel [1985] p. 335-336: “Wie sich das spezifizierende Verhältnis gleich weiter bestimmt wird, daß die Momente des Maßes nicht nur in einer quantitativen und einer das Quantum qualifizierenden Seite einer und derselben Qualität bestehen, sondern im Verhältnis zweier Qualitäten, welche an ihnen selbst Maße sind”. La relación no es, como en una función potencial, una relación entre dos cuantos incualificados, sino una relación entre dos cuantos cualificados, es decir, debido a que se trata de la misma cualidad (la temperatura), una relación entre dos cuantos de una misma cualidad.

[1134] A saber, el aire.

[1135] En el ejemplo del agua, la temperatura del agua y la temperatura suministrada.

[1136] La Medida inmediata es, recordemos, una Medida expresada por una relación directa: dos veces un metro dan dos metros de longitud. La relación entre le Monto (dos metros) y la unidad (un metro) es directa y, por ello, su exponente (dos) es constante.

[1137] Para expresarlo con Hegel; si resulta que lo cualitativo del cuanto (la temperatura del agua) es únicamente en su relación a lo exterior cuantitativo (la temperatura suministrada que varía aritméticamente) y, además, esta relación es una relación en el que lo cualitativo del cuanto se especifíca (la temperatura del agua no varía aritméticamente), entonces, como hemos visto, la exterioridad del cuanto cualitativo es suprimida en la inmanencia que es propia a algo.

[1138] En el ejemplo del calentamiento del agua, la temperatura suministrada es el lado cuantitativo, mientras que la temperatura del agua constituye el lado cualificante del cuanto.

[1139] El lado cualitativo se muestra como cualitativo, es decir, como una serie no aritmética, únicamente por que está puesta en relación con una serie aritmética, es decir, por que está puesta en relación con un lado exteriormente cuantitativo.

[1140] Cf. Hegel [1985] p. 336: “Dieses [das Quantum] aber ist von der Qualität selbst auch qualitatitv unterschieden”.

que cualitativa. Vemos así que cada lado tiene en sí su otro lado. Como resultado de ello, la Medida es ahora una relación entre dos lados que son, ellos mismos, cualidadades[1141].

La Medida será ahora una Medida entre dos Medidas específicas, es decir, entre dos cualidades. Con ello no se han anulado meramente los lados cualitativo y cuantitativo, especificante y exterior, del momento anterior. Estos dos lados han sido, mas bien, suprimidos. Por esta razón, los dos lados de la nueva Medida tendrán, cada uno, un aspecto cuantitativo y uno cualitativo. Ambos lados de esta nueva Medida –que Hegel denomina la Medida realizada[1142]– serán en su aspecto cuantitativo y cualitativo, respectivamente, el lado extensivo o real y intensivo o ideal[1143]. Por ejemplo, en la expresión de la caida de los cuerpos[1144] tenemos la relación entre dos cualidades, el tiempo y el espacio, siendo éste extensivo y aquél intensivo.

Del mismo modo en que en la Medida realizada no se han anulado los momentos cuantitativo exterior y cualitativo especificante previos, tampoco en la relación potencial entre dos cualidades se anulan sus momentos previos: la Medida inmediata y la relación directa. Como veremos, estos dos momentos están suprimidos y asumidos (*Aufheben*) en la Medida realizada. El ejemplo al que se remite Hegel como ilustración tiene lugar en la *Mécanique Analytique*[1145] de Lagrange. En él, el matemático italiano explica el modo en el que la expresión para la caída de los graves puede llegar a ser una expresión con significado[1146]. Para ello es necesario dar una Medida inmediata, empírica, a la variables que entran en juego en la fórmula. Si comenzamos por tomar el tiempo como unidad, el espacio unidad será el doble de aquél espacio que recorrería un cuerpo en esa unidad de tiempo.

Si derivamos la expresión para la caida de los cuerpos obtenemos que la relación entre los espacios y los tiempos es una relación directa. En esta relación inmediata podemos dar con el valor de exponente *a* interrogando debidamente a la naturaleza. Este exponente es una Medida inmediata, empírica[1147]. La relación directa no es una relación autodeterminada pues depende del exponente para su determinación. A su vez, el exponente adquiere su determinación cualitativa en la relación directa[1148]. La unidad de estos dos momentos, la unidad negativa de la Medida inmediata y la relación directa es la Medida realizada.

[1141] Cf. Hegel [1985] p. 337: “Daa Maß ist so das immanente quantitative Verhalten zweier Qualitäten zueinander”. Cf. también Hegel [1978] p. 199: “Es sind also nunmehr Qualitäten, welche in der Beziehung des Maßes aufeinander sind”.

[1142] Cf. Hegel [1985] p. 337.

[1143] Cf. Hegel [1978] p. 199: “Die eine hat also die Bestimmtheit gegen die andere, das Extensive, die Äußerlichkeit an ihr selbst zu sein; die andere aber das Intensive, das Insichseiende oder Negative gegen jene; jene die reelle, gleichgültige, diese die ideelle, spezifische Seite”. Cf. también Hegel [1985] p. 339: “Die nächste Bestimmtheit der Qualitäten selbst ist, der einen, das Extensive, die Äußerlichekeit an ihr selbst zu sein, der anderen, das Intensive, das Insichseiende oder Negative gegen jene”.

[1144] Es decir, en la fórmula de lo que Hegel llama “die bedingt freie Bewegung”.

[1145] Cf. Lagrange [1888] pp. 263 y 264.

[1146] Es decir, el modo mediante el cual la expresión para la caida de los graves pueda decir algo de cada grave en cuestión.

[1147] Cf. Hegel [1985] p. 343: “Das unmittelbare Moment, daß in der Bewegung des Falles auf eine Zeiteinheit (eine Sekunde und zwar die sogenannte *erste*) die Anzahl von etwa fünfzehn räumlichen Einheiten, die als Fuße angenommen sind, komme, ist ein unmittelbares Maß wie die Maßgröße der menschlichen Gliedmaßen, die Distanzen, Durchmesser der Planeten usf.”. Recordemos que el coeficiente *a* es calculado en base al doble del espacio recorrido.

[1148] Cf. Hegel [1985] p. 344: “Als diese Einheit enthält das Maß das Verhältnis, in welchem die Größen durch die Natur der Qualitäten bestimmt und different gesetzt sind und dessen Bestimmtheit daher ganz immanent und selbständig, zugleich in das Fürsichsein des unmittelbaren Quantums, den Exponenten eines direkten Verhältnisses, zusammengegangen ist; seine Selbstbestimmung ist darin negiert, indem es in diesem seinem

5.2 LA MEDIDA REAL

En la Medida real cada Medida estará en relación con otra Medida siendo cada una de ellas lo que habitualmente se denomina “cosa” (*Ding*) o algo real (*reelle Etwas*)[1149]. Por esta razón, a diferencia de la especificación del tiempo que tenía lugar en la caida libre, la especificación entre los algo reales trendrá lugar en una relación directa. Y es que, a diferencia del espacio y el tiempo, los algo reales sólo son algo dentro de la relación con otro algo (es decir, dentro de la relación directa).

5.2.1 La relación entre Medidas autosuficientes

5.2.1.1 La Unión de dos Medidas.

El modelo de Medida que utiliza Hegel en este parágrafo es el del peso específico[1150]. Si bien es verdad que, debido a la igualdad entre la masa gravitatoria y la masa inercial, los cuerpos caen con la misma aceleración sobre la superficie de la Tierra, no todos ellos tienen el mismo peso específico. El peso específico es la relación entre una cualidad que es dentro de sí (*insich*) –la cantidad extensiva o intensiva de materia– y una cualidad que es fuera de sí –el espacio y, en concreto, el volumen. Con el peso específico la pasta común que, bajo el baremo de la caída, resultaba ser completamente homogénea adquiere una cualidad[1151]: el algo material adquiere una naturaleza cualitativa[1152]. Con el peso específico aparece el concepto de grado de llenado del espacio y con ello la posibilidad de pensar el caso límite: el grado de llenado cero o espacio vacio.

El peso específico es la unidad de dos lados cualitativos. Esto significa que cada uno de los lados -pongamos por caso, el peso y el volumen- son, asimismo, relaciones. En el caso del peso, la masa del cuerpo en cuestión es puesta en relación con la masa del cuerpo con respecto al que se mide la atracción –esto es, con la masa de la Tierra. Del mismo modo, el

---

Anderen die letzte, fürsichseiende Bestimmtheit hat; und umgekehrt hat das unmittelbare Maß, welches an ihm selbst qualitativ sein soll, an jenem erst in Wahrheit die qualitative Bestimmtheit”.

[1149] Cf. Hegel [1985] p. 345.

[1150] Para el paso de la aceleración gravitatoria al peso específico Hegel hace uso de la ayuda que le proporcionan las expresiones alemanas. Cf. Ruschig [1997] p. 27: “Die altertümliche Ausdruckweise leistet der Konstruktion des Übergangs ins „reale Maaß“ Vorschub: Hegel bezeichnete den Exponenten aus der Weg-Zeit-Relation für die Fallbewegung (heute: die Erdbeschleunigung) als „Schwere“”.

[1151] Pasamos así de un ambito en el que se corte por donde se corte siempre tendremos la misma aceleración terrestre con respecto a ello, a un ambito en el que los cortes sobre la pasta homogénea no son ya meramente cuantitativos -meramente indiferentes-. Cf. Hegel [Enz.] §293: “Hier fällt das bloß Quantitative weg und Qualitatives tritt ein; denn die Materie hat jetzt eigentümliche Determination in ihr selbst. Das spezifische Gewicht ist so eine vollkommen durchdringende Grundbestimmung der Körper”.

[1152] Cf. Hegel [1985] p. 347: “Diese Qualitäten sind quantitativ bestimmt, und das Verhältnis derselben zueinander macht die qualitative Natur des materiellen Etwas aus”. Esta naturaleza cualitativa es lo que permitió a Arquímedes especificar la cualidad de la corona del tirano de siracusa. El problema está en que la cualidad del oro no es univocamente determinable por su peso específico. Para concretar más nuestra Medida, pera poder afinar más en cualidad, es necesario ir a la siguiente etapa: la etapa del peso equivalente.

volumen de cada caso remite a un volumen que ha sido puesto como unidad[1153]. El papel de cada lado en la especificación de algo es igual de relevante[1154].

La cualidad específica de algo, en su inmediatez, es expresado por un exponente y, por lo tanto, por un Cuanto[1155]. Debido a esta inmediatez, su medición estará condicionada a la remisión de su exponente a otro exponente que se pondrá, en última instancia, como unidad de Medida. En la medida en que esta unidad de Medida es exterior o dada, el exponente que pretendemos medir será variable o dependiente de ella[1156]. Es más, la alteración de la Medida se da también en el nivel del resultado del contacto de dos Medidas[1157]. Por un lado, dice Hegel, en la medida en que cada una de las Medidas puestas en contacto es una Cualidad cuantitativa, se comporta como una Medida contra el exponente exterior y lo especifica. Pero este Cuanto exterior es también especificante[1158]; lo que especifica, en tanto que es también Cuanto, es también él mismo especificado y, por ello, la especificación es una especificación mutua (*gegenseitige Spezifikation*)[1159]. A esta especificación mutua lo llama Hegel en la primera edición de la *Wissenschaft der Logik* "neutralización" (*Neutralisierung*)[1160].

Un ejemplo de especificación mutua es el cambio en el volumen de una Aleación en relación a la suma del volumen de sus elementos. A diferencia de lo que ocurriría en el caso de que la determinación fuese meramente cuantitativa[1161], la mutua especificación de los componentes en una aleación hace que el todo no sea el mero resultado de la suma de las medidas de sus partes –i.e., de los pesos específicos. Las partes son especificadas y

---

1153 En última instancia la unidad del volumén es el metro.

1154 Es más, el lado que en principio podría parecer ser el mas externo y, por ende, menos espedificante de algo puede llegar a ser lo especialmente especificante. Piénsese por ejemplo en la solución de alcohol y agua donde el cambio del volumen de la solución y, por el tanto, el valor del volumen es lo propiamente especificante de la solución.

1155 Recuérdese el esquema de la notación de Hegel en este punto: Anzahl/Einheit=Exponent, es decir, Monto/Unidad=Exponente.

1156 Cf. Hegel [1985] p. 347: "und solches Etwas ist dadurch der innerlichen Maßbestimmung ungeachtet veränderlich".

1157 La deducción lógica de esta afirmación no es facil de seguir en Hegel. El problema consiste en que el pasaje en cuestión parece partir de un ejemplo concreto para de ahí deducir el movimiento general del momento de la Medida. El ejemplo es el de las aleaciones en las que el volumen de la mezcla es distinta a la suma del volumen de sus componentes. La lectura que ofrece Doz defiende el carácter puramente lógico. Su argumento es el siguiente: ya que la Medida es cualidad y, dentro de la cualidad, en el *Dasein* la alteración "es la primera forma de aquello que se revelará como alterabilidad intrínseca de un *Dasein*", la Medida se verá alterada en contacto con otra Medida (cf. Hegel [1994] p. 145). Este "argumento" no muestra la necesidad de que la alteración sea algo que tenga lugar en el producto de las dos Medidas y no, simplemente, en cada una de las Medidas en "contacto". La lectura de Ruschig (en Ruschig [1997] p. 47 y sigs.) es más desencantada. Tanto es así que hablará de un cambiazo o cambio de modelo que subyace en la argumentación de Hegel. En el caso en el que las Medidas son conservadas, el modelo subyacente es el de los pesos específicos (Cf. Hegel [1985] p. 347: "Einerseits erhält sich nun jedes der beiden Maße in der Veränderung"). En el caso del cambio de la Medida total el modelo es el de la Aleación (*Legierung*) (Cf. Hegel [1985] p. 347: "andererseits aber ist dieses Sich-Erhalten selbst ein negatives Verhalten zu diesem Quantum"). Pero, diríamos, la crítica a Hegel no puede consistir meramente en mostrar que los modelos químicos subyacentes son distintos, sino en, además de ello, demostrar que la marcha lógica no es concluyente sin el recurso a estos modelos. Obviamente, esto último equivaldría a decir que la marcha lógica no es tal marcha - i.e. que la deducción (*Darstellung*) lógica no es más que história. Volveremos sobre este punto en la recapitulación final.

1158 Para decirlo desde la lógica de la Cualidad; el otro de algo es también algo.

1159 Cf. Hegel [1985] p. 347 y Hegel [1978] p. 206: "Es ist eine gegenseitige Spezifikation".

1160 En Hegel [1978] p. 207.

1161 Cf. Hegel [1985] p. 348: "Nach der bloß quantitativen Bestimmung wäre die Verbindung ein bloßes Summieren der zwei Größen der einen und der zwei der anderen Qualität". Desde esta perspectiva, el peso específico de la aleación es igual a la suma de los pesos específicos de sus elementos.

especificantes en el proceso de aleación. Debido a ello el peso específico del todo no coincide con el peso específico de la suma de sus partes por separado[1162].

En resumen, hemos obtenido como resultado unas Medidas autosuficientes que, además de ser producto de una especificación, son ellas mismas especificadoras cuando son puestas en relación con otras Medidas asimismo autosuficientes. Esta puesta en relación de las Medidas las especifica nuevamente[1163] dando así lugar a nuevos exponentes.

5.2.1.2 La Medida como serie de relaciones entre Medidas

Si en la unión de un algo con otro algo tomáramos estos algo en un sentido que recogiése únicamente el contenido ganado en el momento de la cualidad, estos algo se destruirían a sí mismos en esa unión[1164]. Pero sabemos que en la Medida los algo son más concretos que en el momento de la cualidad: en la Medida un algo es Medida en sí. Esto significa que en su unión con otro algo, el algo, en tanto que es cantidad[1165], puede seguir siendo el que es y, en tanto que cualidad, puede ser suprimido en esa unión[1166]. Los algo de ahora no serán comparados entre sí externamente[1167] -es decir, por una Medida inmediata exterior- sino que lo serán realmente. Esto significa que el algo es comparado con los demás algos no mediante algo externo al algo, sino mediante sí mismo[1168]. Como resultado de estas comparaciones del algo con los demás algos obtendremos unos nuevos exponentes. A esta serie de exponentes lo llama Hegel, con el fin de distinguir del exponente anterior, exponentes cualitativos. Veamos todo ello mediante el siguiente esquema:

[1162] El que la variación con respecto a la suma de los pesos específicos sea debido a una variación del denominador, del volumen, y no del numerador, de la masa, se debe al Principio metafísico de conservación de las magnitudes (en este caso la masa). Este Principio no es un conocimiento empírico. En este sentido, Hegel parece defender la postura ingenua positivista cuando afirma lo siguiente: "das Gewicht findet sich als die Summe der Gewichte" (en Hegel [1985] p. 348). Sin embargo, mas adelante hablará de que las masas no *pueden* sufrir alteración alguna, con lo que su caracter empírico es descartado. Cf. Hegel [1985] p. 348: "Dieses immantente Bestimmen des Quantitativen, da es, wie gezeigt, nicht am Gewicht erscheinen kann, erweist sich an dern anderen Qualität, welche die ideelle Seite des Verhältnisses [el volumen] ist". Sobre este punto cf. Holmes [1998] p. 58. Para una crítica de la demostración especulativa del Principio de conservación de la masa en Hegel véase Ruschig [1997] p. 51.

[1163] Ello se debe a que la Medida (lat. *modus*) es el modo y manera de ser-para-otro de algo y por ello su variación no afecta a la determinación en sí y para sí de algo. Cf. Hegel [1978] p. 207: "Das Selbständige bleibt also in der Neutralisation zwar nicht, was es unmittelbar ist; es stellt sein Ansichbestimmtsein, nur als einen Modus, als eine Art und Weise des Seins-für-Anderes dar; aber umgekehrt ist seine Veränderung ebenso nur ein Modus für es und betrifft nicht seine Bestimmung an und für sich".

[1164] Cf. Hegel [1978] p. 207: "Wenn es [das Sebständige] nur qualitativer Natur wäre, so hätte es an dem Anderen nur sein Nichtsein". Cf. también Hegel [1985] p. 348: "Wenn Etwas, das mit Anderem vereint wird, und ebenso dieses Andere nur durch die einfache Qualität bestimmt das wäre, was es ist, so würden sie in dieser Verbindung nur sich aufheben".

[1165] Como dice Hegel, en tanto que "Seine [das Maß] Qualität ist eingehüllt in das Quantitative" (en Hegel [1985] p. 349). Cf. también Hegel [1978] p. 207: "Erst in das Quantitative eingehüllt ist ihr der Unterschied von einem Anderen auch gleichgültig".

[1166] Obsérvese la distinción entre la "sich aufheben" del algo de la mera cualidad y la "aufheben in einer Einheit" del algo de la Medida.

[1167] Medir un armario con un metro es, por ejemplo, un "äußerliche Vergleichung". Cf. Hegel [1985] p. 331.

[1168] Cf. Hegel [1985] p. 349 y Hegel [1978] p. 207: "es [das Selbständige] ist seine Vergleichung mit ihnen durch sich selbst".

$$\frac{\mathbf{Algo_1}}{\mathrm{Algo}_1}=e_{11} \quad \frac{\mathbf{Algo_2}}{\mathrm{Algo}_1}=e_{21} \quad \ldots \quad \frac{\mathbf{Algo_n}}{\mathrm{Algo}_1}=e_{n1} \qquad (1)$$

$$\frac{\mathbf{Algo_1}}{\mathrm{Algo}_2}=e_{12} \quad \frac{\mathbf{Algo_2}}{\mathrm{Algo}_2}=e_{22} \quad \ldots \quad \frac{\mathbf{Algo_n}}{\mathrm{Algo}_2}=e_{n2} \qquad (2)$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{\mathbf{Algo_1}}{\mathrm{Algo}_{n1}}=e_{1n} \quad \frac{\mathbf{Algo_2}}{\mathrm{Algo}_n}=e_{2n} \quad \ldots \quad \frac{\mathbf{Algo_n}}{\mathrm{Algo}_n}=e_{nn} \qquad (n)$$

El exponente cualitativo del Algo_1 es con ello la serie de los exponentes exteriores, indiferentes[1169] e_{11}, e_{21}, ..., e_{n1}. En la fila (1) obtenemos así la serie de los exponentes del Algo_1 en donde éste funciona de unidad y los demás **Algo** (en negrita) como monto (*Anzahl*). El Algo_1 será distinto de otro Algo_n en base a su serie de exponentes. Es decir, lo que distingue el Algo_1 del Algo_n es la serie e_{11}, e_{21}, ..., e_{n1} con respecto a la serie e_{1n}, e_{2n}, ..., e_{nn} Visto las cosas desde los **Algo** (en negrita), cada uno de ellos se distingue con respecto a otro **Algo** mediante la serie de exponentes e_{11}, e_{12}, ..., e_{1n} que le es propio.

Dependiendo de lo que substituyamos en las casillas de **Algo** y Algo obtendrémos como resultado distintos significados para los exponentes. Por poner un ejemplo, si tanto los **Algo** como los Algo son los pesos específicos de distintas Substancias, obtendremos una matriz de exponentes que será diagonal. Es decir, si tanto los **Algo** como los Algo son los pesos específicos de *n* elementos distintos, y ordenamos igualmente estos elementos tanto en la serie de las filas o **Algos**, como en la serie de las columnas o Algos, obtendremos una matriz cuya forma reproducimos acontinuación:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{Algo_1} & \mathbf{Algo_2} & \ldots & \mathbf{Algo_n} \\ \mathrm{Algo}_1 & e_{11}=1 & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ \mathrm{Algo}_2 & e_{21} & e_{22}=1 & \ldots & e_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{Algo}_\mathrm{n} & e_{n1} & e_{n2} & \ldots & e_{nn}=1 \end{array}$$

[1169] Cf. Hegel [1985] p. 347. El problema con el que se enfrenta Hegel en todo este apartado es el siguiente: en el modelo químico en el que Hegel esta pensando, los exponentes exteriores de este apartado no pueden ser los exponentes exteriores del apartado anterior. Recordemos que los exponentes del apartado anterior eran los pesos específicos, mientras que ahora, para que este apartado pueda *funcionar* en la química, los exponentes deben ser los pesos equivalentes. El peso equivalente de un ácido es la cantidad de esa Substancia requerida para neutralizar o saturar una base. Haciendo uso del esquema que presentamos en esta página: e_{11} es la cantidad requerida del ácido $\mathbf{Algo_1}$ para neutralizar una unidad de la base Algo_1. Este cambio de modelo químico, de los pesos específicos a los pesos equivalentes, de la comparación exterior a al comparación real, del proceso de aleación al proceso químico, en definitiva, de la *Unión de dos Medidas* a la *La Medida como serie de relaciones entre Medidas*, no está deducido en la *Wissenschaft der Logik*. La postura del intérprete ante ello puede ser doble: la primera, la que en estas líneas defenderemos, consiste en negar la posibilidad y, por lo tanto, la obligación, de la *Wissenschaft der Logik* de llegar a tal precisión en la deducción (*ultra posse nemo obligatur*). La segunda lectura consite en afirmar la obligación que tendría la generación en la *Wissenschaft der Logik* de llegar a una escala de esta magnitud o precisión. Esta última opinión es la defendida por Ruschig en Ruschig [1997] pp. 64-143 y Ruschig [2001] p. 8.

Donde, por construcción, $\mathbf{Algo}_i = \mathrm{Algo}_i$ para $\forall i, i = 1,...,n$. De ahí que, también por construcción, $\forall i, j, j = i, e_{ij} = 1$ y $\forall i, j, e_{ij} = 1/e_{ji}$. Si, además de ello, tenemos en cuenta que los exponentes los hemos obtenido dividiendo el peso específico $\mathbf{Algo}_i$ por el peso específico Algo_j, no tardaremos en notar que el determinante de la matriz de exponentes es cero –es decir, que cada una de las filas es expresable como combinación lineal de las demas filas y que lo mismo pasa con las columnas. Es decir, cada columna es representable como un punto que cae sobre una recta situada en un espacio *n*-dimensional, siendo la diferencia entre las columnas la cantidad, mayor o menor, que se tome de esta línea común. Algo exactamente análogo ocurrira con la filas. La línea en cuestión es la *masa* o pasta común denominada “peso específico”. En relación a él los elementos se definen en función de tener más o menos cantidad de la misma[1170].

Si realizamos la semántica de la matriz en referencia al proceso de neutralización química -siendo los **Algo** los ácidos y los Algo las bases- los exponentes nos proporcionarán la cantidad de ácido requerida para neutralizar una unidad de masa de la base de cada caso. En el apartado *Das Maaß als Reihe von Maßverhältnißen*, Hegel hace uso de la terminología y del contenido que subyace a este proceso químico particular. Hegel hablará así de la neutralización (*Neutralisierung*) de las Medidas entre sí. Y lo que es más, en la primera edición de la *Wissenschaft der Logik*, el apartado mismo se titulará *Specification der Neutralität*[1171]. Las resonancias a los últimos desarrollos de la química de la época[1172] de Hegel son con ello evidentes en la *Wissenschaft der Logik* y no se reducen a hacer acto de presencia únicamente en los distintos *Anmerkungen*.

El problema de nuestra matriz consiste en que cada Algo es la unidad de su fila. Cada Algo es por ello una unidad exterior. Por lo tanto, no es posible comparar estos autosuficientes entre sí[1173]. Para poder lograr la comparación necesitamos lo que Hegel llama una “unidad común que es para sí” (*gemeinschaftliche fürsichseiende Einheit*). Esta unidad no es tomada ni establecida desde fuera del espacio de relaciones que se establecen en la matriz. Para ello será necesario que las columnas y las filas –los pesos de las bases y los de los ácidos– sean proporcionales entre sí. Por ejemplo, si hacemos uso de una unidad exterior

---

[1170] Exactamente lo mismo ocurre con la ley del valor tal y como es formulada por Marx. En este caso los **Algo**=Algo, serían mercancias y la línea, la pasta común del valor, sería el fundamento de toda matríz –los matemáticos hablan de “base” de un espacio–; la cantidad de trabajo socialmente necesario. El que una línea tenga dos dimensiones responde al hecho de que únicamente podemos discernir la fuerza de trabajo socialmente necesario por su magnitud unidimensional: es decir, por el hecho de que tomamos de ella más o menos. El espacio en que se situará la línea constará de *n* dimensiones, que vendrán dadas por la cantidad de mercancias, en principio infinitas, con las que se trabaje. Nótese que, aunque este “más o menos” es igualmente interpretable como magnitud extensiva o intensiva, Marx llegará a priorizar la primera –sin olvidar la segunda lectura en el *Das Kapital*–. Por ello, el tiempo de trabajo socialmente necesario será fundamentalmente, en Marx, una magnitud extensiva.

[1171] Cf. Hegel [1978] p. 207.

[1172] Téngase en cuenta que habrá que esperar hasta Richter para obtener una constatación no parcial, no reducida a un elemento u otro como ocurre en Wenzel, de la proporcionalidad entre las filas y entre las columnas de nuestra matriz. Cf. sobre este punto Kopp [1966] p. 360. La proporcionalidad de la que estamos hablando es la que da cuenta del fenómeno a cuya solución Wenzel dedicará todos sus esfuerzos y que formula Kopp de la siguiente forma: “zwei neutrale Salze, wenn sie sich gegenseitig zersetzen, Producte geben, welche gleichfalls neutral sind” (en Kopp [1966] p. 356).

[1173] Cf. Hegel [1985] p. 349-350: “Aber auf diese Weise wären diese beiden Selbständigen nicht vergleichbar, insofern jedes so als Einheit gegen seine Exponenten betrachtet wird, und die beiden aus dieser Beziehung entstehenden Reihen unbestimmt andere sind”.

como la de 1000 gramos para los ácidos, obtendrémos la tabla siguiente de cantidades[1174] requeridas para la neutralización de los ácidos nítrico y sulfúrico por parte de sosa, cal, magnesia y amoníaco:

	sosa	cal	magnesia	amoníaco
ácido nítrico	$\frac{635}{1000} = 0{,}635$	$\frac{445}{1000} = 0.445$	$\frac{318}{1000} = 0{,}318$	$\frac{556}{1000} = 0{,}556$
ácido sulfúrico	$\frac{816}{1000} = 0{,}816$	$\frac{572}{1000} = 0.572$	$\frac{408}{1000} = 0{,}408$	$\frac{714}{1000} = 0{,}714$

Tal y como veníamos adelantando, el problema de la unidad de Medida exterior consiste en que no podemos comparar los distintos ácidos entre sí: ambos algos autosuficientes tienen la misma unidad exterior establecida en 1000 gramos. El paso a los pesos equivalentes evita precisamente este problema. Para ello, el procedimiento hace uso del hecho de que hay una relación constante entre la serie de los exponentes del ácido nítrico y la de los exponentes del ácido sulfúrico. De este modo, es la serie completa la que hace de unidad para la comparación de los ácidos entre sí[1175]. Dependiendo de cuáles de las filas de exponentes y cuáles de las columnas de los exponentes se escoja como unidad[1176], obtendrémos como resultado pesos equivalentes distintos. Sirva la tabla siguiente como continuación del ejemplo anterior:

	sosa	cal	magnesia	amoníaco
ácido nítrico	$\frac{40}{63} = 0{,}635$	$\frac{28}{63} = 0.445$	$\frac{20}{63} = 0{,}318$	$\frac{35}{63} = 0{,}556$
ácido sulfúrico	$\frac{40}{49} = 0{,}816$	$\frac{28}{49} = 0.572$	$\frac{20}{49} = 0{,}408$	$\frac{35}{49} = 0{,}714$

En esta nueva tabla, los pesos equivalentes del ácido nítrico y del ácido sulfúrico son, respectivamente, 63 y 49. Por otro lado, los pesos equivalentes de las bases sosa, cal, magnesia y amoníaco son, respectivamente, 40, 28, 20 y 35. Con ello obtenemos un método con el cual comparar entre sí tanto los ácidos como las bases. De este modo, la serie constante de exponentes igual para todos los ácidos 40, 28, 20 y 35 proporciona el patrón de comportamiento neutralizador de un ácido a secas –es decir, de la forma "ácido". Lo mismo ocurre en el caso del comportamiento de un base a secas –es decir, de la forma "base"[1177] –esta vez con la serie 63, 49.

[1174] Recojemos los datos de Ruschig [1997] p. 83.

[1175] Cf. Hegel [1985] p. 350: "somit die Reihe von Exponenten [...] ist [...] die Einheit für jene beiden [sebständigen]".

[1176] Tampoco es necesario que la unidad sea la serie de algún elemento que venga de hecho representado en la tabla. Podemos imaginarnos un ácido ideal -o, en su caso, una base ideal- en proporción al cual se establecen los pesos equivalentes de los ácidos y bases restantes.

[1177] Siguiendo con la analogía con *Das Kapital*, en su forma equivalente, la matriz del ejemplo se nos convierte en una matriz (1×n), es decir, en un vector, donde las columnas vienen a ser ocupadas por las mercancias y la única fila es la que ocupará un equivalente univesal. Los elementos del vector son la expresión del valor del equivalente universal: la mercancia segregada fuera del conjunto de las mercancias. Este equivalente universal es con ello algo así como una mercancía que funciona como mercancia a secas, algo que, como dice Marx, equivaldría en el reino animal a un bicho que llegase a ser meramente "un animal": un conjunto de las especies

De este modo tenemos que[1178]:

i) cada peso específico es unidad en relación a la serie que tiene en frente[1179]

ii) cada peso específico es exponente en relación a cada elemento de la serie que tienen en frente, tomando ahora lo que en 1) eran Montos como unidad[1180]

iii) cada peso específico es número de comparación (*Vergleichungszahl*) en relación a los demás pesos específicos de su misma serie[1181].

Una vez que tenemos los pesos equivalentes, podremos comparar entre sí tanto los ácidos como las bases. De este modo, en relación a la forma base, las cantidades de los pesos específicos de los ácidos son las cantidades requeridas para neutralizar esta forma base. Del mismo modo, en relación a la forma ácido, las cantidades de los pesos específicos de las bases son las cantidades requeridas para neutralizar la forma ácido. Es más, podemos contemplar estos pesos equivalentes como represesentantes[1182] de las fuerzas de afinidad de los ácidos en relación a una base cualquiera o de las bases en relación a un ácido cualquiera[1183]. De ahí es

---

animales que sería, a su vez, un ejemplar. Cf. sobre este punto Marx [1983] p. 37: "In der Form III, welche die rückbezogene zweite Form und also in ihr eingeschlossen ist, erscheint die Leinwand dagegen als die *Gattungsform* des Aequivalents für alle andern Waaren. Es ist als ob neben und außer Löwen, Tigern, Hasen und allen andern wirklichen Thieren, die gruppirt die verschiednen Geschlechter, Arten, Unterarten, Familien u.s.w. des Thierreichs bilden, auch noch *das Thier* existierte, die individuelle Incarnation des ganzen Thierreichs. Ein solches Einzelne, das in isch selbst alle wirklich vorhandenen Arten rerselben Sache eingreift, ist ein *Allgemeines*, wie *Thier, Gott* u.s.w. Wie die Leinwand daher *einzelnes Aequivalent* wurde, dadurch daß sich *eine* andre Waare auf sie als Erscheinungsform des Werths bezog, so wird sie als allen Waaren gemeinschaftliche Erscheinungsform des Werths das *allgemeine Aequivalent, allgemeiner Werthleib, allgemeine Materiatur der abstrakten menschlichen Arbeit*". Hegel mismo (en *Enz.* §333 Zus. (Hegel [IX] p. 324 y sigs.) ilustrará estos resultados de la Stochiometria haciendo uso de un ejemplo que reproduce esta misma analogía: "Jenes von Richter mit vielen scholastischen Reflexionen auseinandergesetzte Prinzip der *Stöchiometrie* läßt sich nun am leichtesten durch folgende Vergleichung anschaulich machen. Kaufe ich verschiedene Waren mit Friedrichsd'ors ein, so brauche ich z. B. zu einem gewissen Quantum des ersten Artikels 1 Friedrichsd'or, zu demselben Quantum des zweiten Artikels 2 Friedrichsd'ors usw. Kaufe ich nun mit Silbertalern ein, so brauche ich mehr Teile dieser Münzsorte, nämlich $5^2/_3$ Silbertaler statt eines Friedrichsd'ors, $11^1/_3$ statt zweier usf. Die Waren behalten dasselbe Verhältnis gegeneinander; was zweimal soviel Wert hat, behält ihn immer, an welchem Gelde es auch gemessen sei. Und die Geldsorten haben ebenso als verschiedene ein bestimmtes Verhältnis zueinander; auf sie geht also, nach dieser ihrer Bestimmtheit gegeneinander, eine gewisse Portion von jeder Ware". El término "stoichometría" (de στοιχεῖον: elemento) introducido en química por Richter, será definido por este químico como la "Meßkunst chymischer Elemente" (cf. Kopp [1966] p. 360). Cf. Hegel [VIII] p. 82: "Das Tier existiert nicht, sondern ist die allgemeine Natur der einzelnen Tiere".

[1178] Cf. Hegel [1985] p. 351: "Beide Seiten sind auf diese Weise Reihen, in denen jede Zahl erstens Einheit überhaupt ist gegen ihre gegenüberstehende Reihe, an der sie ihr Fürsichbestimmtsein als eine Reihe von Exponenten hat; zweitens ist sie selbst einer der Exponenenten für jedes Glied der gegenüberstehenden Reihe und drittens Vergleichüngszahl zu den übrigen Zahlen ihrer Reihe und hat als solche Anzahl, die ihr auch als Exponent zukommt, ihre für-sich-bestimmte Einheit an der gegenüberstehenden Reihe".

[1179] Por ejemplo, el peso específico del ácido nítrico, 63, hace de unidad en la serie de los pesos específicos de las bases, 40, 28, 20, 35.

[1180] Siguiendo con el ejemplo de la nota anterior, si los Montos 40, 28, 20 y 35 los tomamos como unidad, entonces el peso específico del ácido nítrico será el exponente en relación a cada uno de ellos.

[1181] Es decir, el peso específico 63 es *Vergleichungszahl* en relación al peso específico del ácido sulfúrico 49.

[1182] La forma en que puede tener lugar esta representación es doble: la afinidad puede ser directa o inversamente proporcional al peso equivalente. La primera tesis fue defendida por Bergman, la segunda por Berthollet y Fischer.

[1183] Así lo hace Fischer en el comentario de su traducción alemana de la "Recherches sur les lois de l'affinité" de Berthollet: "Es können aber die Zahlen eben dieser Tabelle [die Äquivalenzgewichte] in der that als Repräsentanten ihrer Verwandschaftskräfte angesehen werden, und zwar werden sich bei der obigen Einrichtung der Tafel die Verwandschaftskräfte jeder zwei Stoffe die in einer Colummne stehen gegen jedem Stoff in der inmediato concluir que si una sal se disuelve en un ácido con mayor fuerza de elección que el ácido que la compone, este último ácido se verá repelido dando lugar a un nuevo proceso de neutralización, dando lugar a una nueva sal[1184]. Este paso de la afinidad (*Verwandschaft*) a la afinidad electiva (*Wahlverwandschaft*) tiene lugar en la *Wissenschaft der Logik* como sigue:

Algo es lo que es, lo que cualitativamente es, en su relación a los otros algo. Esta relación es definida por una serie de exponentes que, en cuanto tales, son algo cuantitativo[1185]. En una unión neutral –v.gr. en una sal– el lado cuantitativo de los algos explica que un algo pueda tener una relación –vgr. puede ser neutralizado– por más que un algo, i.e.: que un ácido pueda ser neutralizado por más de una base. Si únicamente hubiese este lado cuantitativo, el resultado de la negación de Algo por parte de otro Algo sería el traspaso de un Algo en el otro Algo –y, con ello, la desaparición de cada algo en su unidad. Pero, puesto que nos las habemos con Algos autosuficientes –con Medidas reales– la negación de un Algo a otro Algo se da al mismo tiempo que la negación del segundo al primero. La negación no es, como antes, una negación en general (*überhaupt*), sino que los dos Algos son puestos como negativos el uno al otro. Esto significa que cada uno se contiene, en la unidad con el otro, indiferente a este otro. Esta unidad es lo que Hegel llama ahora unidad cualitativa. En ella ha sido negada la negación en general, la que hacía que cada Algo simplemente desapareciese en su unidad con otro Algo. Como consecuencia de que no hay tal desaparición de los algo en esta nueva unidad qualitativa esta nueva unidad será excluyente: no será ya unidad cuantitativa en el que hay meramente traspaso de un Algo a otro Algo y, por ello, posibilidad de añadir un nuevo Algo a la unidad, sino unidad en el que los dos Algos que han sido unidos evitarán la unión de otro Algo a la unidad. La fuerza con el que esta unidad tendrá lugar, el probable éxito a fracaso de este intento de evitar el tercero, es lo que vendrá dado por la diferencia de fuerzas de la afinidad electiva entre los dos primeros Algos y el tercer algo con respecto a Algo que pretende neutralizar.

Es decir, en la unidad general, teníamos que un Algo se neutralizaba con un Algo en general siendo la posibilidad de la neutralización en principio, infinita. De ahí tambíen que la variabilidad de los exponentes en los que se expresa la neutralización resultara infinita[1186]. Tenemos, por así decir, la expresión de la neutralización abstracta. Frente a ello, la negación de esta neutralización es la que expresa la neutralización de una base en particular por un ácido en particular. El cuanto que expresa esta neutralización es un Cuanto determinado. La unidad cualitativa que expresa la neutralización en cuestión excluye, con más o menos éxito, la saturación por parte de otra base o ácido. Este más o menos no es algo meramente cuantitativo. En la medida en que esto cuantitativo determinará el éxito o fracaso de la pretendida unión, el más o menos determinará un sí o no: la afinidad electiva es así, como todo lo que tiene lugar en la categoría de la Medidad, unión de lo cualitativo y lo cuantitativo.

---

andern Colummne verkehrt wie die beiden Zahlen verhalten, die neben den beiden Stoffe stehen" (en Berthollet [1802] p. 233). Es precisamente en este mismo pasaja en donde introduce Fischer por primera vez una tabla de pesos equivalentes (cf. Kopp [1966] p. 364). Hegel se subscribe a esta idea de reducir a la fuerza de atracción –expresada mediante el peso específico– la afinidad electiva de las Substancias. Cf. Ruschig [1997] p. 122: "Durch das feste Verhältnis der Äquivalentgewichte in einer Verbindung soll –so Hegel im Einklang mit damaligen Chemikern wie Bergman– die Stärke der Verwandschaft (und damit die Wahlverwandschaft) bestimmbar sein".

[1184] A condición, claro está, de añadir una cantidad suficiente del nuevo ácido de tal forma que pueda llegar a neutralizar todo la base.

[1185] Cf. Hegel [1985] p. 351: "Sie [die spezifische Bestimmung des Selbständigen] besteht so schlechthin in der quantitativen Art und Weise dieses Verhaltens, und diese Art und Weise ist so sehr durch das Andere als durch es selbst bestimmt, und dieses Andere ist eine Reihe von Quantis, und es selbst gegenseitig ein solches".

[1186] Hablando desde la perspectiva de la química actual, lo que subyace a esta "neutralización en general" es la disociación de los iones del agua: $H_2O \leftrightarrows H^+ + OH^-$. Cf. Masterton y Slowinski [1977] p. 447.

Esta unión de lo cualitativo y lo cuantitativo no será capaz de dar cuenta univocamente de las exclusiones que tienen lugar en la afinidad electiva. La nueva unidad cualitativa no es reducible a lo cuantitativo de las fuerzas de elección representadas por los pesos específicos[1187]. El desarrollo de esta contradicción constituye el contenido del siguiente apartado.

5.2.1.3 La afinidad electiva (*Wahlvewandschaft*)

Comencemos el apartado ordenando los pesos equivalentes de los ácidos y las bases en en dos series separadas:

ácido nítrico:	63	Sosa:	40
ácido sulfúrico:	49	Cal:	28
		Magnesia:	20
		Amoníaco:	35

Hemos visto ya que la afinidad es el no traspaso de un Algo al otro Algo que lo neutraliza[1188]. Este es el lado "ser-para-otro" o hechura (*Beschaffenheit*) del Algo. Pues bien, el lado "ser-para-si" consiste, dentro de la relación entre Medidas subsistentes, en la afinidad electiva. Efectivamente, el Algo –por ejemplo el ácido nítrico– no sólo se conserva en su neutralización con otro algo –otra base– sino que excluye de sí la neutralización con otras bases que le son menos afines. Para poder llegar a este punto de exclusión electiva hay que poner el ácido no sólo en relación a otra base, sino también en relación a la serie entera de las bases[1189]. El retorno de estas puestas en relación, la negación de todas estas relaciones para la afirmación de sí mismo en una neutralidad preferencial es la afinidad electiva. De este modo, el "excluir de sí" es lo que corresponde al momento "ser-para-sí" cualitativo[1190]. De este

[1187] Cf. Ruschig [1997] p. 133: "Die Bestimmung der Wahlverwandschaft enthält also den Widerspruch: Sie ist als Maßgröße entwickelt worden […]. Zugleich ist die Spezifität der Wahlverwandschaft, das spezifische Ausschließen, nicht durch eine bloß quantitativ veränderliche Maßgröße (die Affinitätsstärke) zu begründen".

[1188] La neutralización química se distingue con ello de la neutralización eléctrica y magnética.

[1189] La elección presupone que se ha podido elegir entre toda la serie.

[1190] Esta misma cadencia lógica es también constatable en los tonos musicales. Un tono, al igual que el peso específico de la materia, es definido por el cociente entre una magnitud en su aspecto intensivo y una magnitud en su aspecto extensivo: el cociente entre el monto de las vibraciones y el tiempo. A su vez, este tono es determinado en sí mismo, es decir, se puede obtener su espectro de frecuencias mediante la transformación de Fourier. El tono es así analizado en tonos parciales, tonos puros o tonos sinusoidales, siendo la frecuencia fundamental (*Grundton*) aquel que tenga la frecuencia mas baja (cf. Enz, IX, p. 182). Ahora bien, un tono se puede comparar realmente (*reelle Vergleichung*) con otro tono. El tono es así puesto en relación con otros tonos. Si esta puesta en relación es con respecto a un tono simultánea o sucesivamente tenemos un intervalo (*Intervall*). Si la puesta en relación se hace dentro de un sistema de tonos tenemos una escala (*Tonleiter*). Este momento, tomando como principio el tono, es equivalente a la afinidad en los pesos equivalentes: la serie de las bases para un ácido es análogo a la serie (escala) de los tonos para una tónica dada. Al igual que unos ácidos tienen mas afinidad con unas bases que con otras, unos tonos tendrán más afinidad con ciertos tonos que con otros. Esta afinidad electiva, es en música, la armonía (cf. Hegel [1985] p. 352-353: "Die Harmonien sind ausschließende modo, pasamos de una unidad inmediata que es unidad cuantitativa[1191] en tanto que sus Algos constituyentes son indeterminadamente combinables. Pasamos así de una unidad inmediata a la unidad cualitativa excluyente, a la afinidad electiva.

Sin embargo, esta unidad cualitativa excluyente de la afinidad electiva no será un mera negación de la unidad inmediata de la afinidad. Bien al contrario, la primera unidad está superado (*Aufheben*) en la seguda. Esto significa que la segunda unidad es más rica, más concreta, que la segunda. En efecto, en la afinidad *a secas* un Algo podía neutralizarse con otro Algo sin que fuese necesario para ello que el Algo neutralizador fuese uno en particular. La negación que da lugar a la unidad cualitativa excluyente de la afinidad electiva consite precisamente en negar esta generalidad: no toda afinidad es igual, hay una afinidad preferencial, electiva. En esto consiste el carácter cualitativo de la afinidad electiva[1192].

A su vez, que la unidad inmediata sea superada en la unidad cualitativa excluyente significa que determinadas variaciones cuantitativas tienen un significado cualitativo. Debido a que toda variación cuantitativa es, por definición, igualmente diferente, no habrá posibilidad de reducir este cambio cualitativo a una variación cuantitativa. Al mismo tiempo, en la Medida, el único medio posible para caracterizar a Algo frente a otro Algo es cuantitativo. Esto significa que se trata ya de que, de vez en cuando, unas relaciones cuantitativas tengan un significado cuantitativo, sino que, más bien, el momento cualitativo será determinado por esa relación cuantitativa. Tenemos así la conversión (*Umschlagen*) de lo cuantitativo en lo cualitativo y de lo cualitativo en lo cuantitativo[1193]. Con ello llegamos al apartado de los puntos nodales (*Knotenlinie*).

Wahlverwandschaften”). La imposibilidad de reducir lo cualitativo de la afinidad a lo cuantitativo, es decir, la imposibilidad de reducir la afinidad electiva a los pesos equivalentes, es ahora la imposibilidad de determinar por meros argumentos cuantitativos qué suena armónicamente y qué no. La armonía es algo cualitativo no reducible al continuo cuantitativo. De ahí que en la *temperierte Stimmung* la igualdad de las distancias entre los semitonos se consiga a costa de la consonancia entre los mismos. Cf. Marzoa [2007] p. 59: “fue preciso convenir [...] que la octava [...] sí se divida en un número determinado de partes iguales, buscando ciertamente [...] que, en conjunto, esto se haga con el mínimo posible de divergencia entre, por una parte, los puntos de corte generados en esa división igual y, por la otra parte, los que en verdad corresponderían según aquellas relaciones cuya validez la propia física ha confirmado”. Cf. Ruschig [1997] p. 153: “Ob ein Intervall konsonant oder dissonant klingt, wird zusätzlich durch dessen musikalische Umgebung bestimmt. Und dieses Bestimmungsverhältnis selbs verändert sich historisch mit der Entwicklung der Kompositionstechnik”. El mismo razonamiento sirve si, en vez de tomar como punto de partida el tono, comenzáramos con el intervalo, la tonalidad (*Tonart*) o el acorde. Cf. al respecto Ruschig [1997] p. 159 y sig.

[1191] En la medida en que el contenido de esta unidad son Medidas, unidad de cualidad y cantidad, Hegel llamará también a esta unidad inmediata “unmittelbare qualitative Einheit”. Cf. Hegel [1978] p. 211.

[1192] Cf. Ruschig [1997] p. 177: “Die qualitative Seite der Wahlverwandschaft hat ihren Grund darin, daß das „Mehr oder Weniger“ (der Zahlen für die Äquivalentgewichte) innerhalb des zugrundeliegenden Verhältnismaßes einen „negativen Charakter“ (die Zahlen als gegeneinander gleichgültige, bloß quantitativ veränderliche werden negiert, ihr Unterschied gewinnt „qualitative Natur“) bekommt”.

[1193] Cf. Hegel [1985] p. 354: “Es ist hiermit ein Umschlagen von gleichgültigem, bloß quantitativem Verhalten in ein qualitatives und umgekehrt ein Übergehen des spezifischen Bestimmtseins in das bloß äußerliche Verhältnis gesetzt, - eine Reihe von Verhältnissen, die bald quantitativer Natur, bald spezifische und Maße sind”.

5.2.2 Los puntos nodales de las relaciones entre Medidas[1194]

En los puntos nodales se pondrá en relación consigo mismo el resultado obtenido en el apartado anterior. Esto significa que ahora lo que es puesto “para-sí” son las sales o, lo que es lo mismo en Hegel, las neutralidades (*Neutralitäten*). El episodio químico que corresponde a este momento lógico es con ello la denominada “afininidad electiva doble” (*doppelte Wahlverwandtschaft*). Cada una de estas neutralidades es una unidad cualitativa excluyente que se distingue de las demás en tener un mayor o menor peso equivalente de una base o de un ácido. El que la diferenciación sólo tenga lugar sobre esta base cuantitativa tiene como consecuencia que otras combinaciones cuantitativas den lugar a otras afinidades electivas excluyentes o neutralidades[1195]. A su vez, esta capacidad de continuarse señala[1196] al hecho de que aquello cualitativo cuya variación cuantitativa es la base del continuarse de una neutralidad en sí[1197] misma es algo autosuficiente. La neutralidad es así divisible (*Trennbar*) en Algos autosuficientes que, con la terminología actual, podríamos denominar iones de la Sal[1198]. Estos Algos son, a diferencia de los Algos de la afinidad, Algos subsistentes, indiferentes entre sí.

Con ello tenemos que, partiendo de lo propiamente cualitativo de la Neutralidad –es decir, partiendo de su ser exlcuyente– este carácter se da sobre la base de un continuo que, a su vez, nos remite a unos Algos cualitativamente distintos. Dependiendo de la Medida en que se combinen los Algo subsistentes tendremos como resultado una u otra Neutralidad –una u otra Sal. En este proceso la Neutralidad es exterior en sí misma[1199]. Es decir, el fundamento de que una Neutralidad pueda continuarse en otra Neutralidad, a saber, los iones de la Sal, está en la misma Neutralidad.

Los pesos equivalentes no eran suficiente para dar cuenta de la afinidad electiva. Ahora, de un modo análogo, la relación entre sí de los Algos autosuficientes –que en el modelo químico hemos denominado iones– tampoco será suficiente para explicar los puntos nodales. Las variaciones cuantitativas –de los peso equivalentes en un caso, de los iones en el otro– no son suficientes para dar cuenta del nuevo momento cualitativo: la afinidad electiva en un caso, los puntos nodales en el otro. Esto hace que Hegel pase ha hablar de un momento especificante en los dos casos[1200]. Si bien en el caso de la afinidad llegábamos a hablar de una

---

[1194] El título orinigal es “Knotenlinie von Maßverhältnissen”. El término *Knotenlinien* la toma Hegel de la física de su época. Sobre la explicación dada por Savart del surgimiento de puntos nodales sobre una barilla que se mueve longitudinalmente cf. Rosenberger [1887-1890] p. 265 y 266.

[1195] Por ello dirá Hegel que las afinidades electivas exlcuyentes “se continuan en sí mismas”. Cf Hegel [1985] p. 364: “[...] kontinuieren sich die ausschließende Wahlverwandschaft auch in die ihr anderen Neutralitäten”. Esto de “continuarse en sí mismo” significa que al poner, en una afinidad electiva doble, una sal en relación a otra sal hay intercambio de iones entre sí sin resto, se formarán a su vez dos nuevas sales. De dos Substancias neutrales del inicio obtendremos como resultado dos Substancias a su vez neutrales.

[1196] Para una crítica a este paso de la continuidad a la divisibilidad cf. Ruschig [1997] p. 202. En cualquier caso, la crítica no se dirige al paso en general, sino a una presunta deducción de la determinidad del Algo, de los iones, mediante el proceso de continuación.

[1197] Decimos “en sí misma” por que hasta que no se haya especificado una neutralidad de cualquier otra neutralidad pasar a otra neutralidad no es más que pasar a sí misma, continuarse en otra neutralidad no es más que continuarse en sí misma.

[1198] Cf. Hegel [1985] p. 364: “[…] die Neutralität [la Sal] hat als solche eine Trennbarkeit in ihr, indem die [los iones de la Sal], aus deren Einheit sie [la Sal] geworden ist, als selbständige Etwas, jedes als gleichgültig, mit diesem oder mit anderen der gegenüberstehenden Reihe […] in Beziehung treten”.

[1199] Cf. Hegel [1985] p. 364: “es [das Maß] ist ein an ihm selbst Äußerliches”.

[1200] Cf. Hegel [1985] p. 364: “Diese Beziehung des Verhältnismaßes auf sich ist verschieden von seiner Äußerlichkeit und Veränderlichkeit als seiner quantitativen Seite; es ist, als Beziehung auf sich gegen diese, eine seiende, qualitative Grundlage, - bleibendes, materielles Substrat, welches, zugleich als die Kontinuität des fuerza de la afinidad electiva, ahora Hegel hablará de un substrato material que contendrá este principio especificante. Este substrato material será la referencia de las relaciones de Medidas a sí –es decir, a aquello que permanece en la variabilidad y exterioridad de los Algos subsistentes. El substrato es así lo cualitativo desde lo cual ha de quedar explicado su lado exterior o cuantitativo. El proceso mediante el cual tiene lugar esto es el *sich von sich selbst stößen*, algo así como, "repelerse algo de sí mismo". Lo que se repele de sí es el substrato que, en esta medida, llega a especificar, a producir, otras relaciones de Medida y otras exterioridades[1201]. En la medida en que se pone como otra relación de Medida cuantitativa, la Medida permanece en sí. Pero en cuanto produce otras relaciones de Medida –otras Medidas- pone también otras cualidades, otras neutralidades. El alternarse[1202] de estos dos momentos es lo que Hegel llamará "línea de puntos nodales de Medidas sobre una escala de más y menos" (*Knotenlinie von Maßen auf einer Skala des Mehr und Weniger*)[1203]. El substrato sobre el que se explican las variaciones cualitativas es así un substrato exclusivamente cuantitativo, un substrato de "más y menos" sobre el que tienen lugar las variaciones cualitativas, es decir, las especifidades.

La variación cuantitativa tiene un envergadura (*Weite*) de exterioridad, casualidad o de inmediatez. Dentro de ella la variación cuantitativa no tiene relevancia cualitativa alguna. Sin embargo, en los puntos nodales las relaciones de Medida dan lugar a un nuevo Algo que formará contexto con la Medida previa mediante una regla[1204]. Ya que esta regla no puede ser exterior al Algo mismo[1205], la regla remitirá a un substrato que permanece en toda esta variación inmediata, exterior o aritmética. Es decir, el surgimiento del nuevo Algo no podrá explicarse remitiéndonos a lo cuantitativamente anterior ni posterior porque, en este nivel, no hay nada específico. Para poder explicar esto Algo cualitativamente nuevo tenemos que remitirnos así al substrato común.

Maßes in seiner Äußerlichkeit mit sich selbst, in seiner Qualität jenes Prinzip der Spezifikation dieser Äußerlichkeit enthalten müßte". *Hoy* en día podríamos hacer corresponder este substrato que, dependiendo de su cantidad, da lugar a una u otra cualidad, con el número atómico **Z** o número de protones del nucleo de un átomo. El problema de esta analogía consisten en que, debido a la existencia de los isótopos, para dar cuenta de la variabilidad cualitativa entre los mismos, por ejemplo, para dar cuenta de la diferencia entre el hidrógeno y el deuterio, habría que introducir también el substrato cuantitativo "número de neutrones en el núcleo". Con ello tendríamos que hablar de dos substratos y no sólo de uno.

[1201] Cf. Ruschig [1997] p. 222: "Damit ist die Knotenlinie von Maßverhältnissen erreicht […]. Mit dem Sich-von-sich-selbst Abstoßen des Maßes hat Hegel drei für den Übergang ins Wesen entscheidende Bestimmungen erreicht: 1.) Endgültig eingezogen ist die Differenz zwischen Reflexivität und Substrat […]. 2.) Das Substrat ist rein quantitativ bestimmt. 3.) Begründet ist ein spezififizierender Prozeß, der aus der Reflexivität hervogeht".

[1202] En la primera edición de la *Wissenschaft der Logik*, este alternarse era ya adelantado por la expresión "continuarse en/de Algo". Cf. Hegel [1978] p. 216: "Es continuirt sich darein einestheils als sich selbst erhaltend; sein Anderes ist ein Quantitatives, also ein gleichgültiger Unterschied, der das Specifische nicht afficirt; andererseits aber ist es qualitativ von ihm unterschieden; es wird in diesem seinem Andersseyn ein anderes Verhältniß und damit ein anderes Maß". Por otro lado, resulta importante no interpretar el alternarse exclusivamente como una variación temporal, como algo que necesita de una envergadura sin significado cualitativo. Puede así ocurrir que toda la progresión cuantitativa tenga un significado cualitativo. Hegel (en Hegel [1985] p. 366.) pone el ejemplo del sistema de los números naturales. El ejemplo del número atómico sirve también para ilustrar este punto: todo cambio cuantitativo es cualitativamente relevante.

[1203] Cf. Hegel [1985] p. 365.

[1204] Lo contrarioa a "formar contexto con la Medida previa" es la mera exterioridad de la progresión aritmética 1,2,3,..., es decir, la escala del más y menos o la sucesividad (*Allmählichkeit*).

[1205] En esta exterioridad se igualan, precisamente, todas las demás variaciones cuantitativas: la exterioridad de la progresión aritmética.

5.2.3 Lo carente de Medida[1206]

Hemos visto que en el apartado anterior se llegaba a un alternarse de los momentos de lo cualitativo y lo cuantitativo. Lo cualitativo lo era sobre la base de una escala de más y menos. A su vez, lo cuantitativo daba lugar a saltos en los que tenía lugar una nueva Medida de relaciones (*Verhältnismasß*), un nuevo Algo. En el apartado actual, veremos que este ir y venir de la cantidad a la cualidad y viceversa, no es en verdad otra cosa que retorno de cada momento a sí mismo. La unidad en el que se cierra este círculo de retorno es la absoluta indiferencia.

El momento de lo carente de Medida corresponde a los momentos de la infinitud de la Cualidad y de la Cantidad. Sin embargo, Hegel nombra "carente de Medida" al proceso al infinito que se da por parte de lo cuantitativo[1207] y no al proceso al infinito o mala infinitud que tiene lugar en los puntos nodales dentro de lo cualitativo. Sin embargo, el proceso al infinito es algo que se da tanto por parte de lo cualitativo como por parte de lo cuantitativo. En la presentación de la *Enzyklopädie*[1208], lo carente de Medida ocupa ese lugar intermedio que permite que se refiera indistintamente tanto del proceso al infinto cualitativo como el proceso al infinito cuantitativo. Lo carente de Medida es el proceso el infinito sin más.

A diferencia del proceso al infinito o mal infinito cualitativo y cuantitativo, los polos sobre los que se moverá el proceso al infinito de la Medida son lo cualitativo y lo cuantitativo mismos. Es decir, lo cualitativo traspasará a lo cuantitativo y lo cuantitativo a lo cualitativo. El presunto traspaso a otro no será mas que traspaso a sí[1209] y, por ello, el traspaso será totalidad[1210]. Con ello la mala infinitud se pondrá tal y como es de veras. Esta infinitud de veras (*wahrhafte Unendlichkeit*) es ahora denominado la "infinitud que es siendo para sí" (*fürsichseiende Unendliche*)[1211] o, simplemente, infinitud[1212]. Esta infinitud es la negación tanto de la mala infinitud cualitativa como la mala infinitud cuantitativa. Debido a que cada una de estas dos infinitudes es ya una negación[1213], la infinitud de veras es la negación de la negación doble: negación de la infinitud cuantitativa y negación de la infinitud cualitativa. Esto tiene lugar como sigue:

Todo Algo específico o cualitativo se distingue de otro Algo cualitativo únicamente en que tiene otra relación cuantitativa, otra Medida con respecto a este otro Algo. La distintinción cualitativa ha sido reducida a o asumida en la distinción exterior o cuantitativa[1214]. A su vez, la variación cuantitativa da lugar al surgimiento de especifidades

---

[1206] Título original: *Das Maßlose*.

[1207] Cf. Hegel [1985] p. 369: "Das abstrakte Maßlose ist das Quantum überhaupt, als in sich bestimmungslos und als nur gleichgültige". Cf. también Hegel [1978] p. 220: "Das Maßlose besteht in dem bloß Quantitativen, in welches ein Maß übergeht; dasa Quantum ist als solches das Maßlose".

[1208] Cf. *Enz*. § 109 (Hegel [VIII] p. 227 sigs) . Podemos evitar este desajuste entre la terminología de la *Wissenschaft der Logik* y el de la *Enzyklopädie* afirmando, con Ruschig [1997] p. 314, que lo carente de Medida es la unión de lo carente de Medida abstracto y la Medida excluyente. En la *Enzyklopädie* Hegel hablará de lo carente de Medida sin más, en la *Wissenschaft der Logik* lo carente de Medida designará a lo carente de Medida abstracto.

[1209] Cf. Hegel [1985] p. 371: "[…] Übergehen des Qualitativen und des Quantitativen ineinander".

[1210] Cf. Hegel [1978] p. 221: "[…] daß es Totalität ist, daß es nicht ein Anderes gegen sich hat".

[1211] Cf. Hegel [1985] p. 370.

[1212] Cf. Hegel [1978] p. 220: "Das Unendliche ist diese Negation beider Momente".

[1213] A saber, la negación del Algo en el primer caso, del Cuanto, en el caso de la mala infinitud cuantitativa.

[1214] Cf. Hegel [1978] p. 221: "Dieses [das spezifische Verhältnis] ist ein anderes quantitatives Verhältnis; darum sind beide gleichgültig gegeneinander, und ihre qualitative Beziehung aufgehoben".

cualitativas[1215]. Vemos así que cada polo retorna a sí gracias a la mediación de su otro: lo cualitativo retorna a sí gracias a la mediación de lo cuantitativo y algo análogo sucede en el caso de lo cuantitativo. El resultado de ello no es únicamente la negación de cada traspaso, no es únicamente el que la Cantidad y la Cualidad se traspasen el uno en el otro. Lo importante, dice Hegel, es el suelo sobre el que tiene lugar este traspasar, esta negación de la negación: a este fundamento llamará Hegel la unidad que se continua en sí mismo (*in sich selbst kontinuierende Einheit*)[1216], la materia autosuficiente (*selbständige Materie*) o la cosa (*Sache*).

De este substrato Hegel dirá únicamente que es el mismo (*dieselbe*)[1217]. Para ello Hegel evita recurrir a la categoría de la reflexión "identidad" perteneciente al segundo tomo de la *Wissenschaft der Logik*. Este substrato es aquello en donde se da el devenir[1218] entre lo cualitativo y lo cuantitativo. En relación a este substrato, el devenir en cuestión no será mas que un cambio de un estado (*Änderung eines Zustandes*) exterior a él. El substrato será lo carente de Medida concreto, aquello que ha hecho de la Medida un momento suyo. La tarea pendiente en el camino a la esencia será mostrar que esta brecha entre el substrato y el estado no se sostiene.

5.3 EL DEVENIR DE LA ESENCIA

5.3.1 La indiferencia[1219]

La indiferencia en sí o abstracta, el punto con el que comienza el devenir de la esencia, es el resultado del apartado precedente tomada en su inmediatez. La indiferencia *(Indifferenz)* es la unidad del traspaso de la cantidad en la cualidad y de la cualidad en la cantidad. Ella es la unidad a la cual este traspaso le es igual (*gleichgültig*). Este serle igual el traspaso es lo que hace de esta indiferencia algo en sí, algo que solo en el siguiente apartado –titulado "la indiferencia como relación inversa de sus factores"– llegará a ser para sí. Por ahora, en la

---

[1215] Dado que la labor de exponer este traspasar de lo cualitativo a lo cuantitativo y de lo cuantitativo a lo cualitativo era propio del apartado anterior, las palabras al respecto en este apartado son algo limitadas. Así, para el traspaso de la cantidad a la cualidad cf. en la primera edición Hegel [1978] p. 222: "[...] diese [die Quantität] als die Äußerlichkeit an sich, die im Progreß die Äußerlichkeit ihrer selbst wird, ist damit in sich zurückgekehrt und Quantum als das, was es an sich ist, Qualität". Es decir, el cuanto, en la Medida en que es finito, siempre tiene un cuanto fuera de sí. De ahí que el "Progreß die Äußerlichkeit" no sea otra cosa que el proceso al infinito cuantitativo que se ha visto ya en el capítulo 3. Tal y como ocurría entonces, este proceso al infinito tenía su verdad en la relación cuantitativa, es decir en algo que era el retorno de lo cualitativo.

[1216] Cf. Hegel [1985] p. 370.

[1217] Cf. Hegel [1985] p. 370-371: "Diese Dieselbigkeit des Substrates".

[1218] Devenir (*Werden*) aparece únicamente en la primera edición (en Hegel [1978] p. 222).

[1219] En contra de lo que habíamos hecho hasta ahora, esta vez tomamos el título de la primera edicicón de la *Wissenschaft der Logik*. El título de la segunda edición, "la indiferencia absoluta" (*die absolute Indifferenz*), es más bien el resultado de todo el parágrafo titulado "*Das Werden zum Wesen*". Lo único que tenemos al comienzo del "devenir de la esencia" es la indiferencia en sí, no para sí. Con ello, los tres parágrafos del "devenir de la esencia", a saber, "la indiferencia", "la indiferencia como relación inversa de sus factores" y el "traspaso a la esencia" recojen los momentos en sí, para sí y en y para sí de la indiferencia, respectivamente. El uso del término "*Indifferenz*" de la segunda edición es más abarcante, englobando en él todas las categorías de la *Lehre vom Sein*: la Cualidad, la Cantidad y la Medida. Lo que distingue a la indiferencia absoluta, la indiferencia a secas en la primera edición, es que ha sido obtenido mediante la negación de las tres categorias anteriores. Cf. Hegel [1985] p. 373: "die Indifferenz aber, welche die absolute genannt werden kann, ist die durch die Negation aller Bestimmtheiten des Seins, der Qualität und Quantität und […] des Maßes, sich mit sich zur einfachen Einheit vermittelt".

indiferencia en sí, el traspaso es algo exterior a la unidad –y, en tanto que tal es un estado cualitativo de él.

Pero la indiferencia no es únicamente abstracta o en sí. La indiferencia es resultado de un proceso, de un traspaso: es el proceso de negar sus momentos anteriores, el proceso de negar la determinidad de la Cualidad, la Cantidad y de la Medida. Debido a ello, estas determinidades no le serán ya exteriores, iguales, sino que, gracias a esta mediación con ellos, los tendrá en sí mismo. La indiferencia es, como resultado de ello, concreta o para sí.

5.3.2 La indiferencia como relación inversa de sus factores

En el parágrafo anterior la indiferencia era únicamente en sí –es decir, como Substancia[1220]. La tarea del siguiente parágrafo será de poner el substrato como Sujeto, es decir, hacer del substrato algo que es para sí. Para ello será necesario mostrar que las determinaciones no le son exteriores a la indiferencia, al substrato, sino que le son inmanentes. Es decir, la diferencia ha de ponerse como inmanente a la indiferencia. El resultado final (el substrato puesto en sí y para sí) es la esencia (*Wesen*).

De momento hay que ver cómo la indiferencia tienen en sí la diferencia, es decir, cómo tiene en sí lo cualitativo y lo cuantitativo. Esta remisión tendrá en su primer momento un carácter meramente cuantitativo. Esta etapa corresponde a la doctrina del absoluto de Schelling[1221] y Spinoza. En ellos, en el absoluto la diferencia es puesta meramente como algo exterior y, por ello, cuantitativamente[1222]. En este punto los dos elementos de la diferencia (lo cualitativo y lo cuantitativo) serán considerados únicamente como dos Cuantos que remiten a un mismo substrato. Estos dos Cuantos tendrán que estar cualitativamente determinados entre sí mediante este substrato. La forma más sencilla de que algo se determine cualitativamente contra otro algo es que el primero sea lo que no es lo segundo. Si, además, esto tiene que tener lugar bajo la regla del substrato y si, además, todo el juego ha de tener la forma de lo cuantitativo, entonces, la cualidad entre los Algos será el de la relación inversa de dos factores[1223] donde la suma es igual al substrato consideredo como Cuanto. En efecto, en la relación inversa "el ser de uno es el no-ser de otro"[1224]; el haber de un lado es el deber del otro lado y viceversa. Es decir, en la relación $X+Y=A$ todo lo que es haber para el lado X es deber

[1220] En este sentido la Substancia de Spinoza se queda en el movimiento anterior de la indiferencia. Para Hegel, la falta de Spinoza consiste en haber puesto el absoluto meramente como Substancia y no como Sujeto. Por esta razón, siempre según Hegel, las determinaciones de la Substancia spinozista, los atributos, son exteriores a la misma. Cf. al respecto Hegel [1985] p. 380-381: "Die Indifferenz bleibt so in ihm [in Spinoza, J.Z.] wohl sich immanent, wie die Substanz, - aber abstrakt, nur an sich". Cf. también Hegel [XX] p. 166: "Seine Philosophie ist nur starre Substanz, noch nicht Geist".

[1221] Cf. Schelling [1859] p. 125: "Die quantitative Differenz ist nur außerhalb der absoluten Identität möglich".

[1222] Cf. Hegel [1985] p. 381: "[…] er [der Unterschied, J.Z.] wird nun gesetzt als das, was er bei Spinoza an sich ist, nämlich als äußerlicher und damit näher als quantitativer". Cf. también Hegel [1985] p. 374: "Der Unterschied ist daher an ihr wesentlich zunächst der nur quantitative äußerliche".

[1223] Por "relación inversa entre dos factores" Hegel entiende la relación $X+Y=A$, donde X y Y son los factores y A representa el substrato. La otra alternativa posible, la relación directa, es descartada debido a que en ella el exponente, el substrato, no determina qué lado ha de ser Unidad y qué lado Monto. El exponente no es así unidad cualitativa de la diferencia de la relación. Cf. Hegel [1985] p. 313: "Es ist Keine Bestimmung vorhanden, welche der Seiten des Verhältnisses als die Einheit oder als die Anzahl genommen werden müsse […] dieser Quotient ist nicht als das gesetz, was er sein soll, - das Bestimmende des Verhältnisses oder als seine qualitative Einheit". En la relación inversa el exponente puede cumplir el papel del substrato que tienen la diferencia en él y, por ello, aparece nuevamente en la categoría de la Medida.

[1224] Cf. Hegel [1978] p. 225: "das Sein der einen das Nichtsein der anderen ist".

para el lado *Y* y viceversa: el ser de *X* es de no-ser de *Y*, el ser de *Y* es el no-ser de *X*. A su vez, todo el poceso está determinado por el substrato *A*. En este sentido la diferencia es inmanente a este substrato que tiene ahora la forma tanto de Cuanto[1225] como de unidad entre los factores.

El que cada lado tiene en sí el no ser su otro significa que cada lado es no sólo Cuanto, sino a su vez, algo cualitativo. De este modo cada uno de los lados tiene en sí su otro. Cada uno de los lados tiene con ello en sí los dos lados[1226], siendo la única diferencia posible entre los dos cuantitativa: a saber, que si en uno de los lados una cualidad es cuantitativamente mayor en el otro lado la predominante será la otra cualidad. Con ello obtenemos como resultado la unidad de dos unidades o una relación inversa en el que los factores tienen en sí otra relación inversa[1227]. Cada una de estas unidades será ahora un substrato y con ello el substrato será un substrato de dos substratos. Es decir, el todo tendrá en sí dos todos, dos lados autosuficientes. La indiferencia, el continuarse, tiene ahora la forma siguiente: 1) dentro de cada unidad de la unidad principal el continuarse consiste en que cada lado es cuantitativamente lo que el otro lado no es y 2) en la unidad principal el continuarse consiste en que las dos unidades tienen las mismas cualidades[1228].

Puesto que son autosuficientes, cada una de estas unidades se puede tomar como un todo. Cada lado del todo, sea el todo el de la unidad primaria o el de la unidades de esta unidad, puede ser considerado partiendo desde la cualidad o partiendo desde la cantidad. Partir el análisis de los lados desde lo cualitativo significa partir de la definición de los lados según el cual, como hemos visto, cada uno es lo que el otro no es. Desde esta perspectiva, al tener que aumentar un lado tanto como el otro ha disminuido, los lados están en equilibrio entre sí[1229]. Pero en esta igualdad, debido a que, sea el que sea el Cuanto de uno de los lados, su otro lado responderá de tal forma que el todo no cambie, la diferencia de cada lado desaparece[1230]. Es el todo el que varía –o, al menos, puede variar. A diferencia de la perspectiva de lo cualitativo, desde la perpectiva de lo cuantitativo sí que podemos romper este equilibrio que predominaba entre los lados. Para ello, basta con tomar uno de los lados mayor cuantitativamente que el otro. Como consecuencia de esta diferencia el mayor de los lados terminará prevaleciendo sobre el otro y, en última instancia, conseguirá sucumbir

[1225] A diferencia de la “relación inversa” de la categoría Cantidad, ahora lo importante será la relación entre los cuantos -que, como hemos visto, viene determinado por el substrato. En el caso de la relación inversa “cuantitativa”, el exponente, el substrato de la relación inversa de la Medida, es algo inmediato. En la relación inversa cuantitativa cada factor no tiene en sí el no-deber-ser de su otro, es decir, no tienen en sí el todo. Cf. Hegel [1985] p. 314: “[...] hier das Ganze ein reales Substrat und jede der beiden Seiten gesetzt ist, selbst an sich diese Ganze sein zu sollen”. En la primera edición la carencia de la relación inversa cuantitativa frente a la relación inversa de la Medida consistirá en que en la primera relación, es decir, lo que en la segunda edición era el todo (*das Ganze*), les es igual (*gleichgültig*) a los quantos. Cf. Hegel [1978] p. 225: “In diesem [en la relación inversa de la cantidad, J.Z] war die qualitative Beziehung den Seiten selbst, daß die eine nicht ist, was die andere ist, gleichgültig, denn sie waren nur Quanta überhaupt. Hier [en la relación inversa de la Medida, J.Z] in der Realität dieses Verhältnisses ist es die eigene Qualitativität der Seiten, welche sie so bezieht”.

[1226] Cf. Hegel [1985] p. 375: “jede der Seiten des Verhältnisses enthält daher ebenso sie beide in sich und ist nur durch ein Mehr der einen Qualität und das Weniger der anderen und umgekehrt unterschieden”.

[1227] Cf. Hegel [1985] p. 375: “Jede Seite ist somit an ihr selbst ein umgekehrtes Verhältnis”.

[1228] Cf. Hegel [1985] p. 375: “Ihr quantitativer Unterschied ist jene Indifferenz, nach der sie sich ineinander kontinuieren, und diese Kontinuation ist als Diesselbigkeit der Qualitäten in jeder der beiden Einheiten”.

[1229] Cf. Hegel [1985] p. 376: “Aber in ihrer qualitativen Beziehung ist jede nur, insofern die andere ist. – Hieraus folgt dies, daß sie im Gleichgewicht sind, daß, um soviel die eine sich vermehrte oder verminderte, die andere gleichfalls zu- oder anbähme und in demselben Verhältnis zu- oder abnähme”.

[1230] Cf. Hegel [1978] p. 227: “Ferner ist es, insofern solche Faktoren […] als Bestimmungen des Ganzen angenommen werden, vollkommen gleichgültig, welchen man sich verändern läßt, oder der andere verändert sich ebenso; es ist nur eines überhaupt, das Ganze, das sich verändert; der Unterschied der Faktoren ist bedeutungslos”.

(*überwältigen*) al otro[1231]. La razón de ello consiste en que, bajo la condición de que aquello desde lo cual han de tener lugar las variaciones cuantitativas es un fondo constante[1232], una mínima diferencia con respecto a un polo que rompa el estado de equilibrio da lugar a un estado acelerado que termina por aniquilar al otro polo. El resultado será que el polo dominante no será ya un lado sino el todo[1233]. El resultado final es la desaparición de los lados en el todo.

Este todo que ha resultado tanto del hecho de comenzar por considerar los lados cualitativamente como del hecho de comenzar por hacerlo cuantitativamente es la unidad, dice Hegel, que es contradicción por todas partes (*allseitige Widerspruch*)[1234]. Es la unidad que es resultado de la superación de sus momentos, la unidad que tiene los momentos en sí o unidad que es para sí[1235].

5.3.3 Traspaso a la esencia[1236]

Como todo lo que tiene lugar dentro de la *Lehre vom Sein*, el devenir a la esencia es denominado por Hegel también traspaso (*Übergang*) a la esencia. Este traspaso consiste en que las determinaciones, hasta ahora exteriores, sean puestas por la esencia misma[1237]. Lo que hasta ahora se había obtenido era, sin embargo, una unidad en el que están contenidas y superadas todas las determinaciones del Ser. Falta con ello reflexionar sobre lo obtenido de tal modo que poner las determinaciones sea lo mismo que ponerse a sí. El proceso por el cual esto tiene lugar no será ya traspaso (*Übergang*), pasar de algo a otro algo exterior, sino manifestación (*Erscheinung*), un poner algo que es ponerse a sí[1238].

En definitiva, las determinaciones no serán ya entes (*Seiende*) autosuficientes[1239], sino que serán relativas[1240] a una unidad[1241] perfecta[1242]. Por ello, las determinaciones no serán

---

[1231] Además de la referencia obvia al sobrepeso de la fuerza "centrífuga" frente a la fuerza "centrípeta" cuando se trata de explicar el alejamiento del planeta con respecto al sol y al sobrepeso inverso cuando de lo que se trata es de explicar su acercamiento, Hegel hace también referencia a Schelling según el cual la única distinción posible entre el sujeto y el objeto era la distinción cuantitativa, una distinción tiene que terminar por sobrepesar un lado más que el otro. Cf. Schelling [1859] p. 123.

[1232] Idea que expresa Hegel así: "als dem Anderen ungleich geht es über sich hinaus und enthält das Andere. Mehr als das Andere hat es nur vom Anderen; aber diesem bleibt nichts übrig, denn um der qualitativen Bestimmung willen, die der quantitative Unterschied hat, ist das, was das Eine über das Andere hinaur wäre, nur dieses Andere selbst. Es ist nur das Eine und Andere; insofern das Eine einen Zuwachs erlitte, so ist dieser Zuwachs nur das Andere" (en Hegel [1978] p. 227). Con ello, vemos que la perspectiva cuantitativa no desatiende la perspectiva cualitativa.

[1233] Cf. Hegel [1985] p. 377: "aber damit sind nicht mehr zwei Spezifische und Faktoren, sondern nur das eine Ganze".

[1234] Cf. Hegel [1985] p. 377.

[1235] Cf. Hegel [1985] p. 375: "Weil aber die Einheit nur als Indifferenz und damit nur als an sich festgehalnten und [die Momente] noch nicht als fürsichseiend, d.i. noch nicht an ihnen selbst und durcheinander sich zur Einheit aufhebend bestimmt sind, so ist damit überhaupt die Gleichgültigkeit ihrer selbst gegen sich als entwickelte Bestimmtheit vorhanden".

[1236] Tomamos es título de la segunda edición (*Übergang in das Wesen*) frente a la de la primera "Hervorgehen des Wesens".

[1237] Cf. Hegel [1978] p. 243: "Am Wesen hingegen ist die Bestimmtheit nicht; sie ist nur durch das Wesen selbst gesetzt, nicht frei, sondern nur in der Beziehung auf seine Einheit".

[1238] O, como dirá Hegel en la segunda edición, un determinar que es la referencia de las determinaciones a sí. Cf. Hegel [1985] p. 382: "Das Bestimmen und Bestimmtwerden ist nicht ein Übergehen […] sondern ihr [die Bestimmungen, J.Z.] eigenes Beziehen auf sich".

[1239] Hegel sostiene que, a diferencia del Ser y la Nada -que son algo en sí- lo Positivo y lo Negativo no tienen en sí , por separado, ningún sentido. Cf. *Enz.* §111 Zus. (Hegel [VIII] p. 229).

inmediatas o indiferentes, sino que serán las que han sido mediadas en el proceso de interiorización (*erinnerung*) del Ser. La esencia consistira así en un acordarse de dicha interiorización que hará que las determinaciones sean no ya inmediatas o dadas, sino puestas –es decir, mediadas. De ahí que la esencia sea la verdad del Ser[1243].

5.4 RECAPITULACIÓN

Resultará útil volver sobre el capítulo con el propósito de ofrecer un resumen del movimiento de la categoría de la Medida mediante una lectura menos apegada al texto de Hegel. Con ello pretendemos obtener una comprensión del capítulo que no se vea afectada por las dificultades que se derivan de un seguimiento exhaustivo del mismo. Consideraremos que el fin ha sido satisfecho con éxito si hemos logramos ofrecer una exposición internamente coherente de la categoría de la Medida.

El comienzo de la Medida era la unidad inmediata de lo cualitativo y lo cuantitativo. Su final ha de consistir en la insostenibilidad del acto de poner esta unidad de entrada meramente inmediata. Por un lado, que la unidad sea inmediata significa que no hay una codependencia (*Zusammenhang*) entre los elementos de la unión. Por otro, el hecho de que nos las habemos con una unión significa que lo cuantitativo tendrá un carácter cualitativo. Esto último significará, a su vez, que un Cuanto no tiene otro Cuanto fuera de sí, indiferente a él[1244], sino que el Cuanto se refiere a sí. El que un Cuanto se refiera a sí mismo es lo que tiene lugar en una medición o, lo que Hegel llama, la aplicación de una regla (*Regel*). En efecto, bajo el fondo de una misma cualidad –por ejemplo, la longitud– un Cuanto, la unidad, se refiere a sí mismo, se refiere a la extensión a medir.

Sin embargo, en esta etapa, la unidad entre lo cualitativo y lo cuantitativo no tiene lugar todavía en la cosa misma. El acto de medir es un acto cualitativo. Ahora bien, al objeto medido le es indiferente, exterior, el resultado cuantitativo de la medición. Todavía falta llegar a la cantidad específica. Para ello, es necesario que la unidad no sea algo exterior al objeto medido. Esto tiene lugar haciendo que la relación entre los Cuantos no sea aritmética sino potencial. En efecto, la relación potencial es un retorno a sí mediante la intermediación de sí mismo y es, por ello, una totalidad cualitativa[1245]. El que el retorno a sí lo sea mediante la mediación de sí mismo significa que el exponente, eso que en la relación aritmética era dado, es ahora parte de la relación potencial misma[1246]. El ejemplo de esta Medida lo tenemos en la aceleración en donde el espacio está en una relación potencial con el tiempo. La mediación de sí en el retorno de un Cuanto a sí puede ser, como en la relación potencial, algo que está ya en la misma forma de la relación, o algo que se debe a o se encuentra en la misma

---

[1240] Cf. *Enz*. §111 Zus. (Hegel [VIII] p. 230): “Im Sein ist alles unmittelbar, im Wesen dagegen ist alles relativ”. Cf. también Hegel [1985] p. 382: “Die Bestimmungen [...] sind statt Seiender [...] nunmehr [...] bezeichnet mit dieser ihrer Relativität”.

[1241] Esta unidad, en su inmediatez, tendrá la forma de la reflexión.

[1242] A diferencia de la imperfecta unidad de la relación inversa. Cf. Hegel [1978] p. 230.

[1243] Cf. Theunissen [1994] p. 308: “Das Wesen ist nun die Wahrheit auch des reinen Seins, sofern in ihm, wird es nur recht begriffen, die Genese des reinen Seins gewußt wird, und zwar eben als die in der Seinslogik verfolgte Bewegung, in der das bestimmte Sein sich aufhebt. In dieser Hinsicht verhält sich die Seinslogik zum Anfang der Wesenslogik wie die *Phänomenologi* zu ihrem eigenen Anfang”.

[1244] Esto era algo própio de lo “exclusivamente” cuantitativo.

[1245] Cf. Hegel [1985] p. 318.

[1246] Esto se ve mejor si escribimos $y/x=x$ en vez de $y=x^2$.

cosa[1247]. En este último caso el exponente de la relación será la Medida que exprese lo específico de la cosa. El ejemplo de esta Medida es ahora el peso específico. Estamos en la Medida específica.

Diferentes mediciones realizadas sobre el mismo fondo relacional cualitativo darán lugar a diferentes Algos. Tener un exponente u otro significará ser un Algo o otro Algo[1248]. Tenemos así una pasta homogénea que tiene lugar no en una dimensión[1249], sino en dos. La regla significaba poner un Cuanto en relación consigo mismo sobre el fondo cualitativo de lo que hemos llamado pasta homogénea de una dimensión. Del mismo modo, sobre la base de la pasta homogénea cualitativamente bidimensional, poner la medida específica en relación a sí significa poner la medida para sí. En su carácter inmediato, una Medida puede ser exterior, indiferente, a otra Medida con la que entre en relación. Al igual que en el caso de la medida de la relación aritmética, en este caso la relación entre las medidas específicas es expresable por una relación lineal. La segunda opción, la opción de la relación potencial, correponde ahora al caso en el que la combinación entre dos Medidas específicas no es linealmente previsible. El ejemplo de ahora es el de la combinación de dos elementos en donde el volumen de la combinación no es igual a la suma de los volúmenes de los elementos. El que haya imprevisibilidad significa ahora que la Medida de sengundo orden[1250] con el que hemos dado es una Medida que especifica. La Medida es así lo que Hegel llama una Medida real.

Estas Medidas reales pueden ponerse en relación entre sí mediante lo que en el lenguaje de Hegel se denomina “retorno a sí”. La diferencia con respecto a los dos retornos anteriores[1251] consiste en que ahora las Medidas son autosuficientes, constituyen a la cosa (*Ding*). Cuando pongamos en relación a una Medida autosuficiente con otra Medida autosuficiente –es decir, cuando pongamos en relación a la Medida autosuficiente con respecto a sí– lo que obtendremos como resultado será una serie de relaciones de Medida. En esta serie obtendremos diferentes valores dependiendo de qué Medida específica haya sido combinada con qué otra. El ejemplo que ahora ilustra este momento en el movimiento de la Medida es el de la afinidad. La combinación en cuestión es, de este modo, neutralización y la Medida el peso equivalente.

Como en todo retorno a sí, el caracter de éste puede ser doble: especificante o no especificante, potencial o lineal –digamos, con salto o sin salto. Lo mismo ocurrirá también ahora. El poner una Medida autosuficiente en relación con otra Medida autosuficiente puede dar meramente distintos valores para distintas combinaciones[1252], o puede resultar que este carácter continuo de valores posibles tenga un reflejo cualitativo, especificante. Esto último es lo que tiene lugar, por ejemplo, en el caso de la afinidad electiva. Además, al igual que en los momentos especificantes anteriores, este nuevo momento no podrá ser prevenible por una expresión lineal de las Medidas autosuficientes. Es decir, los pesos equivalentes resultan insuficientes para predecir si una base de una sal va a ser segregada por otra base o no.

[1247] El exponente es el que da razón de la variación de la relación en cuestión. En este sentido, se trata de algo espécifico de la cosa, algo que dice algo específico de la cosa. Igual que en el paso de la regla a su superación, nuevemante pasamos de encontrar algo meramente en la forma de la cosa a encontrarlo en el contenido de la misma.

[1248] Por ejemplo, ser una corona de oro o de latón.

[1249] Como era el caso de la medición de una cualidad como la extensión. Desde esta optica, la medición del volúmen será también algo que se realiza sobre una pasta homogénea de una dimensión. Una dimensión hace referencia aquí a una cualidad, tenga ésta una, dos, tres o más diemensiones en el sentido habitual de la palabra.

[1250] Tomamos el término de Burbidge [1996] p. 32.

[1251] A saber, el retorno del Cuanto a sí y de la Medida específica a sí.

[1252] Caso de la relación no especificante.

Tenemos así un fondo cuantitativo de combinaciones de Medidas autosuficientes con puntos en los que la combinación resulta especificante, cualitativa. A esto lo llamará Hegel línea de puntos nodales. En la línea de puntos nodales hay un constante ir y venir de lo cualitativo en lo cuantitativo y de lo cuantitativo en lo cualitativo. Este constante movimiento no es más que una doble mala infinitud: la mala infinitud cualitativa y la mala infinitud cuantitativa. La superación de la misma viene de la mano de lo carente de Medida. Lo carente de Medida es la cosa (*Sache*), la materia, cuyo estado cualitativo se alza sobre un fondo cuantitativo. La cosa no tiene otra cualidad que lo reducible a lo cuantitativo, ni tampoco cantidad que no tenga expresión cualitativa[1253].

Esta unión de la materia y del estado, de lo cuantitativo y lo cualitativo es en un primer momento una unidad inmediata. A esto lo llamará Hegel la indiferencia absoluta. Los estados de esta indiferecia absoluta no son meramente exteriores sino que son resultado de una cadena de negaciones que es identificable con la entera *Lehre vom Sein*. Vistas así las cosas, podemos decir que los estados son inmanentes a la cosa. El estado inmanente que mostraba la cosa en primer lugar era el definido como “relación inversa”. Tal y como había ocurrido ya antes con otros momentos, la materia tampoco era capaz de dar cuenta, de preveer, lo específico de esta relación inversa[1254]. Esto significaba dar un paso más en la huída hacia adelante o, lo que es lo mismo, en el progreso hacia el fundamento. Aquello que sí es capaz de explicar los cambios en el estado de un algo no es ya substrato ni materia, sino, la esencia de ese algo. En una unidad tal, la negación no será ya, como en el Ser, la negación de algo inmediato, la negación de algo exterior, sino que la negación será una relación negativa a sí. Para llegar a ello ha sido necesario mostrar que los factores de la relación inversa son en sí mismo unos Algo autosuficientes que tienden a convertirse, cada uno por su cuenta, en el todo. Este uno-todo, lo que llamábamos la contradicción por todas partes, no será ya un algo autosuficiente en sí sino que, debido a la mediación que ha padecido, será un algo autosuficiente para sí. En este algo autosuficiente para sí, las determinaciones no serán exteriores sino que serán puestas por el mismo algo autosuficiente. A esto llamaba Hegel el proceso de expulsión de sí (*Abstoßen von sich*). Esto significará que la reflexión no será únicamente la reflexión exterior del Sujeto pensante, sino que ha de ser inmanente a la cosa. De este modo, la Substancia no será ya diferente en su negación a su otro sino que será diferente en sí mismo. Esto último equivale a pensar, aunque sólo sea en su forma inmediata, la Substancia como Sujeto –es decir, la Identidad como Negatividad, la indiferencia como autodiferencia[1255].

La Esencia consistirá en volver a hacer la experiencia del Ser bajo la condición de una negatividad negada, es decir, de una exterioridad superada en tanto que exterioridad. El relato de los detalles de este viaje de y en la Esencia queda, sin embargo, fuera del marco del presente trabajo.

[1253] El ejemplo que poníamos en este punto era el del número atómico cuya variación daba lugar a un nuevo elemento, a una nueva cualidad. Tanto es así que los huecos que surgían a la hora de ordenar los elementos por el número atómico servirán para orientar la invesigación química y para “encontrar” así los elementos cuya existencia se estaba presuponiendo. Esta presuposición consiste en que toda variación cuantitativa tienen una expresión cualitativa.

[1254] El modelo o ejemplo que venía a servir de ilustración en este caso era el de la relación inversa entre las fuerzas centrífuga y centrípeta con la que se pretendería explicar la órbita elíptica de los planetas. Esta relación resultaba insuficiente en el Perihelio y en el Aphelio para explicar el súbito cambio en la pauta de esta relación. Esta cambio súbito es el resto especificante, no lineal, que hemos venido arrastrando a lo largo de todo el capítulo de la Medida. Cf. Hegel [1978] p. 229: “Es erhellt, daß es eine fremde Kraft wäre, welche diese Umkehrung bewirkte; dies heißt, daß die bald beschleunigte, bald retardierte Geschwindigkeit der Bewegung nicht aus jenen Faktoren erkannt werden könne”.

[1255] Cf. Henrich [1978] p. 212 y 215.

2ª Parte: Realidad

6. CAPÍTULO

ORIGEN DEL COCIENTE DIFERENCIAL EN NEWTON

Der Gedanke kann nicht richtiger bestimmt werden, als Newton *ihn gegeben hat*[1256]

6.1. LA *ARITHMETICA INFINITORUM* DE WALLIS

Abrimos este nuevo capítulo con el análisis de la obra *Arithmetica infinitorum*[1257] del matemático J. Wallis. Este análisis tiene como meta el estudio de la obra de juventud[1258] de I. Newton con el que nos ocuparemos en el siguiente apardado. Por esta razón, los aspectos del trabajo de Wallis en los que nos centraremos en este apartado son precisamente los que tengan que ver con los límites de la obra de Wallis frente a los de Newton. Nos referimos en particular a la noción de límite del cociente de diferenciales, así como la de variable independiente.

Frente a la posterior obra de Newton, el cociente de dos series que aparece en Wallis es un cociente usado para la integración o cuadratura de las áreas y será por ello un cociente entre dos series; una de ellas creciente y la otra constante. La serie del numerador es la que expresa la superficie a cuadrar, mientras que la serie constante del denominador es la que hace las veces de unidad o medida en relación al cual se trata de encontrar una proporción. En este sentido, el método de cuadratura de Wallis es más un método de expresar racionalmente la proporción entre dos superficies que un método de cuadratura de una única superficie. El salto de un método al otro es solidario del surgimiento de la noción de la variable independiente en el método de cuadratura de Newton. Dentro del marco general de la investigación, va a resultar especialmente interesante comprobar el funcionamiento de un cociente con un límite externo a cada una de las series. Es precisamente esta distinción entre cociente de límites y límite de cocientes la clave con la que se podrá situar correctamente tal cociente dentro del movimiento de la *Wissenschaft der Logik*.

[1256] Cf. Hegel [1978] p. 166.
[1257] Citamos por la traducción inglesa J. Wallis [2004].
[1258] Con "obra de juventud" nos referimos en particular a los manuscritos recogidos por Whiteside [1961, p. 89-142] bajo el epígrafe *Annotations from Wallis*.

En relación a la variable independiente, ya se ha dicho que no hay algo identificable como tal en la *Arithmetica infinitorum* de Wallis. En su lugar aparece la mencionada serie constante del denominador. La tarea pendienta para el siguiente apartado será la de esclarecer y legitimar que, efectivamente, se trata efectivamente de un mismo lugar. De momento diremos únicamente que la constancia de la serie del denominador es solidaria de la característica principal de una variable independiente, a saber, su uniformidad.

Aparte de estos dos aspectos que creemos conveniente subrayar, el estudio de la obra de Wallis queda también legitimado por el hecho de que pone en juego expresiones cuya formalización moderna exige el uso del infinito actual[1259]. Una lectura que defienda el recurso a la infinitud actual se enfrenta con las interpretaciones que ponen el acento sobre el recurso al infinito potencial. La justificación de la elección entre uno y otro infinitos queda, sin embargo, fuera del marco de este capítulo.

6.1.1. El Método de Cuadraturas.

Ya se ha adelantado en el apartado anterior que el método de cuadratura de Wallis trata de encontrar la cuarta proporcional entre el área a cuadrar y un cuadrado circunscrito a dicho área. Es decir, si A es el área que se pretende cuadrar y C el cuadrado circunscrito, el método de Wallis consiste en dar con la cuarta proporcional P:

$$\frac{A}{C} = \frac{1}{P}$$

Las áreas a cuadrar son la parábola, la hipérbole y el círculo[1260]. En este último caso, el método de cuadraturas se limita a demostrar que no hay una cuarta propocional que sea entero, una fracción o una raíz que exprese la proporción[1261]. Con el fin de mostrar cómo funciona el método, será suficiente con que veamos su aplicación en el caso de la parábola.

Wallis comienza su *Arithmetica infinitorum* con cuatro proposiciones en las que se aborda la cuestión de la cuadratura de la parábola. Para ello, la primera proposición se ocupará de encontrar la razón de dos series divergentes. Este resultado se materializa en la proposición 3 con la cuadratura del triángulo. Es decir, como paso previo a la cuadratura de cualquier parábola –algo que tiene lugar en la proposición 44– Wallis se ocupa previamente de cuadrar el triángulo.

Si tenemos en el numerador una serie creciente en proporción aritmética y otra en el denominador en la que el mayor de los elementos de la primera se repite tantas veces como elementos hay en él, obtenemos las distintas series,

---

[1259] En este punto seguimos en cierto sentido la lecura de Panza (en Panza y Roero [1995] p. 138 nota 16) el cual frente a Whiteside [1960-1962] y Baron [1969], defiende el recurso al infinito actual en la lecura de Wallis. En cualquier caso, veremos más adelante que, en contra de lo afirmado por Panza no cabe equiparar las lecuras del infinito potencial con las del límite.

[1260] De hecho se trata del cuarto de círculo. Véase al respecto la proposición 121.

[1261] Cf. Panza [2005, p. 52]: “le quatrième proportionnel cherchè ne peut pas être obtenu par l’application d’une succession d’opérations algébraiques à l’unité, c’est-à-dire qu’il ne peut pas pu être identifié ni avec un nombre entier ou fractionnaire, ni avec un radical, bien qu’il soit possible de le caractériser comme étant un terme intermédiaire d’une succession numérique déterminée”.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2}$$

y en general haciendo uso de la notación algebraica habitual,

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} i}{\sum_{i=0}^{n} n_i}=\frac{\sum_{i=0}^{n} i}{n(n+1)}=\frac{1}{2} \quad \text{dado que } \forall n, n_i = n$$

Lo necesario para la cuadratura es que las series en cuestión crezcan continuamente y no, como hasta ahora, que lo hagan en saltos o unidades discretas. Haciendo uso del recurso de paso al límite que tan buenos resultados le proporcionará al Newton físico, la proposición 3 extrapola el resultado anterior a las series continuas. Wallis habla en este punto de *inductione*[1262]:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} i}{\sum_{i=0}^{n} n_i}\right]=\frac{1}{2} \qquad [1]$$

y para el caso en el que se rechace la noción de límite y se prefiera hacer uso del infinito actual, podemos escribir esto mismo –siguiendo a Panza[1263]– de la siguiente forma:

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} i}{\sum_{i=0}^{n} n_i}\right]_{n=\omega}=\frac{1}{2} \qquad [2]$$

En donde se hace uso de un “número infinito” representado por ω. Éste es el elemento que algunos interpretes han querido identificar con algo que equivaldría al infinito actual. Sea esto como fuere, lo que resulta importante para nuestro estudio es notar la necesidad de que el límite o, en su caso, la igualdad del contador *n* con el número infinito, se ha de situar, e. d.,

1262 Cf. Wallis [2004] p. 13. *Inductione* es precisamente lo que hará Wallis para alcanzar la generalización de la cuadratura de la parábola.
1263 En Panza [2005] p. 55.

alcanzar fuera del cociente. Es decir, lo que hemos obtenido no es una proporción entre límites sino un límite de relaciones. Es únicamente esta segunda alternativa la que consigue librarse del absurdo de la búsqueda de una razón entre dos series crecientes divergentes. El límite de la proporción entre dos series que tienden al infinito puede ser finito, la proporción entre los límites de dos series que tienden al infinito, sin embargo, no. Como hemos visto en capítulos anteriores, esta diferencia resultaba clave para la comprensión del coficiente de diferenciales desde la perspectiva de la *Wissenschaft der Logik*.

El caso trivial de la cuadratura del triángulo merece ser estudiado debido a que los presupuestos que aparecen en él volverán a fundamentar todas las posteriores cuadraturas de Wallis. En este sentido, hemos de señalar la simultaneidad con el que surgen en Wallis las nociones de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. En la fomulación que nos ofrece Wallis, cada una de estas nociones es solidaria de la otra. Tanto es así que en la proposición 108 se llegará a definir expresamente lo infinitamente pequeño mediante lo infinitamente grande[1264]. La inducción o el paso al límite continuo presupone que los sucesivos elementos del numerador son infinitesimales que crecen en una relación aritmética. A su vez, si queremos obtener como resultado una magnitud finita, el que los elementos de la serie sean infinitesimales implicará que su número ha de ser infinito. Los elementos infinitesimales sumados de este modo llegan a "barrer" el área que había que cuadrar. Tal y como dice Wallis, haciendo uso inoportunamente de la expresión *quasi*[1265]:

triangulum enim constat quasi ex infinitis rectis parallelis[1266]

La expresión problemática *quasi* es traducible por "como si": el triángulo es como si estubiese constituido de infinitas rectas paralelas. Con el fin de impedir que de la suma de rectas salte misteriosamente al resultado final de la cuadratura de un área, Panza propone la introducción de un elemento infinitesimal que haría de las rectas unos paralelogramos de un grosor infinitesimal. Este nuevo elemento infinitesimal, al aparecer tanto en el numerador como en el operador, va a poder eliminarse[1267]. La suma de los paralelogramos infinitesmales es la expresada por la primera de las expresiones:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} i \cdot dx}{\sum_{i=0}^{n} n_i \cdot dx} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i}{\sum_{i=0}^{n} n_i}$$

lo que en el caso de la parábola simple daría

[1264] Cf. Wallis [2004] p. 83. Así, la parte infinitamente pequeña *a* de una magnitud finita R se define como R/∞.

[1265] Wallis será criticado por Hobbes por el uso de esta expresión. Recogemos la referencia a Hobbes [1656] p. 46 de J.A. Stendall en Wallis [2004] p. 15 nota 6. Cf. también Hobbes [1845] p. 310.

[1266] Cf. para la traducción Wallis [2004] p. 15: "The triangle consists, as it were, of an infinite number of parallel lines".

[1267] Cf. Panza [1995] p. 137 nota 14: "Siccome tale coefficiente comparirebbe tuttavia, come fattore, tanto al numeratore che al denominatore delle frazioni che esprimono il rapporto fra tali superfici, esso può operativamente venir eliminato".

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} i^2 \cdot dx}{\sum_{i=0}^{n} n_i^2 \cdot dx} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i^2}{\sum_{i=0}^{n} n_i^2}$$

algo que en el límite proporciona el resultado recogido[1268] en la proposición 19

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} i^2}{\sum_{i=0}^{n} n_i^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right] = \frac{1}{3}$$

Este mismo resultado lo podemos expresar haciendo uso de la notación habitual para las integrales:

$$\frac{\int y \cdot dx}{y \cdot x} = \frac{\int x^2 \cdot dx}{x^2 \cdot x} = \frac{\frac{1}{3}\cdot x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

De este modo se pone de manifiesto la diferencia que separa a Wallis de nuestra concepción de la integral. En Wallis cuadrar significa encontrar la proporción de un área a cuadrar con respecto un área ya cuadrada. En nuestro caso, no es que se haya dejado de lado la búsqueda de la proporción, sino que, como veremos en el siguiente apartado, ésta busqueda está ya asumida en el integral mediante el uso de la variable independiente. Nuestro método es más directo debido a que incorpora lo que en el método anterior se tenía que hacer explicitamente.

En resumen, si seguimos la lecura de Stedall[1269], cuando en la expresión [1] el contador *n* tiende al infinito, la unidad con el que empieza la serie tiende a hacerse infinitesimal y viceversa, cuando la expresión [1] tiende a sumar un número infinito de sumandos, sus elementos tenderán a ser infinitesimales con tal de poder obtener resultados finitos. Sin embargo, Wallis no habla en este punto de una serie de elementos infinitesimales. La serie que presenta en la proposición 2 es la misma que la de la proposición 1 pero con un número de elementos que puede llegar a ser esta vez “infinito”. Ello se debe a que la unidad con la que comienza la serie[1270] puede ser la unidad de cualesquiera medidas empíricas o dudosamente matemáticas como el del infinitesimal *dx*. Es decir, la continuidad de la serie en

---

[1268] Cf. Wallis [2004] p. 26.

[1269] Cf. Wallis [2004] p. 14 nota 5: “What he is really thinking of, however, thought he does not yet make it clear, is a series with a finite greatest term *l*, arrived at by *m* steps of size *d*, thus 0, *d*, 2*d*, 3*d*, ..., *md*=*l*. When *m* is finite it is clear that the sum of terms is $\frac{1}{2}(m+1)l$, or, to $(m-1)l$ as 1 to 2. Wallis allowed the number of steps *m* to become infinitely large, by making *d* arbitrarily small, indeed infinitesimally small”.

[1270] Si es que abstraemos en este punto el elemento 0 encargado de representar al punto del origen. Este hecho limita el métdo de cuadratura de Wallis a lo que en nuestra formulación son las integrales definidas $\int_o^x f(x)\cdot dx$.

cuestión no se salva introduciendo, como hace Stedall, un elemento infinitesimal al comienzo de la serie. La continuidad está asegurada con, 1) la introducción de la unidad 1 después del elemento nulo y 2) con hacer que los elementos de la serie aritmética, geométrica, etc., sean un número infinito. Es por esta razón por la que dice Wallis que únicamente en el caso de que este primer elemento no sea el 1 habría que hacer ajuestes.

That is, if the first term, is 0, the second 1 (for otherwise some adjustment must be applied). [1271]

Es decir, se necesitan ajustes para conseguir la serie continua que se buscaba. En contra de lo que afirma Stedall, el razonamiento de Wallis no es que sea incorrecta ni inprecisa, lo que ocurre es que una lectura de la *Arithmetica infinitorum* que sabe de la existencia de los infinitesimales, una lectura moderna, tiende a rellenar la unidad que ha quedado vacía en Wallis por estos mismos infinitesimales. Tal y como se ha dicho más arriba, esta lectura se apoya en la definición de lo infintesimalmente pequeño que ofrece Wallis en la proposición 108. En esta lectura moderna, la reformulación de la serie, haciendo un uso algo grosero de la infinitud, sería la siguiente:

$$0+1\cdot\frac{R}{\infty}+2\cdot\frac{R}{\infty}+...+\infty\cdot\frac{R}{\infty}=\frac{1}{2}\cdot(\infty+1)\cdot\infty\cdot\frac{R}{\infty}=\frac{1}{2}\cdot(\infty+1)\cdot R \qquad [3]$$

En donde R/∞ es el infinitesimal tal y como es definido en la proposición 108. El problema de esta lecutura es evidente. Si definimos el resultado del producto entre un infinitesimal y una magnitud infinitamente grande como una magnitud finita[1272] y el del producto entre un infinitesimal y una magnitud finita, como una magnitud finita, no se entiende cómo se consegirá barrer con la serie [3] un triángulo, si lo que tenemos en tal serie es la suma de ∞-1 elementos infinitesimales más el cero más un último elemento finito R. Y no vale recurrir a una redefinición del producto entre lo finito y lo infinitesimal diciendo que es finito por que entonces tendríamos que concluir que una magnitud finita dividida por una infinita nos da como resultado una magnitud finita y no, como cabría esperar, una *magnitud* infinitamente pequeña. Es decir, si

$$\mathbf{infinitamente\ pequeño}\cdot\mathbf{finito1}=\mathbf{finito2}$$

luego

$$\frac{\mathbf{finito3}}{\mathbf{infinito}}\cdot\mathbf{finito1}=\mathbf{finito2}$$

[1271] Ibid.

[1272] Tal y como hace, por ejemplo, Newton [1967] en la página 89: “As finite lines added in an infinite number to finite lines, make an infinite line: so points added twixt points infinitely, are equivalent to a finite line”.

y

$$\mathbf{finito4} = \mathbf{finito3} \cdot \mathbf{finito1} = \frac{\mathbf{finito2}}{\mathbf{infinito}}$$

Vista la ligereza con la que Wallis define en la proposición 108 lo infinitamente pequeño como la división entre una magnitud finita y otra infinita, no es descartable la idea de que sean estas dificultades las que le hayan podido mantener al margen de una propuesta infinitesimalista de la sumandos de las series utilizadas en la cuadratura.

6.2 LA LECTURA DE NEWTON DE LA *ARITHMETICA INFINITORUM*[1273]

6.2.1. Dos Lemmas como condición de la cuadratura

El método de cuadraturas que va a proponer Newton en sus apuntes de la lectura de la *Arithmetica Infinitorum* de Wallis va precedido[1274] de un parágrafo cuayo contenido puede organizarse en dos Lemmas en los que se recogen los dos princípios básicos del método de indivisibles. De este modo, Newton se apunta en principio a una corriente que más tarde será el encargado de desbancar[1275]. Los dos Lemmas que ahora presentamos son los siguientes:

Lemma 1: "All the parallel lines which can be understoode to bee drawne uppon any superficies are equivalent to it".

Lemma 2: "If all the parallel lines drawne uppon any superficies be multiplied by another line they produce a Sollid [...] Whence All the parallel superficies which can bee understoode to bee in any sollid are equivalent to the Sollid".

En estos dos Principios se afirma así;

1) la equivalencia entre el total de las líneas paralelas trazadas en una figura y la superficie de dicha figura.

2) la equivalencia entre el total de las superficies trazadas en un sólido y el volúmen de dicho sólido.

Como se ve, estos dos Principios son resumidos al comienzo de lo que hemos denominado Lemma 2. En él, primero se toman todas las líneas paralelas dando lugar a una superfice. A continuación se toman nuevamente todas las superficies paralelas para llegar a un sólido. Hay que señalar aquí la equivalencia entre la operación de multiplicación y el de

[1273] Cf. para este apartado el trabajo de Panza [2005] pp. 133-181.
[1274] Cf. Newton [1967] pp. 91-92.
[1275] Cf. Whiteside en Newton [1967] p. 91 nota 1: "Ironically, Newton himself was to be a leader in the movement [the method of indivisibles] towards algorithmic calculus procedures which made indivisible theories obsolete by the end of the centruy".

"coger todas las líneas" que se trata de introducir en estas líneas[1276]. Newton utiliza indisitintamente "multiplied" como "All the parallel superficies". Así, el resultado de una multiplicación $ab=c$ puede interpretarse de dos formas distintas:

a) Podemos entender que lo que la operación representa es el hecho de tomar b veces el segmento a por cuyo resultado se obtiene el segmento c. Los dos lados de la equación, así como los elementos de la primera, tienen la misma dimensión: la longitud.

b) sin embargo, se puede entender que el resultado del primer lado de la ecuación no es una longitud sino un cuadrado. Esta lectura, tan habitual en nosotros como la primera, es la que prima en el método de los indivisibles. Ante la extraneza producida por el hecho de que en este caso los dos lados de la ecuación tienen distinta dimensión, podemos optar por dos vias de resolución:

1) se puede optar por mantener la homogeneidad de las dimensiónes de la ecuación entendiendo que lo que expresa el lado derecho de la ecuación es la superficie de un cuadrado que posee como uno de sus lados el segmento unidad. Esta solución es la adoptada desde Euclides.

2) una aproximación más moderna vendrá dada por el desmarque *sui generis* con respecto a la ley de la homogéneidad que es posibilitado por la ecuación [4][1277]. Entendemos que este desmarque posibilita el surgimiento del álgebra de las cantidades en tanto que cantidades frente a un álgebra de segmentos. Volveremos sobre este punto en el apartado 6.2.3.

6.2.2. La cuadratura de la parábola por Newton

Newton dedicó el comienzo del año 1664 al estudio de la primera parte de la *Arithmetica infinitorum* que, como ya hemos apuntado, se ocupa de la cuadratura de la parábola y la hipérbole. A diferencia de Wallis, el método de cuadraturas de Newton hace uso de la noción de función que recoge de la escuela cartesiana. Esto significa que la curva será definida por Newton por una función que expresa la ley de variación de los dos ejes ortogonales cartesianos. Es decir, la forma de las funciones de las que hace uso Newton será la para nosotros habitual

$$f(x)=y$$

frente a

$$F(x,y)=0$$

que descuida, mas bien, reflejar el carácter de ley de variación entre dos variables que sí es expresada por la primera versión.

[1276] Algo sobre el cual nos ocuparemos en el apartado 6.2.3.
[1277] *Vid. sup.* apartado 6.2.3.

Pero veamos cómo se las arregla Newton[1278] para cuadrar una parábola simple de un parámetro constante *r*. El texto al respecto es el siguiente:

In the Parabole cae supposse the Parameter ab=r. AQ=x. ad=y. dc=x. and ry=xx or xx/r= y. Now suppose the lines called x doe increase in arithmeticall proportion all the x´s taken together make the superficies dch which is halfe a squere. let every line drawne from cd to hd be squared and they produce a Pyramid equall to every $xx = x^3/3$ *, which if divided by r there remains* $x^3/3r = yx/3$ *equal to every* x^2/r *[that is] equal to every (y) or all the lines drawne from ag to accc equall to the superficies agc [taht is] equall to a 3^d^ parte of the superficies adcg and the superficies acd=* $2xy/3$.

Vemos que esta exposición de Newton nos es mucho más actual que el método de Wallis. En vez de las series crecientes y constantes que utiliza Wallis, Newton hace uso de la noción de función y entiende así una curva como la representación de la ley del cambio entre dos variables: una variable que varia en la abcisa y otra que lo hace sobre la ordenada. Newton se sirve pues de la función para atacar el problema de la cuadratura y ello le llevará a interpretar también en terminos de función la superficie buscada. La posterior sistematización en un algoritmo que posibilite el paso de la función de la curva a la función de la superficie limitada entre la curva y las abcisas no es otra que nuestra integral.

La búsqueda de una proporción entre dos superficies, una por cuadrar y otra ya cuadrada, da lugar en Newton a la búsqueda de una expresión para la superficie a cuadrar. No es que se haya dejado de lado la proporción entre superfícies y áreas, sino que, más bien, un área acaba describiéndose en Newton en términos de otro área. Como toda función es una ley de cambio entre, por lo menos, dos variables, su expresión primitiva es la de la función de un cambio invariable o la *direkte Verhältnis*[1279]:

$$y = (r) \cdot x$$

Newton comienza este ejemplo de cuadratura para la parábola simple procediendo paso a paso, empezando por la cuadratura, *Q*, de la función igual $f(x) = y = x$

$$Q(x) = x^2/2$$

La base de las restantes cuadraturas de parábolas e hipérboles es esta primera cuadratura. La diferencia con respecto a la cudratura de la primera proposición de la *Arithmetica infinitorum* consiste en que lo que Wallis buscaba era más bien la proporción

$$\frac{Q(x)}{yx} = \frac{Q(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

[1278] Cf. Newton [1967] p. 93.
[1279] Cf. Hegel [1978] p. 180 y sig.

Donde el numerador del cociente de la derecha es el área a cuadrar y el denominador es el área del cuadrado conocido respecto a la cual se busca la proporción. Este cuadrado se incorpora en Newton en la expresión para el área a buscar, de modo que lo que se tiene es una expresión inmediata para la cuadratura y no meramente una proporción entre dos áreas.

La dimensión geométrica de este primer paso en dirección a la cuadratura de la parábola es bien simple. El supuesto que subyace en el procedimiento de Newton es el de la velocidad de cambio uniforme de la variable *x*. Esta uniformidad es lo que hace de él una variable independiente. Una variable cuyo cambio no sufre ningún cambio es la base permanente desde la cual se miden los cambios. La substancia que soporta los accidentes. El cambio con velocidad uniforme es expresado en una série aritmética en donde su primer elemento no tiene por qué ser la unidad[1280]. Las series siguientes,

2, 4, 6, 8, 10, ...

3, 6, 9, 12, 15, ...

4, 8, 12, 16, 20, 24, ...

5, 10, 15, 20, 25, ...

Se reducen a la serie originaria

1, 2, 3, 4, 5, ...

eligiendo para cada caso la conveniente unidad de medida. Esta unidad de medida es lo que en el ejemplo de la cuadratura de Newton llamábamos parámetro *r*. Por ello, podemos reproducir el comienzo de Newton en términos que incorporen tal parámetro y, por ello, sean expresión de la *direkte Verhälnis* de Hegel:

$$Q(y) = Q(r \cdot x) = r \cdot \frac{x^2}{2}$$

De este modo hemos presentado lo que en Newton es el tercer paso de la cuadratura de la parábola, junto con el primer paso. Como decíamos, ello se debe a que una elección apropiada del parámetro *r* hace de cualquier serie aritmética una expresión para la función identidad y=x. En esta función, la cantidad que se tenga sobre un eje, se tiene también sobre el otro eje. Si resulta además que estos dos ejes son perpendiculares, podemos interpretar la función como la regla según la cual cuanto se tiene en las abcisas se tiene en las ordenadas. Cada punto de la abcisa se eleva tanto como él se ha alejado del origen. La suma de todas estas “elevaciones” o líneas, la integral o cuadratura de la función identidad, es interpretado por Newton como un área. El área de un triángulo equilátero.

Lo que vimos que era una paso problemático en Wallis, aquél paso que consistía en pasar de una suma de líneas a una superficie, aparece de nuevo en Newton, pero con una

[1280] Algo que ya habíamos hecho notar en la nota 1034.

doble dimensión. La primera de ellas, el que una suma de segmentos represente una superficie es la que tiene lugar en la primera etapa de la cuadratura. La nueva dimensión es la que se puede apreciar en el segundo de los pasos que da Newton en dirección a conseguir cuadrar la parábola. Newton construye sobre el triángulo ya trazado un nuevo triángulo basado en la misma ley, a saber, tanto se eleva sobre el eje principal cuanto se ha elejado sobre este mismo eje, pero haciendo que esta nueva elevación lo sea sobre un tercer eje *z*. El resultado, el volumen de una pirámide, es la cuadratura de la parábola:

$$Q(r \cdot x^2) = r \cdot Q(x^2) = r \cdot \frac{x^3}{3}$$

Algo que no por habitual nos debe dejar de sorprender: ¿cómo es posible que un volúmen exprese una cuadratura de una superfice?¿es acaso un volumen lo mismo que una superficie?¿qué esta pasando aquí con las dimensiones de las magnitudes?. Intentaremos responder a estas preguntas en el siguiente epígrafe.

6.2.3. La ley de homogeneidad

Si con Wallis teníamos el problema de que una suma de segmentos pretendía ser una superficie, la nueva dimensión del problema que surge con Newton consiste en que un volumen se utilice como expresión de un área. Lo que hace posible tal expresión es la igualdad entre las unidades de todas las dimensiones[1281]:

$$e^0 = e^1 = e^2 = e^3 = ... = 1 \qquad [4]$$

Lo que subyace en todo ello es que una magnitud *a* no es ya expresión directa o nombre de un segmento sino que puede ser nombre de una superfície o de un volumen. La igualdad [4] expresa la consumación del álgebra simbólica. Ésta es un álgebra en la que las variables no representan otras magnitudes concretas, sean éstas rectas o unidades de algo, sino que estan representando magnitudes en tanto que magnitudes. Tal consumación, al menos formalmente, será obra del matemático Vieta[1282]. Sin embargo, la ley de homogeneidad expresada en su *In artem analyticum Isagoge* obligaba a que las dimensiones de los sumandos, restandos y las proporciones tenían que ser iguales, mostrando así un resto[1283] sin superar que en Newton será ya historia[1284].

[1281] Cf. Panza [2005] p. 24: “L’unité dont se sert Descartes […] fonctionne plutôt comme un élément neutre d’un groupe multiplicatif”. No siempre que se maneje la unidad en el álgebra se acaba afirmando explicitamente la igualdad entre un área y una recta. Tal es el caso de Van Ceulen, quien después de hayar para un caso en concreto el lado *c* de un cuadrado con su otro lado *e* o unidad, igual al área *ab*, se resiste a afirmar la igualdad de éste último área con el segmento *c*. Cf. al respecto Bos [2001] pp. 155 y 156.

[1282] Cf. Klein [1936] p. 144: “Von der modernen Algebra aus gesehen scheint (im Wesentlichen) nur ein einziger Schritt nötig zu sein, um die Diophantische Logistik zur Vollendung zu bringen: die durchgängige Ersetzung der „bestimmten Zahlen“ durch „allgemeine“ Zahlenausdrücke, der numerischen Werte durch symbolische, -ein Schritt, der nach mancherlei Fortschritten in der Behandlung von Gleichungen überhaupt, schließlich eben von Vieta vollzogen wurde”.

[1283] Cf. Pycior [1997] p. 36: “ the law of homogeneous terms [...] evidenced a lingering geometric influence on algebra”.

[1284] Algo sólo posible después de la Geometria de Descartes. Cf. al respecto Scholz [1990] p. 203: “Mit Descartes neuer Sichtweise mußten algebreische Formeln nicht mehr länger homogen sein”. Volveremos sobre este punto en este mismo epígrafe.

La formulación de Vieta de una ecuación homogénea de grado *n* era la siguiente:

$$a \cdot x^n + b_1 \cdot b_2 \cdot x^{n-1} + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot x^{n-2} + ... + z_1 \cdot ... \cdot z_n \cdot x^1 = 0$$

donde $a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, ..., z_1, ..., z_n$ son constantes y *x* es la variable. La igualdad [4][1285] permite expresar ecuaciones como la siguiente:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x + c = 0 \qquad [5]$$

Es decir, la igualdad [4] permite que los sumandos tengan distinta dimensión o, mejor dicho, la igualdad [4] hace que todos los sumandos tengan la misma dimensión: cualquiera dimensión. Podemos reformular así la equación [5] haciendo de él una ecuación homogénea:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x \cdot e^2 + c \cdot e^3 = 0$$

Era precisamente la ley de homogeneidad la que hacía que Vieta catalogara las magnitudes en distintas expecies. El dominio de las magnitudes *V* quedaba así dividido[1286] en un conjunto

$$V = \Re_+^{(1)} \cup \Re_+^{(2)} \cup ... \cup \Re_+^{(n)}$$

donde $\Re_+^{(n)}$ era la especie de las magnitudes positivas de dimensión *n*. En Newton, por el contrario, tenemos un dominio de la magnitud *V* sin compartimentos estancos que es, en base a la expresión [4], capaz de expresar tanto un volúmen como, por ejemplo, un segmento:

$$V = \Re_+$$

De este modo, podemos situar a Descartes en un lugar intermedio entre Vieta y Newton. Todavía en Descartes los símbolos expresan segmentos y no, como parece ser el caso en Newton, magnitudes cualesquiera. Pero, por otro lado, en Descartes todos los símbolos –y no, como ocurre en Vieta, únicamente los que poseen la dimensión 1–, son símbolos de segmentos:

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^2 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms vsités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, etc. [1287]

[1285] Del mismo modo, Leibniz utiliza el predicado "es verdadero" para homogeneizar las proposiciones de distinto orden o diferente grado de composición. Por esta razón Leibniz equipara la función de la unidad en la aritmética al de de la verdad en la lógica. Cf. al respecto Leibniz [1982] p. 80: "et τὸ hoc verum facit hoc loco officium quod unitas in Arithmetica". Cf. también el ejemplo ya homogeneizado en la tabla de la página 82.

[1286] Seguimos en este punto a Bashmakova y Smirnova [2000] p. 79.

Teniendo esto presente, podemos situar en Descartes en el comienzo del fin de la ley de la Homogeneidad. Tal y como hemos apuntado al presentar la igualdad [4], es la introducción de la Unidad o la “mensura famosa”[1288] lo que va a posibilitar a Descartes la eliminación de dicha ley presente en la obra de Vieta[1289]. Lo curioso del asunto es, sin embargo, que el mismo Descartes no hará uso de las ecuaciones no homogéneas hasta el libro tercero de su *Geometría*. Las explicaciones de los historiadores de la matemática sobre este punto no dejan de ser insatisfactorias. Por poner un ejemplo, Bos habla de la dificultad de dar cuenta de una tal omisión o silencio sobre la presunta compatibilidad entre la interpretación antigua de las operaciones algebráicas y la de Descartes[1290]. Más adelante, basándose en la demostración ofrecida por Debeaune[1291] segun el cual los resultados para el cálculo algebraico son independientes de la introducción de la unidad, Bos defiende que la nueva interpretación debió de ser considerado por Descartes como un mero “formalismo”[1292].

Pero veamos cómo se presenta en Descartes la ley de Homogeneidad. En su *Geometria*, Descartes distingue dos casos en los que una ecuación algebraica se enfrenta con la ley de la homogeneidad. El primero es aquél en el que la homogeneidad se cumple en la ecuación. Descartes habla para ello del caso en el que la unidad no está determinada en la ecuación[1293] y propone el siguiente ejemplo:

$$c = \sqrt[3]{a^3 - b^3 + a \cdot b \cdot b}$$

Donde *c* es un segmento o “ligne”. El segundo de los casos es aquél en el que la unidad está determinada en la ecuación. El ejemplo propuesto en este caso es el siguiente:

$$c = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot b \cdot b - b} \qquad [6]$$

En este último caso, dice Descartes, se ha de suponer que el primer elemento de la raíz cúbica esta dividio una vez por la unidad y el segundo de los elementos esta multiplicado dos

---

1287 Descartes [1637] p. 299.

1288 Así llama, antes de Descartes, Regiomontanus a esta unidad. Cf. Regiomontanus [1967] p. 30: “Cognita vocabitur quantitas, quam mensura famosa, aut pro libito sumpta secundum numerum meditur notum” (la traducción al inglés esta edición es: “A *quantity* is considered *known* if it is measured by a known or arbitrarily assigned measure a known number of times”).

1289 Cf. Bos [2001] p. 297: “The main and crucial difference between Descartes’ interpretation (as given in the *Geometriy*) and the classical and Vietean ones was that Descartes, by introducing a unit, removed the necessity for formulas to be homogeneous”.

1290 Cf. Bos [2001] p. 301: “It is difficult to asses the significance of Descartes’ silence about the compatibiliy of his new interpretation ot the algebraic operations and the classical one”.

1291 Cf. Debeaune en Descartes [1659-1661] pp. 107 y sig.

1292 Cf. Bos [2001] p. 301: “I find Descartes’ omission striking and suggestive of a certain carelessness about the matter; it suggests that he considered his interpretation of the quadratic algebraic operations as a necessary preliminary formality for his method rather than as an important contribution to geometry”.

1293 Cf. Descartes [1637] p. 299: “Il est aussy a remarquer que toutes les parties d’une mesme ligne se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l’une que l’autre, lorque l’unité n’est point determinée en la question”.

veces por la unidad. Es decir, detrás de la ecuación [6] se encuentra presupuesto la ecuación siguiente:

$$c = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot b \cdot b/_{e} - b \cdot e \cdot e}$$

En estas líneas, Descartes quiere mostrar la forma de conseguir la homogeneidad con el segmento unidad. Recordemos que la posibilidad de llegar a hacer tal cosa le era vedada a Viete debido a que éste carecía del segmento unidad *e*. En cierto sentido pues, no es que se haya dejado de lado la ley de la homogeneidad, sino que, más bien, es presentado como algo que implicitamente se cumple en toda ecuación algebráica que pueda parecer no homogénea. La ecuación [4] elimina pues la diferencia entre lo homogéno y lo no homogéno en el álgebra simbólica: si todo lo que parece no homogéneo puede expresarse homogéneamente, ¿cuál es la diferencia entre lo homogéno y lo no homogéneo?. Lo que en Vieta se daba en la expresión se da así en Descartes en la forma de la expresión[1294]. La incómoda exigencia de Descartes según el cual sólo se pueden extraher raices cúbicas de expresiónes al cubo no lo es más. La raíz cúbica de *a*, expresada por

$$c = \sqrt[3]{a}$$

es así perfectamente legítima en la *Geometria* de Descartes. Para ello uno solo tiene que atenerse a la forma de ésta expresión que es reflejada por

$$c = \sqrt[3]{a \cdot e \cdot e}$$

La dimensión, acaso el último residuo que el álgebra debía de depurar de su herencia geométrica, es reducida a una pasta común, de la misma forma que, dicho algo groseramente, eran reducidas las peras y las manzanas cuando se trataba de contar la fruta. De ahí que la igualdad [4] sea equivalente a la siguiente igualdad:

$$\mathbf{5\,peras = 5\,manzanas = 5\,tomates = 5\,cosas}$$

Es pues a partir de Descartes cuando uno puede contar peras con manzanas en el plano de el álgebra simbólica. Cuando de lo que se trata es de contar algo, es igual contar con manzanas que contar con peras y viceversa. Nace así lo que equivale a "la cosa" en el álgebra simbólica; la magnitud. No obstante, es curioso que a esta Descartes seguirá llamando "ligne". La expresión de esta ley así como su conexión con el método de los indivisibles, algo

[1294] Lo que es precisamente lo contrario de lo que se afirma en Boyer [2004] p. 84: "Descartes merely substituted homogeneity in thought for homogeneity in form". Donde por "thought" y "form" entendemos "forma" y "expresión" respectivamente.

sobre la que hemos intentado llamar la atención, será formulado explícitamente por Newton[1295] en su *De Analysi* de una manera clara:

Sed notandum est quod unitas ista quœ pro momento ponitur est superficies cùm de solidis, & linea cum de superficiebus, & puntū cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur. Nec vereor loqui de unitate in punctis sive lineis infinitè parvis, siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometrœ dum utuntur methodis Indivisibilium.

Terminaremos este apartado poniendolo en relación con la tercera de las observaciones sobre el Cálculo de la segunda edición de la *Wissenschaft der Logik*. En ella, Hegel reflexiona sobre el método de obtener superficies considerando que se encuentran compuestas por líneas o los volúmenes suponiendo que están compuestas por superficies. Según Hegel, el procedimiento supone que algo continuo –un volumen o una superficie– esta compuesto por elementos discretos –superficies en el caso del obtener un volumen, o líneas si se trata de una superficie. El procedimiento de pasar de los "elementos" discretos al continuo y obtener así el valor de éste es utilizado por primera vez por Kepler[1296]. Este paso se suele presentar habitualmente recurriendo a las nociones de movimiento de la línea o la superficie o a la noción de suma de todas las líneas o todas las superficies. Los dos conceptos serán rechazados por Hegel. El primero, el del movimiento, porque introduce la representación del tiempo en la matématica[1297]. El segundo por que no es posible salvar la diferencia cualitativa y, por ello, infinita entre, por ejemplo, una línea y una superficie recurriendo a algo cuantitativo como es la serie. Del mismo modo en que el paso entre las distintas dimensiones del elemento unidad se establecía recurriendo a la multiplicación, aquello que se encuentra detrás del paso de, por ejemplo, una línea a una superficie es la multiplicación[1298]. La multiplicación o la infinitud es aquello que permite atajar el salto cualitativo entre una determinación –por ejemplo, la línea– y su determinación negativa (*negative Bestimmung*)[1299] –por ejemplo, una superficie. Una línea multiplicada por otra línea da así como resultado una superficie mientras que no hay suma posible de líneas que dé lugar a una superficie. Para atajar esta dificultad, llegará a ser

[1295] Cf. Newton [1968] p. 234, y p. 235 para la traducción: "But it must be noted that unity which is set for the moment is a surface when the question concerns solids, a line when it relates to surfaces and a point when (as in the example) it has to do with lines. Nor am I afraid to talk of a unity in points or infinitely small lines inasmuch as geometers now consider proportions in these while using indivisible methods". Como veremos, Newton se decide por la expresión "indefinidamente pequeño" (*indefinité parvo*) frente a la otra de "infinitamente pequeño" (*infinité parvo*), más propia de Lebniz.

[1296] Cf. Hegel [1985] p. 300. Lo cierto es que Arquímedes, en un manuscrito encontrado a comienzos del siglo XX considerará las superficies como si estubiesen compuestas de líneas. La diferencia entre Kepler y Arquímedes consiste en que mientras que el primero hará uso, por primera vez en la matemática, de magnitudes infinitamente pequeñas, el segundo pensará todavía en indivisibles. Podríamos decir que Arquímedes utiliza los indivisibles para descubrir mientras que Kepler utiliza los infinitesimales para demostrar. Otra diferencia entre Arquímedes y Kepler consiste en que el segundo llegará a transformar las figuras –por ejemplo, transforma una manzana ideal en la mitad de un cilindro para obtener así su volumen–, algo que no llegará hacer Arquímedes.

[1297] Cf. Hegel [1985] p. 302.

[1298] Cf. Hegel [1985] p. 302: "Daß aber die angebliche bloße Summation in der Tat eine Multiplikation also den Übergang von der linearen in die Flächenbestimmung in sich selbst enthält". Cf. también [1985] p. 303: "das geometrische Moment darin aber ist die Multiplikation das Qualitative des Übergangs aus der Dimension der Linie in die Fläche".

[1299] Cf. Hegel [1985] pp. 308-309: "Die qualitative Verschiedenheit des Diskreten mit dem Kontinuierlichen überhaupt, enthält gleichfalls eine negative Bestimmung" y p. 309: "die Multiplikation dieser selben Größen gibt zugleich die qualitative Veränderung des Überganges von Linie in Fläche; insofern tritt eine negative Bestimmung ein".

habitual recurrir a la noción confusa[1300] de lo infinitamente pequeño y representarse a las líneas como rectángulos cuyas bases son infinitesimales. Este procedimiento pretende superar una diferencia cualitativa por medios estrictamente cuantitativos por lo que está destinado a fracasar[1301]. Frente a ello, Hegel defiende la potencia que subyace en la multiplicación de dimensiones[1302] o, si tenemos en cuenta que en la base este tipo de multiplicaciones está la igualdad expresada por [4][1303], en carácter cualitativo de la potenciación. Esto enlaza así con el problema del papel central que ocupa la relación de potencias en la filosofía del cálculo infinitesimal en Hegel, temas que hemos abordado ya en los apartados 3.2.3, 3.3.3 y 3.3.4.

6.2.4 El segmento Unidad

Por lo que nos consta, ha sido Marco Panza[1304] el único interprete que ha intentado explicar la extrañeza ya antes mencionada consistente en que únicamente en el tercer libro de la *Geometria* hace uso Descartes de ecuaciones algebráicas no homogéneas. Para justificar su lectura, Panza comienza[1305] distinguiendo tres modos en los que puede interpretarse el funcionamiento del símbolo para la unidad:

a)

En el caso a), el símbolo *e* es un nombre propio del segmento unidad. El álgebra es un álgebra de segmentos. Los cambios en el segmento unidad son cambios que afectan a las expresiones en donde aparece tal segmento. Panza considera que Descartes toma esta primera posición[1306]. Para que una ecuación no se vea alterado por el cambio del segmento de unidad es necesario en este caso que la misma sea homogénea. Así, si tenemos dos símbolos e y e' para dos segmentos unidad, dos ecuaciónes no homogéneas no tendrán por que ser iguales cuando son homogeneizados por el segmento unidad:

$$\neg\square\ (hy^2 + eyc - e^2m = hy^2 + e'yc - e'^2m)$$

Mientras que una ecuación homogénea como

[1300] Cf. Hegel [1985] p. 309 “die Schwierigkeit […] durch die Hilfe des Unendlichen […] in Verworrenheit gesetzt […] wird”.

[1301] Recuérdese que era esta misma razón la que hacía que en el apartado 4.1.1. la serie no pudiese expresar sino aproximativamente el contenido de la expresión finita.

[1302] Decimos “dimensiones” porque, obviamente, no es lo mismo multiplicar tres veces 6 metros que multiplicar 3 metros por 6 metros. La primera multiplicación nos da 18 metros, la segunda 18 metros cuadrados.

[1303] Es decir, para multiplicar 6 metros por 6 metros multiplicamos por un lado los números –6·6=36– y por otro lado, basándonos en [4] afirmamos la igualdad: 1 metro·1 metro= 1 metro cuadrado.

[1304] Cf. Panza [2005] pp. 40-41.

[1305] Resumimos en lo que sigue la posición de Panza [2005] pp. 32-40. Lo que aquí pueda parecer claro, no es en el original sino confuso y enfarragoso.

[1306] La posición de Panza es más una apuesta que una tesis defendidad por él. Cf. Panza [2005] p. 33: “Il semble néanmoins que l’interprétation la plus proche de son point de vue et du langage qu’il utilise est cella qui fait de ces symboles des noms propres pour des segments”. No es desde lugo suficiente aducir, como hace Panza, que Descartes utiliza el verbo nombrar (*nommer*) cuando necesita asignar a un símbolo una recta. Efectivamente, las opciones b) y c) son tambíen casos en los que un símbolo nombra un segmento. Cf. también Panza [2005] p. 40: “Si l’on suppose que Descartes emploie les symboles qui indiquent des segments comme des noms propres pour ces segments [...]”.

$$y^2 ay + b^2 = 0$$

es inmúne al cambio del segmento unidad. Es por esta razón por la que Panza defiende que el hecho de que Descartes no considere más que las ecuaciones homogéneas en su *Geometria* sea una necesidad interna a la obra en cuestión. El que, sin embargo, sí aparezcan ecuaciones no homogéneas en el tercer libro se debe, según Panza, a que en estos casos la ecuación no describe ninguna curva y a que era una alteración tal lo que había que evitar[1307].

Dentro de esta alternativa tiene perfectamente sentido hablar de un cambio de segmento unidad. De este modo un cambio del segmento unidad *e* a e' afectará a las proporciones del álgebra. Sean *e*, e' y a los nombres propios de los segmentos siguientes:

___

______

____

Tenemos así que

$$\frac{a}{e} = \frac{4}{1} \neq \frac{a}{e'} = \frac{2}{1}$$

El cambio que tiene lugar es pues uno de cambio de escala[1308]. Del mismo modo, en la leyenda de un plano, el cambio en la unidad implica el cambio de escala de la figura representada. Del mismo modo que en el cambio de segmento de unidad, el cambio se puede comprender en dos direcciones. No hay todavía una dirección privilegiada de expresión del valor. Sea el siguiente un cambio de escala:

____ : 1 Km

____: 10 Km

Este cambio de escala es equivalente al siguiente:

____: 1 Km

___ : 1 Km

En el primero hay igualdad de segmento, en el segundo de magnitud métrica. En el primer caso el valor del segmento se expresa por medio de una magnitud métrica. En el segundo caso es el segmento el que expresa el valor de la magnitud métrica. La elección de

[1307] Cf. Panza [2005] p. 40 nota 98: “Mais, loin d’ être des équations qui expriment des courbes, les équations considérées dans ce livre sont prises ou bien comme étant, en tant que telles, des objects *algébriques* (ou même des objects de l’Algèbre numérique), ou bien comme étant des schémas d’équations qui expriment des courbes”.

[1308] Cambio de escala que, para nuestro asombro, Panza considera que tiene lugar en los casos b) y c). Cf. Panza [2005] p. 39: “alors le changement du segment unité qui s’indentifie de ce fait à l’unité de mesure, ne produit aucun changement dans la courbe autre qu’un changement d’échelle dans sa figure”.

uno u otro medio de expresión no es decidible desde dentro del marco de traducción. Únicamente el hecho de que normalmente con un plano lo que se suele pretender es ver representada la "realidad" en vez de que en la "realidad" se vea representado el plano es lo que hace que en las ediciones de los planos se suela optar por el primer modo de expresión de cambios de escala frente al segundo[1309].

b)

el símbolo *e* es un nombre propio de un número que proporciona la medida numérica del segmento unidad[1310]. El álgebra es un álgebra numérico. Un cambio del segmento de unidad, digamos de e a e' no involucra un cambio en el resto de las expresiones del álgebra. De hecho, podríamos decir que ni siquiera tiene sentido hablar de cambio de e a e'; los dos son numéricamente iguales, los dos son uno[1311]. El símbolo para el segmento unidad no nombra propiamente algo que esté fuera del álgebra y por ello es inmune a los cambios del segmento. Sólo cuando se tenga que pasar de hacer cálculo de las cosas en tanto que cosas a hacer cuentas con estas o aqullea cosas, se hará uso de algún deíctico para llenar el vacio en el que hasta entonces consistió el símbolo *e*. Remitiéndonos al lenguaje kripkeano, *e* no ha sido todavía utilizado en ningún bautizo y sin embargo nombra, es decir, tiene referencia. El sentido (*Sinn*) que se utiliza para ello es la proporción. Supongamos que tenemos los cuatro siguientes segmentos de 3, 6, 9 y 12 carácteres respectivamente:

e ___

a ______

e' _________

a' ____________

En este caso b) la distinción entre los dos segmentos e y e' es algo inexistente. Pasar de un sistema en donde intervienen los segmentos e y a a otro donde intervienen los segmentos

[1309] Estamos pues en lo que Marx (en Marx [1969] p. 77) llamaba "Totale oder entfaltete Wertform", en este caso, de las longitudes. Del mismo modo a lo que ocurría en el ejemplo del plano, siendo equivalente expresar el cambio de valor de una mercancia A con respecto a otra B, expresando el valor de A en términos de B (A=cB) como expresando el valor de B en términos de A (B=A/c), es la mercancia más habitual en el trato de cada uno la que se elegirá preferiblemente como el medio de expresión de las demás. El hecho de que esa mercancia sea hoy por lo general el dinero, hace que se suela expesar el encarecimiento de una mercancia A diciendo, p. e. que "A antes costaba 100 unidades de dinero y ahora 250" y no, "con 100 unidades de dinero tenía antes un A y ahora tengo 0,4 A-s". Es precisamente esta última forma a lo que se recurre cuando se quiere recordar el hecho de que es el papel o moneda lo que, para el caso, ha terminado perdiendo valor: "antes con 100 compraba tanto y ahora ni siquiera la mitad de ello". Y es que, de lo contrario, uno acabaría como aquél al que al preguntarle sobre cómo le afectaban las constantes subidas del precio de la gasolina respondia "no a mi nada, si yo siempre le hecho lo mismo; 3000 pesetas".

[1310] Cf. Panza [2005] p. 32: "un segment peut être exprimé par un symbole litterál qui foncionne [...] comme un nom prope pour un nombre qui fournit la mesura numérique de ce segment". Cf. también Panza [2005] p. 125: "ces symboles peuvent exprimer des segments de manière indirecte, en exprimant directament leurs mesures numériques".

[1311] Ibid. p. 125: "Il faut alors supposer que le segment unité coïncide toujours avec l'unité de mesure des segments".

e' y a' no es en realidad cambiar a ningún sistema. Si tenemos que en el primer juego de sistemas del ejemplo la proporción entre *a* y *e* es[1312]

$$\frac{a}{e} = \frac{P_a}{Q_a} = \frac{2}{1}$$

El mismo segmento *a* expresado con la nueva unidad e', no es ya *a* sino que a'. Lo que hace a una cosa igual a si misma, lo que identifica a una cosa es su relación, su proporción que tiene una cosa con las demás. Por eso se decía antes que el sentido de la referencia de un segmento, la vía de aceso del símbolo para llegar a la referencia, al segmento, es la proporción. La condición para que bajo *a* se tenga siempre la misma referencia es que se cumpla

$$\frac{a}{e'} = \frac{2}{1}$$

Lo que implica que, bajo el nuevo segmento unidad, lo que antes era *a* es ahora a':

$$\frac{a'}{e'} = \frac{2}{1}$$

Es decir, para decirlo con Frege, la igualdad $a = a'$ no es una igualdad de la referencia sino del sentido. Es más, podríamos decir que ni siquiera tiene sentido hablar de referencia en este caso b). Sólo visto desde fuera del juego de relaciones, solo visto desde un segmento *deíctizado*, tiene sentido hablar del cambio de unidades así como de las igualdades como la $a = a'$. Esta última igualdad no es ningúna igualdad, no es ninguna expresión con sentido dentro del mundo de las similitudes del caso b). Efectivamente, le falta la distinción, lo no igual, la referencia, que hace de una expresión de igualdad una expresión con sentido.

La distinción entre las modalidades a) y b) de designación de segmentos es facilitada si recurrimos a las nociones habituales en la filosofía del lenguaje. Con ello, podemos expresar el caso a) diciendo que el nombre *a* es un designador rígido del segmento en cuestión. Los nombres funcionan en este sentido como los deícticos o, en el caso de que se acepte la teoría kripkeana, los nombres propios[1313]. Los designadores rígidos designan lo mismo en todo mundo posible. Un ejemplo ilustre de ello que es además aclaratorio de lo que se entiende por nombrar en la alternativa a) es el del metro de Paris encerrado en alguna vitrina del museo de pesos y medidas. El ejemplo en cuestión está, sin embargo, condicionado[1314] al olvido del sentido del metro: el que su valor sea una cierta proporción del diámetro de la Tierra.

[1312] Panza escribe en este punto $\frac{\alpha}{u} = \frac{p_a}{q_a}$, donde α es el nombre del segmento cuyo símbolo es *a*: “le symbole «*a*» indiquerait alors un segment, disons α (le symbole «α» fonctionnant naturellement ici comme le nom propre de ce segment” (en Panza [2005] p. 33 nota 83). Volveremos sobre este punto.

[1313] Como se sabe, estos últimos se reducen, entre otras, a los deícticos. Ello se debe a que su identificación hace uso de los mismos. Cf. al respecto Tugendhat y Wolf [1983] p. 165.

[1314] Condicionado si es que, a su vez, entendemos que el nombre propio “Tierra” no es, a su vez, un designador rígido.

Del mismo modo, si recurrimos a las nociones de Sentido (*Sinn*) y Referencia (*Bedeutung*) de Frege se vuelve más comprensible el caso b) que acabámos de describir. En este caso, los nombres de segmentos hacen referencia a un segmento u a otro mediante la proporción. El modo de dársenos el segmento, el sentido pues del nombre, es la proporción. Sin embargo, tal y como ya hemos dicho, no hay en este caso una referencia dada antes de la proporción[1315]. Es el sentido mismo el que, por así decirlo, hace la referencia. En este sentido el fenómeno es análogo a las oraciones en estílo indirecto analizadas por Frege. En las mismas, no era la igualdad en la referencia de la oración subordinada lo que hacía conservar la referencia de la oración principal, sino que era el sentido de la subordinada lo que había que mantener para conservar la referencia de la oración principal. De hecho, el valor de verdad de la oración secundaria era perfectamente irrelevante en el análisis fregeano.

Para que el plano de la referencia tenga sentido y así podamos dar cuenta de la importancia de las igualdades entre las proporciones entre lo que Leibniz llamába figura similares, tenemos que conservar un resto del momento de la referencia del caso a). Solo así podremos dar cuenta de las expresiones en los que se afirma la igualdad –similitud– entre, por ejemplo, dos triángulos. En caso contrario solamente podríamos afirmar que son el mismo triángulo. Las afirmaciones sobre la indiscernibilidad de dos figuras que son consideradas por sí mismas necesita así el que se pueda salir fuera de las mismas para poder afirmar algo más que la pura igualdad consigo misma, es decir, para poder afimar la afinidad entre las mismas[1316].

c) El siguiente paso será pues hacer desaparecer la referencia del lenguaje del álgebra. La referencia del nombre es el sentido mismo, es decir, la proporción. Un nombre de segmento designa la razón en la que este segmento se encuentra con el segmento unidad. Pero el mismo nombre puede designar otra cosa que se encuentre en la misma proporción con una tercera cosa. Lo que en b) era todavía la referencia se pierde aquí como tal. Como en las oraciones que aparecen en estilo directo, la referencia es el sentido mismo y el álgebra un álgebra de las magnitudes en cuanto que magnitudes.

6.2.5. En busca de una razón con cocientes variables: la cuadratura del circulo.

Un paso decisivo en la búsqueda de un algoritmo de integración la dará Newton en su primera aproximación a la cuadratura de los segmentos del círculo[1317]. En él nos encontramos, por primera vez, con dos elementos que reflejan el desmarque de Newton con respecto al método de cuadraturas de Wallis:

1) Newton habla ya explícitamente de buscar el contenido de una superficie. A diferencia de Wallis, no se trata de buscar la propoción fija entre un área a cuadrar y su paralelogramo circunscrito, sino de buscar el contenido de un área.

[1315] Es decir, no hay aquí algo así como un planeta que aparece como dos; uno que lo hace de noche, el otro que lo hace por la mañana. No hay aquí un algo que se de con dos sentidos distintos. De ahí que no aceptemos que Panza afirme que el símbolo «α» sea el nombre propio del segmento también cuando nos encontramos en el caso b). Cuando en el caso a) se habla de nombrar, nos referimos a un nombrar que se da por medio de deícticos. En este sentido afirmábamos que los nombres de los segmentos funcionaban como designadores rígidos.

[1316] Sobre la definición de similitud remitimos al lector al apartado 3.2.5.

[1317] Cf. Newton [1967] pp. 104-110. Para una exégesis del mismo véase Panza [2005] pp. 154-163.

2) El contenido de tal área es puesta en relación con una variable independiente con cuya variación cambia la superficie a cuadrar: "Là où Wallis cherchait un rapport constant, Newton cherche ainsi deux mesures variables"[1318]. Encontrar una ley de variación en función de uno de los ejes ortogonales como variable independiente será lo que acerque esta aproximación de Newton a la moderna noción de integral.

Estos dos aspectos son los que se expresan en la formulación del problema que Newton se propone resolver:

Having the signe[1319] *of any angle to find the angle or to find the content of any segment of a circle*[1320]

El seno trigonometrico es nuestra variable independiente x igual a AP[1321]. Uno de sus posibles valores será AQ=ξ. EL radio del círculo es 1. Si nombramos PM la ordenada, la ecuación del círculo será:

$$y = \sqrt{r - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

El segmento a buscar es BN_1QA que, como hemos dicho, varía con el valor que en cada caso toma la variable independiente x. Para ello, Newton supone que las curvas que tienen las ordenadas QN_4, QN_3, QN_2, QN_1, QN_0, QN_{-1}, QN_{-2}, QN_{-3},... son continuamente proporcionales. De modo que de

$$QN_1 = \sqrt{1 - x^2}$$

se obtienen las restantes

$$QN_2 = 1 - x^2$$

$$QN_3 = (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}$$

$$QN_4 = (1 - x^2)^2$$

....

$$QN_0 = 1$$

$$QN_{-1} = (1 - x^2)^{-1/2}$$

[1318] Cf. Panza [2005] p. 154.

[1319] Es decir, el seno trigonométrico.

[1320] Cf. Newton [1967] p. 104.

[1321] Siguiendo a Panza, distinguiremos entre la variable independiente x y uno de sus posibles valores ξ. Aunque tal distinción no sea de Newton, nos ayudará a introducir notaciones más modernas en la exposición. Por poner un ejemplo, con esta notación tenemos que $\int_0^{\xi} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^{\xi} = \frac{\xi^2}{2}$.

$$QN_{-2} = 1/_{1-x^2}$$

y en general,

$$y = QN_v = (1-x^2)^{\frac{v}{2}} \quad \text{para } v = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$$

Haciendo un uso implícito del algoritmo[1322]

$$C_\eta^\xi\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}\left[\xi^{i+1} - \eta^{i+1}\right]$$

Newton calcula las cuadraturas de las curvas para valores pares positivos *v*

$$C_0^\xi(QN_0) = C_0^\xi 1 = \xi$$

$$C_0^\xi(QN_2) = C_0^\xi(1-x^2) = \xi - \frac{\xi^3}{3}$$

$$C_0^\xi(QN_4) = C_0^\xi(1-x^2)^2 = \xi - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{5}\xi^5$$

....

algo que Newton recoge en la tabla siguiente

1322 Evidentemente la notación no es de Newton. *C* equivale a nuestra integral definida. Lo tomamos con algunas variaciones de Panza [2005] p. 149. Como se sabe, este algoritmo era conocido ya por Roberval, Fermat y Pascal para valores enteros de *i*.

(7)

1^{st}	$+x\times 1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2^{d}	$-\frac{x^3}{3}\times 0$	$0+1=1$	$1+1=2$	$2+1=3$	$3+1=4$	$4+1=5$	6	7	8	9	10
3^{d}	$+\frac{x^5}{5}\times 0$	$0+0=0$	$0+1=1$	$1+2=3$	$3+3=6$	$6+4=10$	15	21	28	36	45
4^{th}	$-\frac{x^7}{7}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+1=1$	$1+3=4$	$4+6=10$	20	35	56	84	120
5	$+\frac{x^9}{9}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+1=1$	$1+4=5$	15	35	70	126	210
6	$-\frac{x^{11}}{11}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+1=1$	6	21	56	126	252
7	$+\frac{x^{13}}{13}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	1	7	28	84	210
8	$-\frac{x^{15}}{15}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	0	1	8	36	120
9	$+\frac{x^{17}}{17}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	0	0	1	9	45
10	$-\frac{x^{19}}{19}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	0	0	0	1	10
11	$+\frac{x^{21}}{21}\times 0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	0	0	0	0	1
	1^{st} *	2^{d} *	3^{d} *	4^{th} *	5^{t} *	6^{t} *	7^{th} *	8^{th} *	9^{th} *	10^{th} *	11^{th}

que no es otra cosa que el triángulo aritmético de Pascal[1323] donde la regla de construcción para el elemento $G_{[i,j]}$ de la columna *j* y fila *i*, es

$$G_{[i,j]} = G_{[i,j-1]} - G_{[i-1,j-1]}$$

Los coeficientes de las ecuaciones de la cuadraturas para *v*=0, 2, 4,... son así los elementos de las columnas 1, 2, 3,... respectivamente. Las columnas nombradas por Newton por un asterisco (*) son las que deben de expresar los coeficientes de la cuadraturas para *v*=1,3,5,.. De este modo, la interpolación para el valor *v*=1 proporciona la buscada cuadratura del círculo. El problema está en descubrir la regla que lleva a Newton a la tal interpolación.

Si nos atenemos a la explicación que sobre la interpolación nos ofrece él mismo en una carta[1324] fechada el 24 Octubre de 1676, Newton habría empezado por interpolar la segunda fila de la tabla (7) resolviendo la media aritmética de la serie artimética a interpolar:

1323 O, para ser mas exactos, su variación no simétrica de la misma dada por Montmort. Cf Edwards [1987] p. X.

1324 Cf. Newton [1960] p. 130. El texto original en latín se encuentra en la p. 111: “ad has interpolandas notabam quod in omnibus primus terminus esset *x*, quodque secundi termini $\frac{0}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3$ &c essent in Arithmetica progressione, et proinde quod duo primi termini serierum intercalandarum deberent esse *e* $x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right),\ x-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^3\right), x-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3\right)$ &c”.

I noted that in all of them the first term was x and that the second terms $\frac{0}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3$*, etc., were in arithmetical progerssion, and hence that the first two terms of the series to be intercalated ought to be* $x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right),\ x - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^3\right), x - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3\right)$*, etc.*

Para los siguientes términos para la columna encargada de expresar los coeficientes de la cuadratura del círculo Newton recurre al algoritmo siguiente:

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{m-i}{i+1}$$

con el que obtiene el coeficiente para la fila n+1 de la columna cuya primera fila tiene el valor *m*. De este modo, la expresión para la cuadratura del círculo[1325] es el polinómio infinito;

$$C_0^{\xi}(QN_1) = C_0^{\xi}(\sqrt{1-x^2}) = \xi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}\xi^5 - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{7}\xi^7 - \frac{5}{128}\cdot\frac{1}{9}\xi^9 + etc.$$

es decir,

$$C_0^{\xi}(QN_1) = \xi - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2j+1}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1/2 - i}{i+1}\right)\xi^{2j+1}$$

y en general,

$$C_0^{\xi}(QN_v) = \xi - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2j+1}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{v/2 - i}{i+1}\right)\xi^{2j+1}$$

para cualesquiera *v* impar. Newton calcula así fácilmente la superficie del segmento del círculo BN_1A

[1325] Cf. Newton [1967] p. 108.

$$C_0^{\xi}(BN_1A) = C_0^{\xi}(QN_1) - C_0^{\xi}(AN_1Q) = \xi - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2j+1}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{{}^{\nu}\!/_{2} - i}{i+1}\right)\xi^{2j+1}\ \frac{\xi}{2}\sqrt{1-\xi^2}$$

De modo que ya puede escribir la expresión para el ángulo $\prec BAN_1$:

$$\frac{C_0^1(QN_1)}{\prec BAE} = \frac{BN_1EA}{\prec BAE} = \frac{C_0^{\xi}(BN_1A)}{\prec BN_1A}$$

Que es la expresión que se proponía buscar Newton.Ya hemos adelantado al comienzo del parágrafo que la novedad de esta expresión consiste en que, frente a las proporciones que maneja Wallis, los cocientes de esta expresión son funciones cuyo valor depende del valor ξ de la variable *x*. Vemos así que mientras que Wallis busca la proporción entre dos valores constantes, Newton se centrará en hayar expresiones para proporciones entre valores variables. Es más, del mismo modo en que el numerador y el denominador del cociente de diferenciales dependen de una misma variable *h*[1326], la misma variable *x* estará en la base de las proporciones buscadas por Newton. En la cuadratura de la hipérbole Newton llegará también a una expresión análoga en la que tanto el numerador como el denominador son funciones variables de una misma varible[1327].

6.3. HACIA EL CÁLCULO DE FLUXIONES: LOS MANUSCRITOS DE NEWTON ENTRE 1664-1666

En un escrito del otoño del año 1664, Newton hace uso por primera vez[1328] de la expresión *o* para designar lo que podría denominarse el incremento de una variable en una magnitud menor que cualquier otra magnitud[1329]. El fin es el de obtener la expresión para la subnormal apoyándose para ello en el método para la búsqueda de la normal propuesto en la *Geometria*[1330] de Descartes. A diferencia de la aproximación estática de éste, Newton ofrece una aproximación más dinámica del problema[1331]. Ello se debe a que Newton, a diferencia de Descartes, hace uso de la expresión infinitesimal *o* en su solución del problema. Mientras que para Descartes la exposición del problema se divide entre el caso en el que no hay todavía la

---

1326 Pensamos en la definición habitual $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$.

1327 No vamos a poder entrar en este punto más detalladamente. Véase sobre este tema Newton [1967] pp. 112-115 y Panza [2005] pp. 166-170.

1328 Si descontamos una aparición previa en la que, sin embargo, *o* no es el incremento de una variable sino una magnitud “infinitesimal” por si misma. Cf. Newton [1967] p. 557.

1329 Obviamente, esta definición no es de Newton. Es más, Newton no ofrece ninguna definición para la expresión *o*. Si hemos optado por ofrecer la definición que ofrecemos ha sido debido a que; 1) consideramos ajustada tal significado al empleo que tiene en Newton el término *o*, 2) pone en relación los comienzos del cálculo infinitisimales con el carácter contradictorio denunciado por Hegel en una *entidad* tal , y 3) esta contradicción hace necesaria su superación en el cociente de diferenciales.

1330 Cf. Descartes [1637] p. 347.

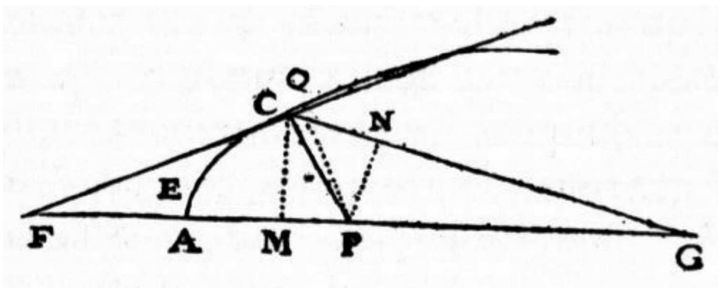
1331 El posible abuso del uso no presisamente riguroso de las expresiones “estático” y “dinámico” de estas líneas se compensará en los siguientes apartados.

solución y ya la hay, en Newton estas dos opciones se fusionan en una única expresión haciendo uso de la variable *o*. Para ver esto último, vamos ha dedicar el siguiente apartado a la solución dada en la *Geometría* al problema de búsqueda de la normal.

6.3.1 El Método de los coeficientes indeterminados de Descartes

Haciendo algo que es característico del método analítico, el método para la la solución del problema de la normal de Descartes empieza con la suposición de que el problema está ya resuelto:

Je suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est CP [1332]



El problema estará ahora en definir algebráicamente las condiciones que hacen de la solución abstracta una solución concreta del problema. Para ello, Descartes procede en dos etapas.

1) Si tenemos en cuenta que la normal *CP* es la hipoténusa del triángulo con los catétos iguales a la subnormal *MP* y a la ordenada *MC*, podemos obtener una expresión algebráica de la misma:

$CP^2=MP^2+MC^2$

y si hacemos uso de las notaciones

$MA= y$

$CM=x$

$CP= s$

$PA= v$

[1332] Cf. Descartes [1637] p. 342.

$PM= v\text{-}y$

ofrecidas en la *Geometria*, obtenemos la equación

$CP^2=s^2=x^2+(v\text{-}y)^2= x^2+v^2+y^2\text{-}2vy$

es decir,

$$x^2=s^2\text{-}v^2\text{-}y^2+2vy \qquad [8]$$

Esta expresión es la que expresa cualesquiera círculo con centro en P. El objetivo de esta primera etapa es la de hacer que este círculo no sea uno cualquiera sino que uno que corte la curva en, al menos, un punto. Para ello no hay mas que igualar la expresión de la curva con la de la normal. Supongamos[1333] que la ecuación para la curva expresa una ellipse con *latus rectus r* y *latus transversum p*:

$$x^2=ry\text{-}\frac{r}{q}y^2 \qquad [9]$$

De modo que la condición de que el círculo corte la elipse se obtienen igualando las expresiones [8[y [9][1334]:

$$s^2\text{-}v^2+2vy\text{-}y^2=ry\text{-}\frac{r}{q}y^2$$

es decir,

$$y^2+\frac{qry-2qvy+qv^2-qs^2}{q-r}=0 \qquad [10]$$

2) En la segunda etapa añade una restricción más a la ya obtenida en la primera etapa: el círculo no debe solamente cortar la curva sino que debe únicamente tocarla. Con esta última condición, Descartes consigue que el segmento *s* que se obtenga exprese la normal. Para ello, Descartes descarta los casos en los que la ecuación [10] tiene raíces distintas. Del mismo modo a la etapa precedente, la labor consiste pues en obtener una expresión algebraica para una condición que, en un primer momento, es geométrica: si la condición de que el círculo pase por la curva se expresa con la ecuación [10], la condición de que únicamente la toque exigirá que esta misma expresión tenga unicamente dos raíces iguales:

De plus il faut considerer, que losqu'il y a deux racines esgales en vne équation, elle a necessairement la mesme forme que si on multiplie, par soy mesme, la quantité qu'on y suppose estre inconnuë, moins la quantité connuë qui luy est esgale.[1335]

Si la cantidad desconocida y conocida son, respectivamente, *y* y *e*, Descartes afirma que la expresión

[1333] Utilizamos aqui el primer ejemplo que ofrece Descartes.
[1334] Cf. Descartes [1637] p. 343.
[1335] Cf. Descartes [1637] p. 347.

$(y\text{-}e)^n$ n = 1,2,...,N. [11]

Tiene la misma forma que la ecuación [10]. En nuestro caso, al ser la ecuación [10] de segundo grado, es suficiente que *n* sea igual a 2 en la ecuación [11]:

$(y\text{-}e)^2$

al ser *e*, por definición, la raíz igual de la ecuación [10], tenemos que

$(y\text{-}e)^2 = y^2\text{-}2ey+e^2 = 0$ [12]

Ahora bien, tal y como es afirmado por Descartes, esta nueva ecuación [12] tiene la misma forma[1336] que la anterior equación [10]. Esto es lo que permite a Descartes hacer uso en este punto de su método de coeficientes indeterminados: la igualación de los coeficientes de la variable del mismo grado. Por ejemplo, la igualdad entre los coeficientes de la variable de grado 2 nos lleva a la igualdad,

1=1

el de grado 1 a

$$\frac{qry-2qvy}{q-r}=-2ey \qquad [13]$$

y el de grado 0 a

$$e^2=\frac{qv^2-qs^2}{q-r} \qquad [14]$$

Si despejamos de [13] la expresión para *v* y lo introducimos en [14] podemos obtener la expresión para la normal *s*. Con ello el problema queda resuelto.

Cuando más arriba decíamos que el método para la normal de Descartes era algo estático nos referíamos al hecho de que en él, mediante los pasos 1) y 2), Descartes opta por eliminar todos los casos que no cumplan con las condiciones que se hayan delimitado por medios geométricos, a saber, las condiciones que definen el caso del radio del círculo que únicamente toca la curva.

6.3.2 La lectura de Newton del método de normales de Descartes

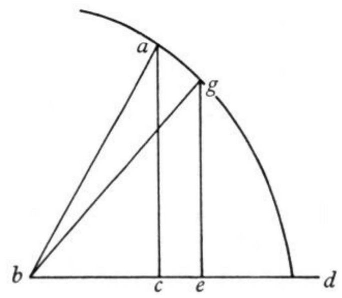
Newton va a reformular por completo el método de normales de Descartes en sus anotaciones de juventud. Si bien es verdad que la prueba no es del todo impecable, resulta

[1336] Parece que esta afirmación de Descartes es equivalente a la afirmación de que toda curva y, por lo tanto, todo punto de la curva, de la *Geometria* es no mecánica o, como diría Leibniz, es no transcendental. Es decir, la forma de las expresiones algebráicas de la *Geometría* no incluye las ecuaciónes en las que en el exponente consten variables.

innegable que sus presupuestos son algo que podríamos caracterizar como más modernos que los de Descartes. Veremos en la exposición de esta prueba a qué nos referíamos cuando más arriba hablábamos de “método dinámico” de Newton.

Lo dinámico de la prueba no consiste en otra cosa que en igualar en una ecuación dos segmentos que son distintos y no iguales[1337]. Para poner esto en relación con Descartes y su prueba “estática”, diremos que mientras que Descartes descartaba en el paso 2) los casos que no eran, ni por muy por poco que lo fuesen, el caso que había que buscar, Newton considera o formula a la vez dos casos: el que se pretende buscar y su, digamos, vecino más próximo. Debido a que la normal tiene la propiedad de ser el segmento más corto trazado desde el punto *b* a la curva, la condición que recoge estos dos casos debe, por consiguiente, expresar la igualdad entre estos dos segmentos vecinos:

$ba = bg$ [15]



Con esta igualdad, Newton expresa la condición de que la tangente únicamente toca a la curva sin llegar a cortarla. Los segmentos *bg* y *ba*, al ser iguales, son el radio de un círculo con centro en *b*. Hasta este punto Newton no hace más que seguir a Descartes. La diferencia está en que Newton formula la expresión de un segmento próximo al buscado que, al mismo tiempo, sería parte del círculo y parte de la curva. Obviamente, el único medio que se tiene para formular una aproximación tal a la normal son los elementos “infinitesimales” *o*.

Este método es análogo a nuestro proceder habitual cuando pretendemos encontrar el mínimo de una función. El que para ello igualemos la primera derivada a 0, significa que la curva permanece constante en la proximidad de ese punto. Es más, la analogía es del todo evidente si la hacemos con el Principio de velocidades virtuales. Como veremos en el capítulo 7, en estado de equilibrio, la variación del estado de un sistema, δ*bg*, no se ve alterada por perturbaciones infinitesimales de sus variables independientes:

$\delta bg = 0$[1338]

[1337] Otro ejemplo, esta vez dentro de la problemática de la búsqueda del centro de la curvatura, en donde se igualan dos puntos con expresiones distintas es la que ofrece Newton [1967] en la p. 245 y sig.
[1338] Nótese que esta expresión es análoga a la expresión [15].

Pero Veamos cómo resuelve Newton su aproximación. Empecémos por introducir las siguientes igualdades presentes[1339] en Newton:

$bc=v$

$cd=y$

$ac=x$

$ab=s$

Newton propone como ejemplo la curva de una hipérbole con la siguiente ecuación:

$$y^2 = xy+ay+ax+x^2$$

Newton escribe a continuación la igualdad siguiente:

$$v^2+yx+ax+ay+x^2=s^2=v^2-2ov+yx+yo+ay+ax+ao+x^2+2oy$$

Esta última ecuación no es sino la expresión de la igualdad [15]. Efectivamente, sabemos por el teorema da pitágoras que el término de la izquierda es

$$ba = \mathrm{s} = v^2+y^2 = v^2+ xy+ay+ax+x^2$$

Para obtener la expresión de *bg*, Newton supone que la variable x pasa de x a $x+o$, del mismo modo en que la variable v pasa de v a v-o:

$$bg = (v+o)^2+(x+o)y+ay+a(x+o)+(x+o)^2$$

Gráficamente, el ejemplo que está considerando Newton no es el del dibujo, sino que correspondería a un gráfico en el que el segmento *bg* se situase a la izquierda del segmento *ba*. Como se ve, Newton no introduce en un primer momento el incremento de la ordenada y. Esto lo hará en la aproximación posterior en donde las variables x e y pasan a tener los valores z y r respectivamente. En esta ocasión, la variable v pasa a tener el valor $v+o$, por lo que podemos afirmar que $z=x+o$. Una vez visto el caso anterior, su detallada exposición no tiene el mayor interes para nosotros[1340]. Como era ya habitual, Newton elimina los

[1339] Los cambios que, sin embargo, introducimos se deben a que el original está errado o no nos es del todo habitual. Lo primero ocurre cuando Newton escribe $bd=v$, lo segundo cuando utiliza la expresión x para referirse a la ordenada.

[1340] Tampoco nos detendremos en la esposición de los intentos de corrección del error que es esencial a éste planteamiento. Nos referimos a que las ecuaciones que utiliza Newton para dar con la expresión de la normal infinitesimales de orden superior a dos sin dar una razón para ello. Las anotaciones de Newton son en este ejemplo algo austeras. Habrá que esperar unos meses[1341] para encontrarse con una observación en la que Newton defienda expresamente tal eliminación. El texto[1342] dice lo siguiente:

Observation 1st. Hence it appears that in such like operations those termes may be ever blotted out in wich (o=bc) is of more than one dimension.

Más adelante[1343], en vez de refugiarse en los resultados del cálculo, Newton intentará defender la eliminación de los infintesimales en general basándose en que son nada en comparación con una magnitud finita:

...but these two termes ro, $\frac{vvo}{yy}$ *are infinitely little, that is if compared to finite termes they vanish*

La justificación de la eliminación de los infintesimales de orden superior en relación con los de orden inferior, así como de los infinitesimales en general en relación a las magnitudes finitas no por habitual va a resultar ser un argumento impecable. Los problemas que denuncia Hegel en esta clase de argumentos han sido ya suficientemente analizados en los capítulos 3 y 4 de este trabajo.

En última instancia, Newton recoje en su aproximación la definición de la normal como la recta más corta entre un punto interno a la curva y esta curva dada por Apolonio[1344] así como el método de máximos y mínimos de Fermat según el cual el máximo o mínimo se expresa por dos valores que difieren entre sí por un infinitesimal e [1345].

Otro ejemplo prematuro[1346] en donde Newton recurre a los infinitesimales, es el de la búsqueda del centro de curvatura. Sin que podamos entrar en detalle en la formulación, vamos a hacer incapié en el carácter paradójico introducido por una doble necesidad:

1) El derivado del hecho de que se ha optado por hayar el punto denominado centro de la curvatura por la intersección de dos rectas normales a esta curva. Llamémos y^a e y^b a las ordenadas de la curva desde donde salen los dos puntos.
2) El que se deriva de la definición[1347] del centro de curvatura según el cual la recta normal que sale del centro debe de ser un mínimo y por lo tanto los dos puntos deben ser, en realidad, uno.

---

recurren al mismo tiempo a las dos variables. De este modo, en la ecuación de la curva Newton no comienza por despejar una de las variables y expresarla en términos de la otra. Este paso es el que da Newton en los cálculos que vienen a continuación en el manuscrito.

[1341] En concreto, el manuscrito al que ahora nos referimos lleva la fecha de 20 de Mayo de 1665.

[1342] Cf. Newton [1967] p. 173.

[1343] Seguimos en el manuscrito del 20 de Mayo aunque esta vez en la página 279.

[1344] Cf. Apollinius [1990] libro V proposiciones 27 a 30 pp. 88 a 93.

[1345] Cf. sobre este punto Panza [2005] p. 115 y sig.

[1346] El texto que ahora vamos a comentar está datado por Whiteside en el otoño de 1664.

[1347] Cf. Apollonius [1990] V52 p. 158. Apollonius no utiliza sin embargo el término "centro de curvatura" para referirse a la recta ZB de magnitud mínima de la figura 5.52 de la página 722. Recta que nosotros sí denominamos centro de curvatura. Cf. también al respecto las páginas xlix y liii del sumario.

Las contradictorias pero, para la búsqueda del centro de curvatura, necesarias exigencias resumidas en estos dos puntos son superadas por Newton en una expresión que, como ya hemos adelantado, recurre a los infinitesimales. Esta expresión no afirmará otra cosa que la diferencia de las coordenadas de dos puntos es una diferencia infinitesimal; un algo que no es nada. Newton escribe[1348] por consiguiente una expresión como la siguiente:

$$y^b - y^a = o$$

En cualquier caso, si en estas líneas hemos presentado un enfrentamiento entre las posturas "finitistas" de Descartes y las, digamos, "infinitistas" de Newton, ha sido con el único propósito de subrayar el contraste entre dos modos enfrentados de hacer anális. Más arriba se ha intentado expresear en qué consiste tal contraste. Lo que ahora debemos remarcar es el hecho de que Descartes no desconocía la aproximación infinitista al problema, por ejemplo, de la tangente[1349]. Así, en un carta del 3 de mayo del 1638, dirá que la posición infinitista es lo mismo que lo que presenta él en la p. 347 de su *Geometria*, pero que no es exatamente lo mismo. Si resulta que hay que subrayar que son el mismo debe de ser porque se estaba temiendo que ya no lo eran.

6.3.3 El triángulo diferencial

Un avance fundamental en el camino a la obtención de la expresión del cociente de diferenciales es el que marca el paso[1350] que consiste en fundamentar las operaciones del

---

[1348] Para conservar la coherencia interna en nuestro texto, reformulamos la expresión de Newton y llamámos *o* a lo que Newton llama *hi* o *gd*.

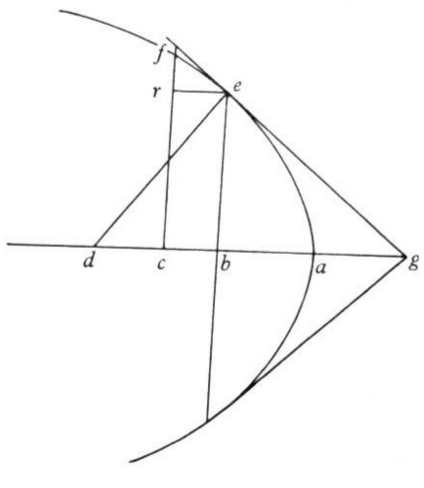
[1349] Cf. para el caso la carta de Descartes a Mersenne del 3 de mayo en Descartes [1975] pp. 122 y sig, donde Descartes somete a crítica el método de máximos y mínimos de Fermat. Más interesante en este sentido es la carta del Junio del 1638 enviada a Hardy, recogida en Descartes [1975] pp. 170-173. En él Descartes presenta dos casos posibles en los que una recta que sale de un punto dado E de la prolongación del eje puede cortar una parábola: 1) en el primer caso la recta EBD corta en los puntos B y D la parábola, la distancia entre las cordenadas C y F para los puntos B y D es igual a *e*. Debido a que las variables desconocidas son dos, *e* y el valor de la ordenada EC, Descartes necesita una segunda ecuación aparte de la que proporciona la ecuación de la curva. Esta segunda ecuación es la proporción entre la ordenada BC y BF que es dada por el problema. 2) el segundo caso es aquél en el que la recta toca unicamente la curva. La recta EBD se convierte en la recta EB que es igual a la recta ED. Este es el caso de la recta tangente. El aparente problema es que ahora no disponemos de la segunda ecuación que nos permita despejar las dos variables desconocidas *a* y *e*. No hay proporción entre BC y DF por que BD y DF son iguales. Lo que tampoco tenemos es, no obstante, el problema de antes. La variable desconocida *e* desaparece. No hay más que substituir por cero la expresión que hemos obtenido de la ecuación de la curva en el caso 1). Esto dos casos que se nos presentan absolutamente distintos por Descartes no son en realidad tan separables. En el segundo caso se ha tenido que empezar por suponer que *e* era alguna diferencia para luego afirmar que no era ninguna, que no era nada. No sería posible resolver el segundo caso si se empezara suponiendo que *e* es igual a cero. La aproximación más "dinamica" de Newton se hace nuevamente necesaria en este contexto. El recurso de Descartes de substituir por cero el valor de *e* en la ecuación a=a+e de la p. 172 parece más bien una huída que un intento de enfrentarse con el problema. La alternativa que acaso falla desde el principio y hace imposible un tratamiento fiel del problema es el de considerar el valor *e* como algo o como nada.

[1350] Sobre la polémica sobre la autoría de una tal herramienta véase la introducción de J.M. Child a Barrow [1916] p. 14: "the idea of the differential triangle [...] was altogether his [Barrow] own *original concept*; and to call it a mere improvement on Fermat's method, in that he uses two increments instead of one, is absurd. The discovery was the outcome ob Barrow's definition of a tangent".

cálculo sobre el triángulo de lados infinitesimales o incrementos infinitesimales[1351]. Con él desaparece la complicación que resultaba de que el teoréma de pitágoras ponía en juego variables elevadas al cuadrado. Lo mas importante, sin embargo, no son las facilidades que esto introduce en el cálculo.

El triángulo infinitesimal es el precedente inmediato o la representación privilegiada del cociente de diferenciales. La proporción entre sus dos catetos es la que hay entre los incrementos infinitesimales de la abcisa y la ordenada. La pendiente de la hipotenusa expresa la variación infinitesimal de la ordenada en relación a la variación infinitesimal de la abcisa. Newton recurre al triángulo infinitesimal por primera vez en un nota[1352] fechada el 20 de Mayo del año 1665.

A diferencia del método anterior, en éste no se construyen dos triángulos cuyas hipotenusas se igualen, sino que se recurre a dos triángulos similares siendo uno de ellos el que tiene los lados infinitesimales. El nuevo procedimiento adelanta ya el método de primeras y últimas razones de los *Principia* de Newton. En ámbos se recurre a dos triángulos característicos siendo uno de ellos el que en el límite tiende a desaparecer. El triángulo finito cumple la taréa de coservar, de registrar, la proporción del triángulo infinitesimal. Esta tarea es asegurada por el hecho de que, por construcción, en los dos métodos los dos triángulos tienen la propiedad de ser sucesivamente similares entre sí[1353]. La diferencia entre los dos consiste en que mientras que en la primera aproximación la similitud entre los triángulos es algo constante, en su método de primera y últimas razones Newton propone triángulos similares entre sí pero con una similitud variable en función al tamaño de los triángulos[1354].



En la figura de arriba, los dos triángulos en cuestión son el triángulo infinitesimal *fre* y el triángulo *deb* similar a el. La similitud garantiza la igualdad de la proporcióon entre los catétos:

[1351] De momento y hasta que llegue la ocasión en la que Newton defina lo que en su cálculo se entiede por la letra *o*, el término “infinitesimal” no es usado más que como sinónimo de “nociones” tales como el de “magnitud evanescente”, “magnitud menor que cualquier otra magnitud” y similares. Su uso no está pues pretendiéndo ser riguroso. Hemos visto ya en el capítulo 4 el carácter inconsistente de algunas de esta expresiones.
[1352] Cf. Newton [1967] p. 278.
[1353] Algo que hemos visto ya en el punto 4.2.3.3.
[1354] Véase sobre este punto el apartado 4.2.3.3.

$$\frac{be}{bd} = \frac{o}{z-y}$$

Donde *o* y *z-y* son los incrementos infintesimales de la abcisa y la ordenada respectivamente. Si nombramos *be* y *bd*, por *y* y *v* respectivamente, tenemos que:

$$z = y + \frac{vo}{y}$$

Fórmula que expesa el resultado del incremento de una variable como la suma entre la variable y un elemento infinitesimal. Su validez, nos dice más adelante Newton[1355], esta condicionado al carácter infinitesimal del triángulo característico. El cociente de diferenciales es todavía una herramienta geométrica[1356] más en Newton y no tiene la relevancia que adquirirá con el desarrolo del cálculo infinitesimal.

Newton no tardará[1357] en ofrecer expresiones para el incremento *w* del valor de la subtangente *v*. El procedimiento es análogo al utilizado para obtener la subtangente *v* con la única diferencia de que la ecuación de la que parte tiene como variable dependiente la variable *z*. En particular, Newton hace uso de uno de sus primeros algoritmos que le permiten pasar de una expresión para la función,

$$\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} a_{j,i}x^j y^i = 0 \qquad [16]$$

a otra que resulta de substituir *x* por *x+o* e *y* por *z*:

$$\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} a_{j,i}x^j z^i + \frac{o\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} ja_{j,i}x^j z^i}{x} = \sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} a_{j,i}x^j z^i + o\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} ja_{j,i}x^{j-1} z^i = 0$$

Lo que en el lenguaje de Newton se expresa[1358] diciendo lo siguiente:

[1355] Cf. Newton [1967] p. 282: "Then (if *hs* & *cd* have an infinitely little distance [,] otherwise not) $z = y + \frac{vo}{y}$ ". Donde hemos expresado a *hs* y *cd* por *fe* y *o* respectivamente.

[1356] Cf. Panza [2005] p. 232: "le rapport $\frac{z-y}{o}$ ne fait pas l'objet de ses réflexions; il n'est qu'un rapport géométrique parmi d'autres" y p. 231 : "pour le moment Newton n'assigne pas au rapport entre ces accroissements le rôle d'invariant fondamental".

[1357] Cf. por ejemplo Newton [1967] pp. 280 y 282.

[1358] Cf. Newton [1967] pp. 273 y 274.

Obeservacon 2^{d}. Hence I observe that if in the valor of y there be divers termes in wich x is then in the valor of z there are those same termes & also there those termes each of them multiplyed by so many units as x hath dimensions in that terme & againe multiplyed by o & divided by x.

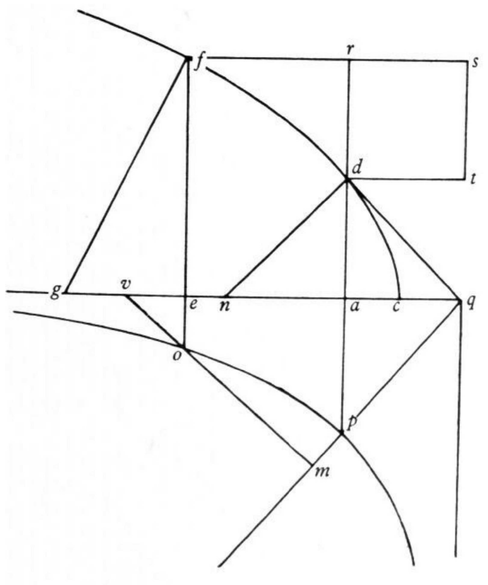
6.3.4 Cuadrando superficies con recurso a velocidades instantáneas

En este apartado vamos a detenernos en el análisis de un método de cuadratura de Newton en el que se puede apreciar el uso del movimiento en las operaciones de cuadratura. Hemos visto al respecto que, para Hegel, el imaginario físico que acompaña al planteamiento del problema en Newton no deja de ser una intromisión en la matemática de algo que le es ajeno y que la misma es síntoma de una emancipación por hacer en esta ciencia.

El ejemplo con el que vamos a ilustrar esta intromisión pertenece aproximativamente[1359] al mismo período que los problemas hasta ahora estudiados. La tarea consiste ahora en encontrar una proporción entre dos magnitudes infintesimales y dos valores, uno constante y otro variable. Dos observaciones son oportunas al respecto:

1) El que la proporción sea válida para valores cambiantes de las variables permite pasar de una igualdad entre proporciones a una entre superficies. La igualdad entre las proporciones es una igualdad entre proporciones variables, la ley es una ley de una variación.

2) El hecho de que uno de los valores sea una constante permite a Newton cuadrar la superficie en cuestión. Vemos así que cuadrar, el origen de integrar, no consiste en otra cosa que en obtener una superficie cuadrada que sea igual a la superfice curva que se proponía cuadrar.



[1359] Para ser exactos, Whiteside, basándose en conjeturas que se apoyan en la evolución de la caligrafía de Newton, fecha el manuscrito en los mediados del año 1665. Veremos que procedimientos análogos a éste que ahora estamos presentando se dan ya en Newton en el otoño de 1664.

La curva de la que parte Newton es una parábola expresada por la ecuación

$$y = \sqrt{rx}$$

su subnormal *v* es resultado de aplicar la ecuación

$$v = -y\frac{f_x}{f_y}$$

Esta algoritmo la viene usando Newton al menos desde septiembre del 1664[1360]. En nuestra parábola el resultado es una subnormal constante[1361],

$$v = -y\frac{f_x}{f_y} = -y\frac{\frac{r}{2\sqrt{rx}}}{-1} = \frac{1}{2}r$$

con lo que las subnormales *ge* y *na* toman el valor

na=ge= $\frac{1}{2}r$

Por otro lado, cuando ac=$\frac{1}{4}r$ tenemos que $y(ac)$=ad=$\frac{1}{2}r$. En resumen,

4*ac*=2*ad*=*r*=2*na*=2*ge*

[1360] Cf. Newton [1967] p. 236. Lo que Newton formula de la siguiente forma: “In finding *dc*=*v* observe this rule. Multiply each terme of the equation by so many units as *x* hath dimensions in the terme, divide it by *x* & multiply it by *y* for a Numerator. Againe multiply each terme of the equation by soe many units as *y* hath diemnsions in each terme & divide it by –*y* for a denominator in the value of *v*”, la expresaríamos nosotros en base a la ecuación [16] así: $v = -y\frac{\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} j \cdot a_{j,i} \cdot x^{j-1}y^i}{\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} i \cdot a_{j,i} \cdot x^j y^{i-1}}$.

[1361] Dado que la ecuación [16] tiene la forma $\sqrt{rx} - y = 0$.

Si nombramos $ce=x$ y $ef=y$, podemos definir una nueva curva *op* mediante la siguiente proporción,

$$\frac{ge}{ef}=\frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{rx}}=\frac{eo}{ap} \qquad [17]$$

Nombrando $eo=z$ y $ap=a$ tenemos que

$$\frac{1}{2}ra=z\sqrt{rx}$$

luego

$$\frac{1}{4}ra^2=z^2x \qquad [18]$$

Si descomponemos la variable x en una parte constante $\frac{1}{4}r$ y en una parte variable $u=ea$, tenemos

$$x=u+\frac{1}{4}r$$

y substituyéndolo en la ecuación [18] obtenemos la expresión para la curva *op* dependiente de las variables y y z:

$$\frac{ra^2}{4}=z^2u+\frac{1}{4}z^2r$$

Ahora bien, la expresión [17] no expresa, en nuestra notación, otra cosa que

$$\frac{z}{a}=\frac{dy}{dx}$$

es decir,

$$z \cdot dx = a \cdot dy \qquad [19]$$

Lo que se puede interpretar diciendo que los paralelogramos infinitesimales con los lados *z* y *dx* son iguales a los paralelogramos infinitesimales con los lados *a* y *dy*. Si tenemos en cuenta que el primer paralelogramo cambia con el valor de *z*, para mantener la igualdad, al ser *a* una constante, debemos aumentar en la misma proporción *dy*. Es decir,

suposeing eo [=z] moves uniformely form ap, & rs [=dt=ap] moves from dt with the motion decreasing in the same proportion that the line eo doth shorten.

De modo que obtenemos la igualdad

eoap=drst

que no es otra cosa que la cuadratura de la superficie *eoap*. En nuestra notación,

$$eoap = \int_{\frac{1}{4}r}^{x} zdx = \int_{\frac{1}{4}r}^{x} \left(a\frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{\frac{1}{2}r}^{y} ady = drst$$

El mismo resultado, tal vez más intuitivo, lo podríamos obtener si en la ecuación el lado derecho fuese constante con lo que la recta *eo* crecería en la misma proporción en la que disminuye su grosor *dx*. Newton optará por esta lecura en un manuscrito que se calcula que fue redactado en el otoño de 1664. Si hacemos las substituciones oportunas para que la formulación de este texto pueda enlazar con el ejemplo que analizamos, el texto de Newton diría[1362] así:

Now supposeing the line eo always moves over the same superficies in the same time, it will increase in motion[=ddx] from ap in the same proportion that it decreaseth in lenght [=dz] & the line dt will move uniformely from rs, soe that the space drst=eoap.

Cuando decimos que esta nueva lectura es más intuitiva queremos decir que en ella la uniformidad es transladada por completo al movimiento de la recta *dt*. Tanto su velocidad como su altura son constantes. En la primera lectura, por el contrario, su movimiento aumentaba en la misma proporción en la que aumentaba el valor de la recta *eo*. En ambos casos la justificación de la igualdad de las superficies se basa en que los dos paralelogramos infintesimales son iguales. Para que de ahí se pueda pasar a la afirmación de que las líneas *eo* y *dt* barren superficies iguales en tiempos iguales, se tiene que recurrir al movimiento de estas líneas. Esta igualdad se fundamenta en una de las dos lecturas propuestas para la ecuación

[1362] Cf. Newton [1967] pp. 228-229.

[19] y es, en principio, externa a la resolución del problema. Por último, para el paso desde esta igualdad a la igualdad entre las superficies, se requiere tener garantizada la ley de tal igualdad entre, por ejemplo, los límites *eo, ap, dt* y *rs*. El recurso para dar este paso de las líneas a las superficies es, como venía siendo habitual, el movimiento. En nuestro caso, en vez de ser un movimiento que exprese la proporción entre una recta recorrida y el respectivo tiempo, se tratará de un movimiento que expresa la proporción entre una superficie barrida y el respectivo tiempo. Bajo el supuesto de que el tiempo es una variable uniforme[1363], la ecuación [19] no expresa otra cosa que las superficies *drst* y *eoap* se terminarán de barrer al mismo tiempo. Es decir, si suponemos que las superficies *drst* y *eoap* son las bases de un cubo y un trapezoide con la misma altura y que sus volúmenes vacios son llenados en la proporción expresada por [19], su llenado se completará al mismo tiempo. Las dos superficies son así las expresiones de este mismo tiempo, es decir, el transcurso uniforme del tiempo así como la simultaneidad en la que se completa el llenado son los que garantizan la igualdad de las superficies.

6.3.5 El tiempo como variable independiente: Las *Lectiones* de Barrow

Antes de entrar a ver cómo comienza Newton a introducir el movimiento como recurso desde el que explicar lo que es una variable, vamos a tener que hacer un alto en el camino y dedicar al menos un apartado a las *Lectiones Geometricae* de Isaac Barrow. Estas lecciones fueron leídas por Barrow en el año 1664 en Cambridge. Aunque no se puede afirmar a ciencia cierta, es muy probable[1364] que Newton asistiese a las lecciones de Geometría de Barrow.

Es en la tercera lección donde Barrow recurre al movimiento para concebir la producción (*effectus*) de una magnitud. El objetivo es producir líneas curvas y rectas, sea esta producción resultado de la intersección de dos líneas rectas sea ésta resultado del rastro trazado por un punto que se mueve a lo largo de una recta que se encuentra en movimiento. En el primer caso hay un concurso (*concursus*) de movimientos, en el segundo lo que hay es una composición (*compositiō)* de movimientos. La diferencia entre las dos se hace relevante, por ejemplo, a la hora de construir una curva como la espiral de Arquímedes. En este caso[1365], nos dice Barrow, la curva se puede trazar por composición[1366] de movimientos pero no por concurso de los mismos.

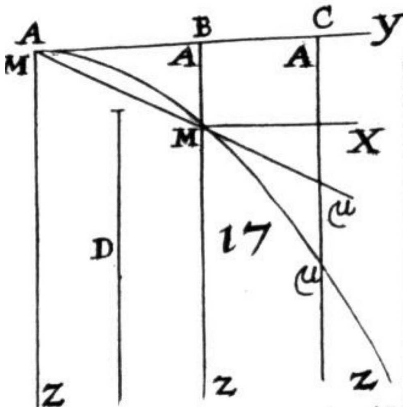
El recurso al transcurrir uniforme del tiempo sobre el que se fija la uniformidad de una de las variables o de la proporción entre dos de ellas tiene lugar, por primera vez, al final de esta tercera lección. Barrow comienza por definir una recta como aquella en la que las variables estan en una proporción uniforme. Para ello se sirve del gráfico siguiente:

[1363] Como veremos más adelante, este supuesto se volverá explícito en Newton en sus análisis posterirores.

[1364] Cf. la conclusión de Child en Barrow [1916] p. 16: “Newton no doubt attended these lectures ob Barrow”.

[1365] El caso contrario a este sería, según Barrow, el de la quadratiz. Una curva que se puede trazar por concurso pero no por composición de movimientos.

[1366] La regla de construcción para la elipse que nos da Barrow es la habitual desde Arquímedes (en Barrow [1674] p. 24): “Sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta AB continuo motu feratur, etiam uniformi, ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea*”. Cf. la traducción algo libre en Barrow [1916] p. 48: “Thus suppose that a straight line AB is uniformly rotated round A, and at the same time the point M, starting from A, is carried along AB by a continuous and uniform motion; from this *composite* motion is produced a certain line, namely the *Spiral of Archimedes*”.



En éste, la recta ZA se mueve a lo largo de la recta AY paralelamente con una velocidad cualquiera:

Si recta ZA semper per rectam AY sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (cresente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilen)[1367]

A su vez, el punto M se mueve sobre[1368] la recta con una velocidad proporcional a la misma:

... et in ea punctum aliquod M deteratur, ita tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes easdem proportionentur[1369]

Como resultado de ello, nos dice Barrow, se obtiene una línea recta.

No deja de resultar extraño que Barrow diga explícitamente que la proporcionalidad se cumple en cualquier intervalo de tiempo. Para nosotros, esta proporcionalidad se da ya de suyo sobre la base de un tiempo uniforme y no es necesario insistir sobre ella. En Barrow la uniformidad del tiempo no parece que sea algo del todo obvio y de ahí que se haga necesaria explicitarla. Esta uniformidad del tiempo es importante para garantizar el hecho de que la igualdad entre las proporciones

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{C\mu} \qquad [20]$$

sea una igualdad para cualesquiera *AB, AC, BM y Cμ*, sin que la igualdad se límite a los valores en concreto que tengan en la figura en cuestión. Es decir, la uniformidad del tiempo es la que nos asegura que la igualdad [20] exprese, no ya, una proporción, sino una ley de

[1367] Cf. Barrow [1674] p. 28. Cf. también la traducción inglesa en Barrow [1916] pp. 49-50: “For instance, suppose that a straight line AY parallelwise, by any motion, uniform or variable, increasing or decreasing or alternating in velocity, according to any imaginable ration”.

[1368] Estamos pues ante un caso de composición de movimientos.

[1369] Cf. la traducción en Barrow [1916] p. 50: “and that any point M in it is moved in such a way that the motion of the point is proportional to the motion of the straight line, throughout any the same intervals of time”.

proporción. Los términos *AB*, *AC*, *BM y Cμ* no son constantes sino, más bien, variables. Es por ello por lo que Barrow introduce la proporción [20] con una palabra, *semper*, que pone al descubierto el carácter de ley de dicha proporción:

Nempe si fuerit semper...

Es importante señalar que el movimiento uniforme no es asignado a la recta ZA ni al punto M que se mueve sobre ella sino a la proporción en la que cambian. Tanto la recta ZA como el punto M pueden moverse uniforme o diformemente uniforme o diformemente. El tiempo es, por así decir, externo a la proporción. Las dos variables se mueven con el mismo movimiento acelerado o no acelarado y esto es lo mismo que decir que los dos se mueven con un movimiento uniforme el uno al otro. Si se quiere poner de relieve el carácter no uniforme de una de las variables hay que uniformizar, parcial o totalmente[1370], la otra variable. Si optamos por uniformizar totalmente la variable, lo que hacemos es impedir que haya otro movimiento con respecto al cual podría deducirse que eso que creíamos que era uniforme es, en verdad, diforme. Y sabemos que la variable uniforme por excelencia es el tiempo[1371].

El paso siguiente será pues hacer de una de las variables la que represente el tiempo haciendo que se mueva con un movimiento uniforme. Para ello es necesario que el otro no sea uniforme. Si lo fuera, estaríamos en el caso de arriba que, como hemos visto, es indistinguible al caso en el que ambas variables se mueven uniformemente aceleradamente, diformemente aceleradamente, etc. La distinción entre estos distintos casos la establece la remisión externa a la variable uniforme tiempo. Si introducimos ahora el tiempo dentro de la proporción haciendo que una de las variables sea, por así decir, su expresión, podremos medir las diferencias, e.d., los cambios de la otra variable sobre la base siempre igual de esta primera variable. Esto no es otra cosa que la noción de variable independiente.

[1370] Como se ve, el hecho de que la uniformización sea parcial o total está enlazado con las derivadas primeras, segundas, terceras, etc. Las primeras derivadas uniformizan relativamente una función que es, por definición, observado desde un sistema de referencia absoluto. Todo depende del sistema de referencia desde el que se midan las velocidades. Si queremos medir la velocidad de una función variable definida por $f(x)=x^2$, podemos relativizar la uniformidad de base y proceder a derivar con el propósito de rebajar las diferencias. Desde el sistema de referencia de la primera derivada el movimiento representado por la función original nos parecera ser uniforme; $f'(x) = 2x$. Para hacernos una idea, esto equivale a medir la velocidad de un coche cuyo movimiento es recogido por la función $s = f(t) = t^2$ desde otro coche que cuyo movimiento es recogido por la función $x = g(t) = t^2 - 2t$. Si volvemos a uniformizar parcialemente, el movimiento desaparece – e.d., el movimiento del coche "perseguidor" se expresa por la función $g(t) = t^2 - b$, donde b es una constante cualquiera–; desde el sistema de referencia de la segunda derivada nos movemos junto con la función original.

[1371] La asimilación del tiempo uniforme a la variable independiente la realiza Barrow en la siguiente lección. Cf. Barrow [1674] p. 29: "Item quod, ob motus per AY et ei parallelas uniformitatem, possit ea cum ipsius partibus motus tempus, et ejus partes repræsentare" y Barrow [1916] p. 53: "Also I shall take the motion along AY and parallels to it as uniform, hence this motion and parts of it can represent the time and parts of the time". El que Barrow no utilice el tiempo variable independiente en las lecciones posteriores se debe, segun Child, a que las cinco primeras lecciones son un añadido posterior a las restantes.

6.3.6 Los orígenes de la fluxión

En las puertas del hallazgo de la invertibilidad entre los algoritmos de la derivada y de la integración, Newton adelanta lo que más adelante[1372] serán los dos problemas que resumen la tarea del entero cálculo. Estos dos problemas son, en nuestra terminología, el de la obtención de la derivada partiendo de una función y su inversa: la obtención de la función original partiendo de la derivada. Como se habrá dado cuenta el lector, esto último no es otra cosa que la operación de integración.

Newton comienza por representar dos rectas distintas que expresan el movimiento de dos variables, pongamos, x e y. El primero de los problemas es dar con la expresión de la relación entre los movimientos de estas dos variables. La exposición de Newton[1373] es la siguiente:

a c c c

b d d d

1. If two bodys c, d describe the streight lines ac, bd, in the same time, (calling ac=x, bd=y, p=motion of c, q=motion of d) & if i have an equation expressing the relation of ac=x & bd=y whose termes are all put equall to nothing. I multiply each terme of the equation by so many times py or $\frac{p}{x}$ *as x hath dimensions in it. & also by soe many times qx or* $\frac{q}{y}$ *as y hath dimensions in it. the sume of these products is an equation expresing the relation of the motions of c & d.*

Es decir, Newton propone un método para pasar de la ecuación que expresa la relación entre las rectas fluentes x e y, a la ecuación de las fluxiones o velocidades de los fluentes p y q, respectivamente. Pasamos así de una ecuación como la expresada por [16], a otra que siguiendo las reglas de Newton podría expresarse como sigue:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{j,i}\, j\cdot x^{j-1}y^{i}dx+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{j,i}\, i\cdot x^{j}y^{i-1}dy=0$$

es decir,

[1372] Nos referimos a la formulación de la cuestión dada en el trabajo no publicado de Newton sobre el método de las fluxiones titulado (en su traducción inglesa) “A Treatise of the Method of fluxions and Infinites series”. Cf. en particular Newton [1736] p. 25: “I shall observe that all the difficulties hereof may be reduced to these two Problems only, which I shall propose, concerning a Space describ’d by local Motion, any how accelerated or retarded. I. The length of the Space describ’d being continually (that is, at all times) given; to find the velocity of the motion at any time propos’d. II. The velocity of the motion being continually given ; to find the length of the Space describ’d at any time propos’d”. Volveremos sobre este texto.

[1373] Cf. Newton [1967] p. 343.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{j,i} i \cdot x^j y^{i-1}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{j,i} j \cdot x^{j-1} y^i} = -\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)} \qquad [21]$$

Para ello hemos definido p y q como los incrementos infinitesimales dx y dy de las variables x e y. Con el fin de expresar la idea de Newton de que las variables p y q son expresiones de velocidades, se podría también definir a p y q como,

$$p = \frac{dx}{dt}$$

$$q = \frac{dy}{dt}$$

No alterandose con ello la proporción expresada en la ecuación [21]. Después de que hayamos seguido la trayectoria de Newton en estos comienzos de su trabajo, no es dificil dar con el procedimiento con el que Newton llega al resultado que acabamos de reproducir. Esta no parece ser otra que la que iguala la expresión [16] a su análoga infinitesimal resultado de subsituir las variables x e y, por los crecimientos $x+dx$ e $y+dy$.

Lo importante para nuestro trabajo es llamar la atención sobre el hecho de que se trata de una relación entre crecimientos. La “magnitudes” infinitesimales p y q son puestas en relación y únicamente tienen sentido en esa relación. Ya hemos visto en el capítulo 4 que entender a los infinitesimales fuera de esa relación implica defender una concepción meramente contradictoria del infinitesimal.

Resulta algo más complicada la operación inversa de obtener los espacios partiendo de las velocidades con las que se recorre ese espacio. El proceso se describe así por Newton:

2. If an equation expressing the relation of their motions bee given, tis more difficult & sometimes Geometrically impossible, thereby to find the relation of the spaces described by these motions[1374]

Los dos ejemplos que utiliza Newton para ilustrar sus dos tareas tienen un alcance distinto. El primero, la derivación de la función $ax^3 + a^2yx - y^3x + y^4 = 0$, es propiamente un ejemplo. El segundo, la integración de la función $apx^{\frac{m}{n}} = q$ es más bien un teorema para las funciones potencia.

El ejemplo que nos interesa es, no obstante, aquel en el que uno de los momentos desaparece de la formulación. Su interés reside en que una mala interpretación del mismo puede dar lugar a malentendidos en lo que atañe a la tesis de la inseparabilidad de los momentos. Podría así parecer que los momentos pueden aparecer por si mismas, fuera de su relación.

[1374] Cf. Newton [1967] p. 344.

Encontramos un ejemplo de este tipo en un manuscrito[1375] fechado por Whiteside a finales del año 1665. En él Newton aplica el algoritmo para las derivadas sobre una ecuación en el que la velocidad de la fluxión *x* es igual a 1. La ecuación homogénea de la que parte Newton es la siguiente:

$$r+sy=0$$

Derivando esta expresión tendremos,

$$\ddot{r}+\ddot{s}y+sq=0$$

luego

$$\ddot{r}-\frac{r}{s}\ddot{s}+sq=0$$

y multiplicando los dos lados con *y*:

$$\ddot{r}s-r\ddot{s}+ssq=0$$

donde *r* y *s* son dos polinomios en *x* y donde los dos puntos indican que estos polinomios han sido derivados con respecto a la variable de la que dependen:

$$r=r(x)$$

$$s=s(x)$$

$$\ddot{r}=\ddot{r}(x)=\frac{dr(x)}{dx}$$

$$\ddot{s}=\ddot{s}(x)=\frac{ds(x)}{dx}$$

Newton presupone con ello que el momento de la variable *x* es igual a 1. Es decir, si hacemos uso de la notación que se ha introducido más arriba, podríamos escribir[1376]

[1375] Cf. Newton [1967] p. 363 y sig.

[1376] De hecho, con $\frac{dx}{dt}=h$ –donde h es una constante– habría podido asignarse a *x* el papel de la variable independiente de una manera más general. Véase la nota 1039 al respecto.

$$p = \frac{dx}{dt} = 1$$

Lo que equivale a afirmar que la variable *x* cambia uniformemente con el tiempo. Si una variable no se distingue de otra variable más que por su tasa de variación, dos variables con la misma tasa de variación serán la misma variable. De este modo, podemos concluir que la variable *x* es la misma variable que la variable tiempo. Del mismo modo que Barrow, pero esta vez sin la formulación explícita que resultaba más propia de unas lecciones, Newton introduce con ello la noción de variable independiente. En la formulación general del ejemplo, Newton parte de una ecuación con la forma siguiente:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (a_i y^i)$$

que luego procede a derivar con respecto a la variable independiente *t* o tiempo:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{da_i}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot y^i + i \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot a_i \cdot y^{i-1} \right)$$

pero, dado que la variable *x* es decretada variable independiente tendremos que

$$\frac{dx}{dt} = p = 1$$

y si escribimos $\frac{dy}{dt} = q$ y $\frac{da_i}{dx} = \ddot{a}_i$ tendremos que

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \left(\ddot{a}_i y^i + i \cdot q \cdot a_i \cdot y^{i-1} \right)$$

Ecuación homogénea en *x* e *y*, en la que la variable *x* asume el papel de la variable independiente o variable cuya progresión es aritmética. Una vez que el tiempo ha entrado a formar parte de las ecuaciones, las mismas no se entienden tanto como ecuaciones homogéneas de la forma

F(x,y)=0

sino como funciones de la forma

f(x)=y

No se trata tanto de una variación simultánea entre dos variables, sino de la variación de una variable –la variable *y*– cuando la variable independiente lo hace –es decir, cuando lo hace la variable *x*.

6.3.7 La tangente como la dirección inercial

Una vez que se haya concebido y construido la curva sobre la base de dos movimientos infinitesimales, cabe preguntarse por el movimiento infinitesimal de la curva en uno de sus puntos. La dirección de este nuevo punto nos proporciona la tangente a la curva en este punto. Newton llama a esta dirección la "determination of the motion of the point"[1377]. Podría decirse con Whiteside[1378], que Newton retoma en su uso de la palabra *determinatus*[1379] el sentido dado a él por Descartes cuando éste define[1380] el movimiento inercial como aqúel en el que el móvil está determinado, digamos, por Dios, en cada instante:

omne id quod movetur, in singulis instantibus, quæ possunt designari dum movetur, determinatum esse ad motum suum continuandum versus aliquam pertem , secundùm lineam rectam.

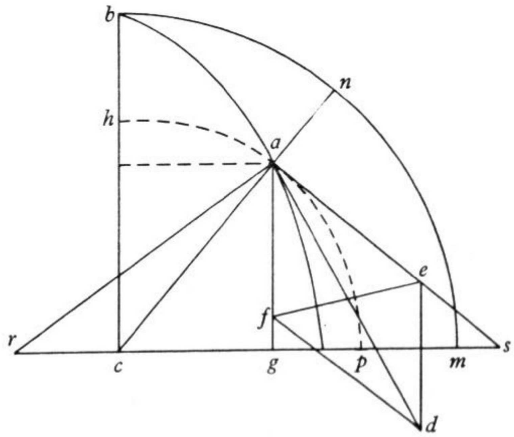
Newton no dudará, tal y como lo hizo antes de él Roberval, en recurrir a la regla de composición de magnitudes del paralalelógramo para obtener esta dirección de la tangente. El paralelogramo consigue sumar tanto los espacios recorridos como las direcciones de estos espacios en cuestión[1381]. En el caso de obtención de la tangente, la atención se centra sobre la suma de las direciones o, lo que es lo mismo, en la proporción entre los espacios recorridos y no en el valor absoluto de los mismos. Para ello, el paralelogramo requiere una comprensión análoga al triángulo carácterístico descrito más arriba. Si bien los lados de ambos pueden ser evancescentes, ni la "pendiente" del triángulo ni la dirección resultado del paralelogramo tienden a desaparecer. Lo mismo, decíamos, ocurre con el cociente de diferenciales; si bien es verdad que tanto el numerador como el denominador del cociente tienden a desaparecer, el cociente mismo puede tomar un valor finito.

En cualquier caso, recurrir al paralelogramo resulta una empresa más dificil de lo que en principio podría parecer. Es por esta razón que Newton, en el segundo ejercicio de los propuestos para la obtención de la recta tangente, obtiene un resultado erróneo como fruto de la mala comprensión de los movimientos que estan en el origen de la curva. Nos referimos, en particular, al problema de la tangente de la cuadratriz.

[1377] Cf. Newton [1967] p. 370.
[1378] Ibid., nota 3.
[1379] Para la presunta exacta sinonímia entre el *determinatus* de Descartes y la *determination* de Newton así como para la importancia de la correcta delimitación de tal término en el conflicto entre Fermat y Descartes en relación a la ley de refracción véase Panza [2005] p. 360 nota 54.
[1380] Cf. Descartes [1644] p. 56 prop. XXXIX. El parágrafo sigue así: "Ut exempli causa, lapis A, in funda EA per circulum ABF rotatus, eo instanti, que est in puncto A, determinatus quidem est ad motum versus aliquam partem, nempe secundùm lineam rectam versus C, ita scilicet ut linea recta AC, sit tangens circuli". Como el lector habrá imaginado, el dibujo original representa una piedra en el punto A sujeto por una funda al centro E. El movimiento tangencial de la piedra en el punto A hacia C es, dice Descartes, a lo que está la piedra determinada, digamos, por sí.
[1381] Sobre los presupuestos que permiten sumar no ya las velocidades, sino más bien las fuerzas que dan lugar a estas velocidades, nos hemos ocupado en el apartado 8.2.2.

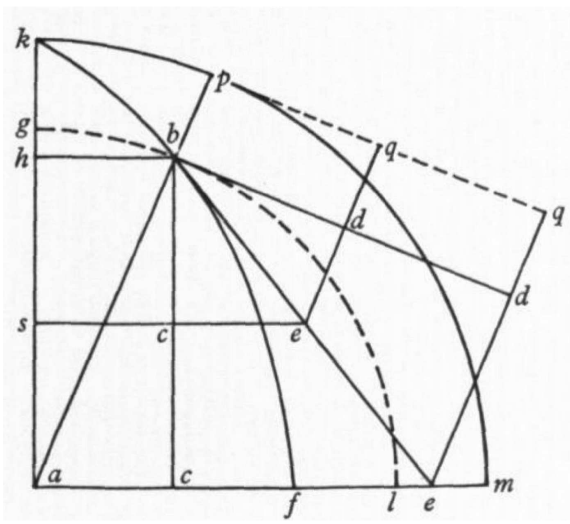
La primera de estas aproximaciónes para la obtención de la tangente de la cuadratiz es la siguiente[1382]:

...in the Quadratix. (if cae=recto) the motion of (a) towards (g) is to its motion towards (e) as (bc) is to hap. therefore make af:ae::bc:hap. & bisect fe or complete the parallelogram whose diagonall is tangent to the Quadratix.



Pocos días después, Newton vuelve al problema de la tangente de la cuadratriz para, esta vez si, obtener el resultado correcto[1383]:

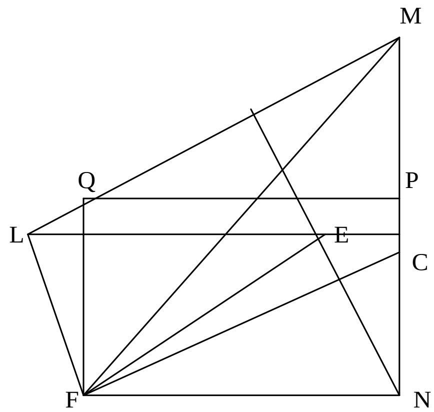
Whith the radij ab & ak draw the circles kpm & gbl, make pq‖bd⊥abp‖ed. &, bd‖ak. Then tis, ka:kmp::whole motion of b to c (or ec) [: whole motio]n of p to q. And ap:ab::kpm:gbl::whole motion of p to q: whole motion of b to d (or to ed). Therefore af:ab::ak:gbl::absolute & whole motion of b towars c (or acf): whole motion of b towards d (or ed) Soe that makeing bc:bd::af:ab. ab‖ed⊥bd & hb‖ce⊥cb. The point b will bee moved to the line[s] ce & ed in [the] same time which cannot bee unlesse it moved to e (their common intersection). The point b therefore moves in the line be which doth therefore touch the Quadratix at b.



[1382] Cf. Newton [1967] p. 371.
[1383] Cf. Newton [1967] p. 379.

El problema[1384] en la aplicación del paralelogramo en el caso de la cuadratríz consiste en que en él, para la obtención de la tangente, en vez de dos movimientos hay que componer un movimiento a partir de cuatro movimientos rectilíneos. El error de Newton se debe a que identificaba dos movimientos cuando en realidad hay cuatro. El problema del paralelogramo no consiste en que a veces la regla no da un resultado correcto –y que, en consecuencia, habría que restringir su uso a tales o cuales curvas–, sino en que a algunos no les da un resultado correcto. Su uso presupone saber analizar adecuadamente los movimientos compuestos. Como ya se ha dicho, Newton consigue analizar algo después el movimiento de la cuadratríz correctamente. El problema es saber por qué.

Para responder a esta pregunta vamos a tener que presentar la regla de composición de cuatro movimientos dada por Roberval al final de la proposición cuarta de sus *Observations sur la composition des Mouvements*[1385]. Hemos modificado ligeramente el dibujo ofrecido por Roberval con el fin de poder presentar en él tanto el proceder acertado como el erróneo. La figura es la siguiente:



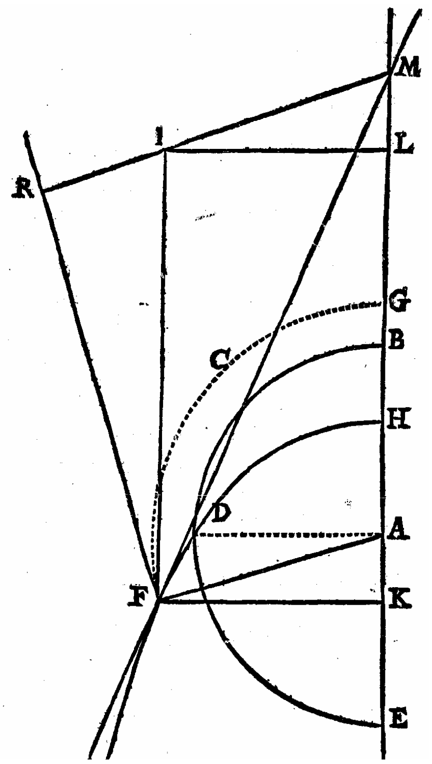
En el dibujo, las líneas FC y FQ se mueven al mismo tiempo paralela y uniformemente sobre sí mismas, de modo que sus extremos F trazan las rectas FL y FN respectivamente. La afirmación del final de esta cuarta proposición es que el punto que corta las líneas FC y FQ trazará con un movimiento uniforme la recta FM compuesto de cuatro movimientos uniformes. Efectivamente, el movimiento del punto sobre la recta FQ está compuesto por un movimiento con la recta que produce FN, más uno sobre la recta que da como resultado NC. La composición de estos dos movimientos da como resultado la recta FC. Lo mismo ocurrirá

[1384] Rechazamos en este punto tanto la postura de Whiteside como la de Panza. Los dos, cada uno a su manera, rechazan el uso generalizado del paralelogramo a cualesquiera curvas. El primero considera que el paralelogramo es únicamente aplicable cuando los movimientos en los que se descompone la curva son independientes de la dirección de la tangente: “the plausible introduction of the parallelogram of forces into the approach is possible only where, as in the cycloid, the two generating motions are independent whith the ‘determination of motion’ of the describing point on the curve given truly as the resultant of the two component limit-motions” (en Newton [1967] p. 370 nota 4). El “criterio” de Panza es mas restringido (en Panza [2005] p. 342 y sig.) : si el movimiento del punto M de la curva es un movimiento M^1 con respecto a un punto ψ que a su vez consite en un movimiento M^2 con respecto a φ y si el movimiento M^2 no es rectilineo, no es seguro que al aplicar la regla del paralelogramo sobre las velocidades respectivas v^1 y v^2 de M^1 y M^2 obtengamos como resultado la velocidad puntual de M.
[1385] Cf. Roberval [1693] p. 79.

con FC; su movimiento da como resultado un movimiento con la recta FL y un movimiento sobre la recta LQ. La suma de estos dos movimientos es pues la recta QF. Roberval ha demostrado ya en la proposicíón segunda[1386] que dos movimientos uniformes componen un movimiento uniforme y de ahí que los movimientos FC y FQ sean uniformes. Para dar con el movimiento total M no tenemos mas que hacer uso del paralelogramo sobre lo que ahora son, únicamente, dos movimientos uniformes FC y FQ. El resultado es pues la recta FM.

Es ahora cuando podemos ver que la diferencia entre el primer dibujo de Newton y el segundo consiste en la diferencia entre aplicar el paralelogramo sobre las rectas FC y FQ y aplicarlo sobre las rectas FL y FN. Es decir, el procedimiento erróneo ignora la existencia de dos movimientos LQ y NC que son claves en la solución del problema. Es por ello que si partimos de las rectas FL y FN para dar con la recta tangente, hemos de trazar las perpendiculares LM y NM. La diferencia entre el primer y el segundo dibujo de Newton estriba en que, en la primera, Newton aplica sobre las rectas *af* y *ae* –equivalentes a las FL y FN– el paralelogramo, mientras que en la segunda traza las perpendiculares sobre *bd* y *bc* obteniendo el resultado correcto *be*. Este último resultado es el equivalente en el dibujo de Roberval a trazar las perpendiculares sobre las rectas FL y FN. Vemos así que con el procedimiento erróneo obtenemos una recta FE desviada de la verdadera recta tangente FM.

Todo esto esta muy bien, pero, ¿cómo sabemos que el movimiento sobre la cuadratríz se descompone en esos cuatro movimientos? Para dar respuesta a esto haremos uso del dibujo[1387] que utiliza Roverbal en su tratamiento de la cuadratríz:



[1386] Cf. Roberval [1693] p. 79.
[1387] Cf. Roberval [1693] p. 98.

La equivalencia con la figura dada más arriba es evidente si tenemos en cuenta que los puntos L, Q, P, C y N de allí equivalen a los puntos R, I, L, A y K, respectivamente, del nuevo dibujo. La justificación de que los movimientos son los que son se desprende de la definición de la cuadratríz y de la observación de que la recta tangente se construye sobre la base de movimientos que dan lugar a rectas infinitesimales. De este modo se puede comprender que mientras que la recta FI –la anterior FQ– se translada paralela y uniformemente en dirección a EM, al mismo tiempo, la recta FA –la anterior FC–, que se mueve en la dirección tangente del círculo FCG, se moverá sobre la recta FR en dirección a la recta RM[1388].

En definitiva, lo que hemos ilustrado mediante el ejemplo de la cuadratríz no es más que el resultado del proyecto de Newton de igualar y presentar sobre un fondo matemático común las curvas tanto geométricas como mecánicas[1389]. Este fondo común es el que proporciona el análisis. Hemos visto también la relevancia que tiene la comprensión de los lados de los paralelogramos como lados infinitesimales[1390]. El que, no obstante, los lados acaben dibujándose con una magnitud finita, aparte de ser irremediable, tiene la ventaja de mostrar que lo importante no son las magnitudes mismas sino la proporción entre ellas. Esto último remite, a su vez, a la definición del movimiento inercial como aquel que, mientras no sea

---

[1388] Es interesante observar que el error de Newton era ya contemplado y reconocido como tal en el tratado de Roberval: "Mais dautant que ces deux mouvements ne sont pas les seuls qu'a le point qui décrit la quadratice, je ne tire pas du point R une ligne parallele & égale à FK, pour avoir à son autre bout un point de la touchante, mais j'éxamine plûtost tous les mouvements du point F qui décrit la Quadratice en cette sorte" (en Roberval [1963] p. 98).

[1389] Cf. al respecto Panza [2005] p. 366.

[1390] Un ejemplo facilmente reconocible de ello es la elipse. Partiendo de la definición de la elipse como la figura trazada por un punto (*a*) cuya suma de distancias a los focos (*b*,*c*) es constante, se puede pasar a trazar la tangente haciendo uso de un paralelogramo. Para ello derivamos la expresión matemática de la definición obteniendo que los crecimientos infinitesimales de las rectas *ab* y *ac* son, en valores absolutos, iguales: si ab+bc=cte, entonces $|d(ab)| = |d(bc)|$. Estos valores infinitesimales serán los lados del paralelogramo. El problema es, nuevamente, el de saber aplicar el paralelogramo. En los dos primeros intentos de obtener la tangente de la elipse Newton vuelve a errar debido a que aplica el paralelogramo creyendo que la tangente es el resultado de dos movimientos uniformes en vez de de cuatro. Cf. al respecto Newton [1967] p. 372 y 380. Dos semanas más tarde presenta Newton la solución adecuada (en Newton [1967] p. 387). Lo mismo que en el caso de la cuadratríz, Newton no da ninguna explicación de la corrección. No es dificil obtener los cuatro movimientos de la elipse; para ello tenemos que prolongar la recta *ba*, pongamos, hasta un punto L. Cogemos sobre la recta *ac* un segmento a*N* igual a *aL*. De los puntos L y N trazamos dos perpendiculares que se cortan en un punto M. Si hacemos mover la recta *aN* paralela a sí misma partiendo del punto *a*, su extremo trazará una recta que corta la recta *LM* en un punto Q. Hacemos lo mismo con la recta *aL* de modo que su extremo corte, esta vez, la recta *NM* en un punto *C*. Si tenemos en cuenta que el punto *a* no es otro que el punto F, los cuatro movimientos se hacen visibles al mismo tiempo que se hará visible la necesidad de aplicar el paralelogramo sobre los lados *aQ* y *aC*, en vez de hacer un uso poco ortodoxo del paralelogramo sobre *aL* y *aN*, algo más propio de un "perpendiculargramo". Los cuatro movimientos se convierten en dos cuando la recta *aN* es perpendicular a la recta *aL*. Sólo en este último caso podemos afirmar que las dos construcciones proporcionan el mismo resultado y no, como parece afirmar Whiteside (en Newton [1967] p. 372 nota 13), que en la elipse, las dos construciones dan siempre un mismo resultado. Por la misma razón rechazamos la afirmación de Panza (en Panza [2005] p. 370) según el cual "Newton semble donc avoir compris que la régle du parallélogramme ne s'applique dans ce cas qu'accidentellement". En contra de lo que cabría esperar, Roberval no hace esta vez uso del paralelogramo para dar con la tangente y, en vez de ello, se decide (en Roberval [1693] p. 83) por encontrar la tangente haciendo que la misma corte el punto *a* de tal forma que $\angle LaM = \angle MaN$, donde la tangente pasa por los puntos *a* y *M*. Esto último equivale, sin embargo, al método correcto de la aplicación del paralelogramo sobre dos movimientos uniformes que son resultado de la composición de dos (un movimiento sobre la recta y otro movimiento de la recta) movimientos uniformes (esto es lo que hará Roberval para la cuadratríz) o al uso equivalente de aplicar el "perpendiculargramo" sobre las rectas *aL* y *aN* que representan dos movimientos uniformes (que es lo que hace Newton). En resumen, cuando se tiene conocimiento de los movimientos que dan lugar a la curva, el paralelogramo parece ser universalmente aplicable. En caso contrario hay que recurrir, en el caso de que los movimientos involucrados sean cuatro, al "sucedaneo" del paralelogramo o, lo que hemos venido en llamar, el "perpendiculargramo".

impedido a ello, siempre conserva su dirección y velocidad. Una vez que se tiene la dirección, es decir la proporción, de la tangente, es indiferente hacer de ella algo que sea mayor o menor.

Esta es la razón por la que consideramos desacertada la afirmación de Panza[1391] cuando afirma que Newton, al trazar segmentos finitos para los lados del paralelogramo, no hace otra cosa que "éliminer de ses arguments toute référence explicite à des accroissements infinitement petits ou à d'autres grandeurs infinitésimales". Si bien es verdad que Newton no habla expícitamente de infinitesimales, el método del paralelogramo para la obtención de las tangentes hace uso de la noción de límite entre dos cocientes evanescentes. Si definiésemos el infinitesimal, algo toscamente, como aquella magnitud menor que cualquier otra, entonces sí estaríamos obligados a afirmar que Newton no hace uso de los mismos. Es precisamente el carácter cualitativo del límite, es decir, el que el límite lo sea del cociente y no el cociente de dos límites, lo que tan impecablemente se observa en este método de obtención de tangentes. Se puede leer a Newton suponiendo que cuando él hace uso de los infinitesimales siempre lo hace dentro de una relación. Se puede también suponer que al ser los infinitesimales siempre en una relación ya no son, propiamente, infinitesimales. Consideramos que las dos opciones son defendibles. Lo que ya no sería correcto hacer es eliminar toda referencia a los infinitesimales a la hora de dar cuenta del paralelogramo para la solución de la tangente.

6.3.8 El algoritmo de velocidades y la inseparabilidad del cociente de diferenciales

En un manuscrito del 13 de noviembre de 1665, Newton vuelve a reformular su algoritmo de velocidades, ésta vez, haciendo referencia explícitamente al cociente de diferenciales. Lo importante de esta nueva aproximación es que pone de relieve la recíproca referencia del cociente de diferenciales. Esto último se refleja en que la variación de cada uno de los lados del cociente remite en su variación a la variación del otro lado. El mayor logro del cálculo será, precisamente, el dar con la ley de cambio de dicho cociente de diferenciales.

Para ello, Newton tiene que suponer que todos los movimientos de todas la magnitudes del problema son del mismo orden. Es decir, si bien al principio Newton no llega a restringir los movimientos de los fluentes, a la hora de describir las fluxiones *dx* y *dy* entiende que sus movimientos son uniformes. Podríamos escribir esto último así:

$$ddx=0$$

$$ddy=0$$

Esto lo expresa Newton de la siguiente forma[1392];

If two bodys $\frac{A}{B}$ *move uniformely the* $\frac{one}{other}$ *from* $\frac{a}{b}$ *to* $\frac{c,\ e,\ g,}{d,\ f,\ h,}$ *&c in the same time. Then are the lines* $\frac{ac}{bd}$ *&* $\frac{ce}{df}$ *&* $\frac{eg}{fh}$ *&c their veolocitys* $\frac{p}{q}$*. And thought they move not uniformly yet*

[1391] Cf. Panza [2005] p. 367.
[1392] Cf. Newton [1967] p. 385.

are the infinitely little lines which each moment they describe as their velocitys are which the have while they describe them.

La clave del parágrafo está pues en la suposición de que cualquiera que sea el movimiento que describen los cuerpos *A* y *B*, sus diferenciales de primer[1393] orden son constantes. Esto último va, sin embargo, en contra de la siguiente presuposición: si sus diferenciales de primer orden son constantes, los movimentos de los cuerpos deben de ser uniformemente acelerados. Teniendo en cuenta esta incongruencia de Newton, podemos definir las velocidades *p* y *q* de las variables *x* e *y*, como *dx/dt* y *dy/dt*, respectivamente, para ofrecer así una reformulación más contemporánea del argumento de Newton[1394]:

As if the body A whith the velocity p [=dx/dt] describe the infinitely little line o[=dx] in one moment [=dt]. In that moment [=dt] the body B whith the velocity q [=dy/dt] will describe the line $\frac{oq}{p}$ $[= dx \cdot \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = dx \cdot \frac{dy \cdot dt}{dx \cdot dt} = dy\,]$*. For p:q::o:* $\frac{oq}{p}$ $[= \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dx}{\frac{dx \cdot \frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}\,]$*. Soe that if the described lines be x & y in one moment, they will be x+o [=x+dx] &* $y+\frac{op}{q}$ *[=y+dy] in the next.*

Los incrementos infinitesimales *o* y $\frac{oq}{p}$ no son así independientes entre sí. El cociente entre diferenciales es un cociente de diferenciales y la ley que expresa esta relación una ley del cambio de la relación. Por lo demás, la demostración para la obtención del algoritmo de velocidades es la habitual en Newton por lo que no necesitamos volver a reproducirla aquí[1395].

[1393] Nótese que para decir "primeros diferenciales" nos apoyamos en la lectura que identifica lo que Newton denomina momento de tiempo con la diferencial *dt*. Y es que queda lejos del alcance de Newton una comprensión del momento de tiempo como de un diferencial de segundo orden o superior. Esta última aproximación nos permitiría afirmar una verdadera ausencia de restricción para los movimientos de los cuerpos *A* y *B*. Así, un cuerpo C con un movimiento aceleradamente acelerado recorrerá, como quiere Newton, las "pequeñas líenas" *ddx* en un tiempo, *más* instantáneo que *dt*, a saber, *ddt*.

[1394] Ibid. No seguiremos la reformulación propuesta por Whiteside ni la propuesta por Panza. Nos alejamos de la formulación propuesta por el primero por el hecho de que identifica (en Newton [1967] p. 385 nota 12) la línea "infinitamente pequeña" *o* con una magnitud finita. Tampoco seguimos a Panza (cf. Panza [2005] p. 383) por que si bien es verdad que Newton no define explícitamente la velocidad de una variable en términos de esa variable, tal definición es la que nos permite enlazar lo que en este punto hace Newton con la posterior definición explícita de la velocidad de una variable en términos de la variable *o* en dos obras publicadas por Newton sobre el análisis.

[1395] Recordemos simplemente que se trataba de substituir en el polinómio homogéneo los valores de *x* e *y* por los de *x+o* y $y+\frac{oq}{p}$ y de eliminar los infinitesimales de orden superior a uno.

6.3.9 El tratado de Octubre 1666 sobre las fluxiones: un nuevo significado para *o*

En octubre de 1666 Newton redacta un pequeño tratado en el que recoge los resultados a los que las investigaciones anteriores le habían conducido. Entre ellas podríamos destacar las reglas para la composición del movimiento[1396], una nueva demostración del algoritmo de velocidades, la regla para la inversión de dicho algoritmo, la cuadratura[1397] y rectificación de diversas curvas así como la búsqueda de centros de gravedad y equilibrio[1398].

En este apartado nos limitaremos a dar cuenta[1399] de un cambio de significado que sufre la expresión *o* en la demostración del algoritmo de velocidades. El término *o* pasa de significar un incremento infintesimal de la variable *x* a significar un elemento de tiempo infintesimal en donde se dan los incrementos de la variables *x* e *y*. Es decir, la expresión *o* pasa de remitir a *dx* a remitir a *dt*. El texto en el que esto tiene lugar es el siguiente:

a c d e f

b g h k l

If two bodys A, B, move uniformly the $\frac{one}{other}$ *from* $\frac{a}{b}$ *to* $\frac{c,\ d,\ e,\ f,}{g,\ h,\ k,\ l,}$ *&c: in the same time. Then are the lines* $\frac{ac,}{bg,}$ & $\frac{cd,}{gh,}$ & $\frac{de,}{hk,}$ & $\frac{ef,}{kl,}$ *&c: as their velocitys* $\frac{p}{q}$*. And thought they move not uniformely yet are the infinitely little lines which each moment they describe, as their velocitys wich they have while they describe them. As if the body A whith the velocity p describe the infinitely little line (cd=) p×o in one moment, in that moment the body B with the velocity q will describe the line (gh=) q×o. For p:q::po:qo. Soe that if the described lines bee (ac=) x, & (bg=) y, in one moment, they will bee (ad=) x+po, & (bh=) y+qo in the next.*

Se mantienen los supuestos[1400] previos en base a los cuales Newton pretende uniformizar cualesquiera movimientos de los cuerpos A y B en un momento de tiempo. Lo

---

[1396] Cf. Newton [1967] pp. 400 y 401. Se reproducen los resultados del Mayo de 1666 recogidas en Newton [1967] pp. 390-393.

[1397] Cf. Newton [1967] p. 427 y sig.

[1398] Cf. Newton [1967] p. 441 y sigs. Para ello, Newton concibe las figuras en cuestión como si estubiesen compuestas por una cantidad infinita de paralelogramos infinitesimales. La búsqueda del centro de gravedad de una figura a partir de la suma o totalidad del centro de gravedad de infinitas rectas era un recurso ya usual en el erróneamente denominado *Método* de Arquímedes (cf. Arquímedes [2002] p. 17 y Arquímedes [1972] p. 436 ln.23 y sig). donde habla de la composición (συνίστημι) de un triángulo y de una parábola de las rectas paralelas de su interior. Lo que de ningún modo se puede encontrar en Arquímedes es el tratamiento dinámico de la cuestión donde los paralelogramos infinitesimales (no ya líneas) son compuestos por líneas que son multiplicadas por sus velocidades instantáneas de crecimiento: "Now the ordinatly applyed lines *bc=z*, & *de=v*, multiplyed into their motions *p* & *q* (that is, *pz* & *qv*) may signify the infinitly little parts of those areas (*acb*, *lde*) which each moment they describe" (Ibid. Newton [1967]).

[1399] Para una discusión más amplia cf. Panza [2005] pp. 433-510.

[1400] Supuesto que se expresa de la siguiente forma por Panza [2005] p. 437: "la supposition de la proportionalité entre les accroissements infiniment petits des segments *x*, *y*,... et les vitesses correspondantes".

que no es uniforme en un tiempo no infinitesimal –es decir, en un tiempo en el que los cuerpos A y B recorren las rectas *af* y *bl*–, se vuelve uniforme en un tiempo infinitesimal *o*. Podemos intentar aclarar esta cuestión recurriendo a dos funciones *f(t)* y *g(t)* que representan el movimiento de dos cuerpos, A y B, uno uniformemente acelerado, el otro aceleradamente acelerado:

$$f(t)=s=at^2$$

$$g(t)=s=bt^3$$

La expresión de la ley de la tangente de la primera función es,

$$ds/dt=2at$$

y para la segunda función,

$$ds/dt=3bt^2 \qquad [22]$$

Para obtener la velocidad instantánea del cuerpo A en el momento *t=d*, no tenemos más que substituir el valor *d* en la ecuación de la tangente. El problema es que para obtener la misma magnitud, es decri, para obtener la velocidad instantánea del cuerpo B, no nos es suficiente con la expresión de la tangente. En este caso, la expresión de la tangente nos informa de la velocidad de la aceleración, es decir, de la tasa de cambio puntual de la aceleración con el que se mueve el cuerpo B. Para obtener la expresión de la velocidad puntual del cuerpo B tenemos que volver a derivar la expresión [22]:

$$dds/ddt=6bt \qquad [23]$$

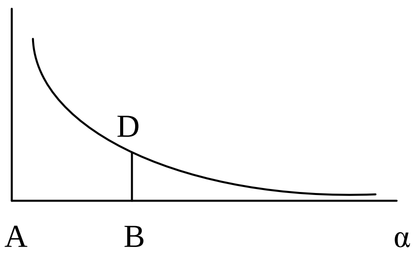
Es ahora cuando, al hacer uso de momentos de tiempo *ddt* "más instantáneos" que los anteriores *dt*, podemos capturar la velocidad del cuerpo B en el punto *t=c*. Para ello no habrá más que substituir el valor *c* en la expresión [23].

Por ello, el supuesto de Newton únicamente es valido cuando las velocidades de los cuerpos A y B se expesan en las mismas unidades de tiempo instantánes. Es decir, si las funciones *f(x)* y *g(x)* son las que expresan el moviento de los cuerpos que recorren las rectas *af* y *bl*, no tenemos un infinitesimal común *o* con el que multiplicar las respetivas velocidades. En un caso *o* será igual a *dt*, en el otro a *ddt*. En conclusión, vemos que la uniformidad de una variación puede desglosarse en niveles de uniformidad mediante infinitesimales de distinto orden o grado.

6.4 *DE ANALYSI PER ÆQUATIONES INFINITAS: ALGUNAS OBSERVACIONES*

El *Analysi per æquationes numero terminorum infintas*, redactado en 1669, fue publicado por primer vez en el año 1711 si bien no dejaron de circular copias del mismo entre sus amigos en los años previos a la publicación[1401]. Entre ellos destaca el entonces profesor Lucasiano de matemáticas, I. Barrow[1402].

En este tratado, Newton da por supuestas los resultados para la cuadratura que ha obtenido ya en su tratado de Octubre de 1666 y se dedicará, más bien, a aplicar el algoritmo para la cuadratura así como a hacer posible su aplicación reformulando las ecuaciones mediante series.



En la integración de la función $f(x)=1/x^2=x^{-2}$, Newton hace uso del resultado del tratado[1403] de 1666 obteniéndo[1404] la cuadratura entre los límites α y BD:

$$\alpha BD= \left(\frac{1}{-1} x^{\frac{-1}{1}} = \right) - x^{-1} \left(= \frac{-1}{x} \right)$$

Lo que equivale a nuestro,

$$\int_{\alpha}^{BD} x^{-2} dx = -x^{-1}$$

Newton distingue esto último de la cuadratura

BDα = x^{-1}

[1401] Cf. Boyer [1959] p.l 90 y sig.
[1402] En una carta dirigida a John Collis, Barrow se refiere al manuscrito con las siguientes palabras: “A friend of mine here, that hath a very excellent genius of those things, brougth me the other day some papers, wherein he hath sett downe methods of calculating the dimensions of magnitudes like that of M[r] Mercator concerning the hyperbola, but very generall; as also of resolving æquations; which I suppose will please you” (citado en Newton [1968] p. 207 nota 1).
[1403] Cf. Newton [1967] p. 403.
[1404] Cf. Newton [1968] p. 209.

Siendo así evidente que el sentido en el que se realiza la integración hace que su resultado sea negativo o positivo. Es decir, el sentido se expresa mediante la distinción entre las magnitudes negativas y positivas:

$$\alpha\mathrm{BD}=\int_{\alpha}^{BD} x^{-2}dx=-x^{-1}=\int_{BD}^{\alpha} x^{-2}dx=\mathrm{BD}\alpha$$

Tal y como hemos adelantado, el método de la extración de las raíces permite aplicar la regla[1405] de la composición de la cuadratura –a saber, la regla

$$h(x)=g(x)+f(x) \quad \text{luego} \quad \int h(x)dx=\int\left(g(x)+f(x)\right)dx=\int g(x)dc+\int f(x)dx-$$

a equaciones que no están expresadas como una suma de términos simples. Así, si partimos de la ecuación

$$\sqrt{a^2+x^2}=y$$

Newton obtiene[1406] su raíz,

$$a^2+x^2\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\dots\right.$$

$$\underline{a^2}$$

$$0+x^2$$

$$\underline{x^2+\frac{x^4}{4a^2}}$$

$$0-\frac{x^4}{4a^2}$$

$$\underline{-\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}}$$

$$0+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$$

$$\underline{+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}}$$

[1405] Se trata de la segunda regla del tratado. Cf. Newton [1968] p. 209.

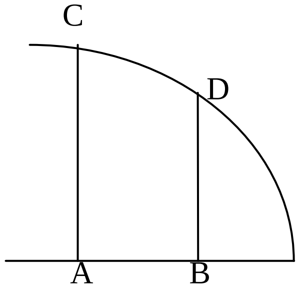
[1406] Cf. Newton [1968]p. 215.

$$0-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}...$$

De este modo, Newton puede cuadrar fácilmente la función[1407]

$$y=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}...$$

y obtener el área de la hipérbole:



$$\text{ABCD}=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}...$$

En un tratado de 1670 este método de la extracción de las raices será puesto en correspondencia con el sistema de los números decimales[1408]. El sistema de extracción de las raices permite simplificar cocientes más o menos complejas a una serie infinita. En ambos casos los terminos de la serie son ordenados en una progresión de potencias enteras, simplificando las potencias más complejas que podrían aparecer en la expresión finita. La virtualidad de estos dos métodos consiste, además, en que mediante el aumento en progresión aritmética de las potencias que multiplican a las superficies, consiguen agotar el continuo sea unidimensional[1409] –en el caso del sistema decimal– sea multidimensional –en el caso de las cuadraturas–[1410].

[1407] Como se ve, Newton obtiene una serie infinta de cuyas propiedades de convergencia no suele hacer demasiadas afirmaciones. Cf. al respecto, Miller [1954] p. 13: “Über die Konvergenz der behandelten Reihen finden wir in der Newtonschen Abhandlung nur spärliche Angaben“. Las indicaciones son del tipo: “[...] an expansion which approaches more rapidly to the truth the smaller *x* is” (in Newton [1968] p. 227). Cf. también Newton [1968] pp. 245 y sig.

[1408] Cf. Newton [1969] p. 35: “For since this doctrine in species has the same relationship to Algebra that the doctrine in decimal numbers has to common Arithmetic, [...] appreciate the correspondence between decimal numbers and algebraic terms continued to infinity: namely, that to each single place in a decimal sequence decreasing continually to the right there corresponds a unique term in a variable array ordered according in uniform progression to infinity”.

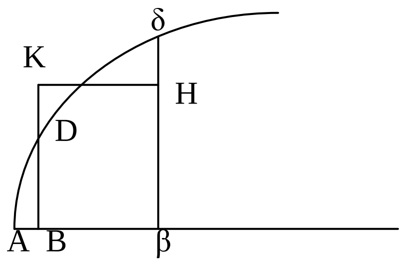
[1409] Cf. Courant [1969] pp. 6-8: “Gleichviel aber in welchem Zahlensystem wir die Zahlen schreiben, stets lassen sich in ihm die sämtlichen rationalen und irrationalen Zahlen ausdrücken”.

[1410] Ya hemos visto que, en basa a la ley de la homogeneidad, la misma cantidad puede ser expresión de una recta –algo unidimensional– como de una superficie o de un volumen –algo multidimensional–, con lo que la

6.4.1 ¿Infinitamente pequeño o indefinidamente pequeño?: Newton sobre Newton.

En un artículo[1411] de la *Acta Eruditorum* de Febrero de 1712, Leibniz hace una recensión del *De Analysi* publicado y editado un año antes por W. Jones. Leibniz tenía ya conocimiento de este tratado con motivo de su segundo viaje a Londres en el año 1676. Es ahí donde tendrá acceso a la copia de Collins, acaso la única persona de la Royal Society con la que se encontró Leibniz en Londres[1412]. En 1713 Newton escribe un artículo[1413] que no será publicado y en el que se defiende de la errónea lectura que hace Leibniz de sus indivisibles. Si bien es cierto que Leibniz se interesa más bien por el desarrolo de las funciones en series[1414], lo que a Newton le parece importante es aclarar las nociones fundamentales del cálculo.

La fuente del malentendido es el comentario de Leibniz a la demostración[1415] de la derivada de una función que expresa la superficie de una curva como función de la abcisa. Para exponer este malentendido haremos uso del dibujo siguiente;



donde,

AB=x

BD=y

ABD=z

Bβ=o

distinción que hemos hecho en el texto principal responde únicamente a la representación usual en la que se imaginan los números como representantes del continuo denominado recta y a los resultados de los procesos de integración como números que representan superficies, volúmenes, etc.

[1411] Se puede encontrar una reproducción parcial del mismo en Newton [1968] pp. 259-262.

[1412] Cf. al respecto Hofmann [1949] p. 181 y Newton [1968] p. 248 nota 1.

[1413] Cf. Newton [1968] pp. 263-273.

[1414] Cf. Hofmann [1949] p. 182: "Leibniz' Auszüge beschränken sich ausschließlich auf Reihenentwicklungen und die dazugehörigen Allgemeinbemerkungen. Der infinitesimale Inhalt der Analysis bleibt völlig unberücksichtig- offenbar deshalb, weil er für Leibniz nichts Neues zu bieten hatte".

[1415] Cf. Newton [1968] p. 242.

$BK=v$

$A\beta=x+o$

Newton supone[1416] además que las superficies $B\beta HK$ y $B\beta\delta D$ son iguales[1417] de modo que,

$A\delta\beta=z+ov$.

Si la ecuación entre x y z es, por ejemplo,

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$$

Newton substituye x por $x+o$, y z por $z+vo$, divide la expresión por o y obtiene:

$$\frac{4}{9}\left(3x^2+3xo+o^2\right)=2zv+ov^2$$

Por último, Newton supone que o es infinitamente pequeño para así eliminar o:

$$\frac{4}{9}\times 3x^2=2zv$$

El pasaje del manuscrito con el que expresar la evanescencia de o es el siguiente: “Si jam supponamus $B\beta$ esse infinite parvam”[1418]. Lo que ocurre es que en la edición publicada en 1711 por Jones el texto hablará de “in infinitum diminui & evanescere”[1419]. Newton intentará precisamente distanciarse de esta primera formulación. Newton distingue entre 1) que una magnitud disminuya en el infinito y 2) que una magnitud sea infintamente pequeña[1420]:

[1416] Suposición que ya estaba presente en Newton [1967] p. 302 y sig. Ahí, Newton igualaba el trapezoide *dnψd* y el rectángulo ρσdh basándose en que, cuando son infinitos en número (“if they bee infinite in number”), los rectángulos πs, ρx, etc. son iguales a los trapezoides con base πρ, ρω,... respectivamente. Para un comentario sobre esta demostración cf. Panza [1989] p. 92 y sigs.

[1417] Como si, en el límite, la línea Dδ fuese una tangente a la curva en un punto T de modo que KDT=THδ. Otra vez, se supone que la curva ha sido linearizada con la primera derivada.

[1418] Cf. Newton [1968] p. 242.

[1419] Cf. Newton [1968] p. 243.

[1420] Cf. Newton [1968] p. 264.

For M^r Newtons[1421] *words in explaining this method are: Jam supponamus Bβ in infinitum diminui et evanescere, sive o esse nihil. Had Bβ or o been considered as infinitely little, he would not have said Jam supponamus Bβ in infinitum diminui.*

La distinción, según Newton, es la que existe entre un procedimiento matemático exacto basado en la geometría de los antiguos, frente a un cálculo más bien aproximativo y propenso a obtener resultado erróneos. La distinción entre un cálculo de magnitudes finitas basado en la geometría de Euclides[1422] y otra de magnitudes infinitesimales que no cuenta con una garantía tal [1423]:

And this way of working being throughout as evident exact & demostrative as any thing in Geometry is justly preferred by M^r Jones to the method of infinitely little quantities: wich proceeding frequently by approximations is less Geometrical & more liable to errors, but yet may be usefull in some cases.

La clave está en distinguir entre lo infinitamente pequeño y lo indefinidamente pequeño, e.d., entre una cantidad que está supuestamente dada y otra que está en proceso de devenir. Newton insiste en que la expresión *o*, es un momento de tiempo indefinidamente pequeño[1424]. La lectura que hace Leibniz del *Analysi* es así errónea en lo referente a la interpretación de los momentos de las fluxiones debido a que los interpreta como magnitudes infinitesimales. Según Newton, al considerar el momento *o* como una magnitud indefinidamente pequeña no hace más que seguir el camino emprendido por Fermat[1425] y Gregory[1426].

Como hemos visto ya[1427], la defensa de Newton del cociente de diferenciales así como sus críticas a una concepción del análisis que entiende los resultados obtenidos como si fueran aproximaciones a la verdad, será retomado por Hegel. Además de ello, la defensa que hace Newton a favor de lo indefinidamente pequeño frente a lo infinitamente pequeño se ajusta al concepto –aunque no a la terminología– del diferencial con el que trabajan tanto Hegel como, en última instancia, el propio Leibniz.

[1421] Téngase en cuenta que el escrito pretende ser anónimo.

[1422] Recuérdese que para Newton "There is not one Proposition in Euclide concerning quantities or figures infinitely small" (in Newton [1968] p. 271).

[1423] Cf. Newton [1968] pp. 264-265.

[1424] Cf. Newton [1968] p. 266: "...he always expresses the letter *o* & uses it for a finite moment or an indefinitely (not infinitely) little part of time". Ibid. p. 271: "The letter *o* represents a finite quantity indefinitely small till the calculation be finished & the whole calculation is performed in finite quantities by the Geometry of Euclide without any error". Ibid. p. 272: "M^r Newton words above cited imply that they are [*o y ov*] considered as finite & only indefinitely small [...] he supposes *o* to be diminished in infinitum & become nothing". Newton no es consecuente con sus mismas indicaciones cuando afirma que "... is multiplied by an infinitely small quantity *o*" (en Newton [1968] p. 267) o "...moments here are infinitely little" (Ibid.).

[1425] De hecho, Newton utilizará la expresión *o* en honor a Fermat: "M^r Newton still uses the letter *o* [...] for the honour of M^r Fermat that it should still be used".

[1426] Cf. Newton [1968] p. 270: "Fermat in his method de maximis et minimis & Gregory in his method of Tangents & Newton [in his] method of the first & last ratios use the letter *o* to signify a quantity not infinitely but indefinitely small & Barrow in his method of tangents uses the letters *a* & *e* in the same manner".

[1427] Cf. el apartado 4.2.3.

6.5. EL NACIMIENTO DE UNA FLUXIÓN

En una Adenda[1428] escrita como muy tarde en el año 1671, Newton presentará por primera vez su concepto de momento último de una fluxión. El momento último –o primero– de la fluxión es aquél en el que el fluente es igual a sí mismo mas su fluxión. La idea del primer y último momento de la fluxión se convertirá en los *Principia*[1429] en el Método de primeras y últimas razones. El primer momento es el momento con el que llega a ser un fluente. El último momento es el momento con el que deja de ser un fluente. Como sabemos ya, Hegel no ahorrará en elogios cuando en la *Wissenschaft de Logik* presente e incorpore la idea de las primeras y últimas razones al movimiento de su lógica. El estudio de esta asimilación será tarea del Capítulo 4. Ahora nos ocuparemos, más bien, del origen de este método en el pensamiento de Newton. Esto nos ayudará a clarificar los términos de fluente, fluxión y momento, haciendo que, sin traicionar el espíritu de Newton, los podamos reformular en el lenguaje de Leibniz, más cercano al nuestro.

El teorema con el que ilustraremos todo esto, es un ejemplo del esfuerzo de Newton por evitar que el cálculo llegue a desvincularse de la representación geométrica. Tanto es así que, siguiendo a Whiteside[1430], podríamos titular el teorema con las palabras "Differentiation of a product: proof by geometrical fluxions".

La prueba en cuestión es la antecesora del Lemma II del segundo libro de los *Principia*[1431]. A diferencia de lo que ocurre en los *Principia,* Newton borrará del manuscrito la mitad de la prueba dedicada a estudiar el caso análogo en el que las fluxiones en vez de con signo positivo, llevan el signo negativo –restan en lugar suman. La siguiente tabla nos ayudará a seguir más facilmente la demostración de Newton.

Fluente	Fluxión	Momento
t	$1=\dfrac{dt}{dt}$	$o=dt$
A	$a=\dfrac{dA}{dt}$	$\mathrm{M^a}=ao=\dfrac{dA}{dt}dt = dA$
B	$b=\dfrac{dB}{dt}$	$\mathrm{M^b}=bo=\dfrac{dB}{dt}dt = dB = ao\dfrac{b}{a}=\mathrm{M^a}\dfrac{b}{a}$
C	$c=\dfrac{dC}{dt}$	$\mathrm{M^c}=co=\dfrac{dC}{dt}dt = dC = ao\dfrac{c}{a}=\mathrm{M^a}\dfrac{c}{a}$
D	$d=\dfrac{dD}{dt}$	$\mathrm{M^d}=do=\dfrac{dD}{dt}dt = dD = ao\dfrac{d}{a}=\mathrm{M^a}\dfrac{d}{a}$

[1428] Cf. Newton [1969] pp. 328-353.
[1429] Cf. Newton [1999] pp. 433-443.
[1430] Cf. la reproducción del manuscrito de Newton en Newton [1969] frontispicio p. 80.
[1431] Principia [1714] p. 255.

Newton comienza[1432] la demostración suponiendo que los fluentes *A*, *B*, *C* y *D* son proporcionales entre si:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

El fluente A se convertira *porfluendo*[1433] en

$A+M^a$

lo mismo ocurrirá con las demás fluentes,

$$B+M^b=B+\frac{b}{a}M^a$$
$$D+M^d=D+\frac{d}{a}M^a$$
$$C+M^c=C+\frac{c}{a}M^a$$

Suponiendo que las proporciones se mantienen tenemos que

$$\frac{A+M^a}{B+M^a\frac{b}{a}}=\frac{C+M^a\frac{c}{a}}{D+M^a\frac{d}{a}}$$

luego,

$$AD+M^aA\frac{d}{a}+M^aD+M^aM^a\frac{d}{a}=BC+BM^a\frac{c}{a}+M^aC\frac{b}{a}+M^aM^a\frac{bc}{aa}$$

dividiendo la expresión por M^a, multiplicando por *a* y eliminando las expresiones iguales AD y BC obtenemos,

[1432] Cf. Newton [1969] p. 330.

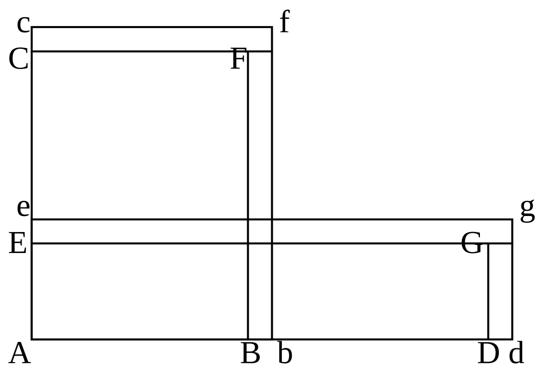
[1433] A diferencia de lo que hace en los *Principia*, Newton borra la demostración análoga de los incrementos negativos o decredimientos de los fluentes. Tal y como afirma Whiteside (en Newton [1969] p. 331 nota 11), la demostración de Newton es correcta únicamente en el caso en el que la relación entre los fluentes sea como la relación que hay entre *x* e *y* en la función $f(x)=y=ax+b$. Si tenemos en cuenta que la condición debe de cumplirse en un entorno infinitesimal de las variables *x* e *y*, podemos ampliar esta condición y exigir que la relación entre los fluentes sea del tipo: $f(x)=y=ax^2+bx+c$.

$$Ad + Da + M^{a} d = Bc + Cb + M^{a} \frac{bc}{a}$$

y si, debido a la infinita pequeñez de M^a, eliminamos las expresiones multiplicada por M^a tenemos,

$$Ad + Da = Bc + Cb \qquad [24]$$

En este punto, al igual que en los *Principia*, Newton se sirve del siguiente dibujo,



Con las siguientes equivalencias entre los fluentes y los lados de los rectángulos,

A= AB
a=ab=fluxión(AB)=fl(AB)
B= AD
b=ad=fl(AD)
C=AE
c=ae=fl(AE)
D=AC

y

d=ac=fl(AC)

la igualdad [24] se nos convierte ahora en,

$$AB \cdot ac + AC \cdot ab = AD \cdot ae + AE \cdot ad$$

Newton supone que los fluentes AB, AC, AD, y AE son incrementados *fluxionalmente* por sus respectivos momentos *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* dando lugar a dos nuevos rectángulos, □Af y □Ag, que debido a la "perpetua" proporcionalidad entre los momentos, serán iguales. Es decir:

□Af=□Ag

con lo que lo serán también iguales los incrementos[1434] de los cuadrados □AF e □AG:

□Cf+□bF=□Eg+□dG

es decir,

$$Ab \cdot Cc + AC \cdot Bb = Ad \cdot Ee + AE \cdot Dd$$

luego,

$$Ab + AC\,\frac{Bb}{Cc} = Ad\,\frac{Ee}{Cc} + AE\,\frac{Dd}{Cc}$$

y dado que las fluxiones son como los momentos[1435],

$$Ab + AC\,\frac{fl(AB)}{fl(AC)} = Ad\,\frac{fl(AE)}{fl(AC)} + AE\,\frac{fl(AD)}{fl(AC)}$$

es decir,

$$Ab \cdot fl(AC) + AC \cdot fl(AB) = Ad \cdot fl(AE) + AE \cdot fl(AD)$$

[1434] Notese que Newton evita introducir en la prueba los momentos al cuadrado y, por lo tanto, las fluxiones al cuadrado. Para ello, evita introducir su equivalente geométrico expresado en los rectángulos □Ff=Bb·Cc y □Gg=Ee·Gg. Volveremos sobre esta cuestión.

[1435] Algo que postula Newton como axioma en Newton [1969] p. 330: "Momenta contemporanea sunt ut fluxiones". Si hacemos uso de las notaciones de la tabla ofrecida más arriba, y si suponemos que el tiempo sobre el que se miden las fluxiones es el mismo, tenemos que $\dfrac{dA/dt}{dB/dt} = \dfrac{dA}{dB}$: es decir, las fluxiones son proporcionales a los momentos.

Es éste el momento en el que Newton introduce el procedimiento de las primeras y últimas razones. En el último y primer momento, el fluente es igual a sí mismo más la fluxión. Esto le permitirá a Newton substituir las expresiones *Ab* y *Ad* por *AB* y *AD* respectivamente. Para ello, como decíamos, los momentos tienen que ser últimos:

Quare in ultimo istius infinitè parvæ defluxionis momento, hoc est in primo momento fluxionis quadrangulorum AF et AG quando incipiunt augeri vel diminui, erit[1436]

$$AB \cdot fl(AC) + AC \cdot fl(AB) = AD \cdot fl(AE) + AE \cdot fl(AD)$$

Newton obtiene de este modo un resultado equivalente a nuestra regla de la derivación del producto cruzado[1437]. En nuestro caso, si partimos de la relación

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$$

es decir,

$$xw = yz$$

su derivada en ambos lados es,

$$xdw + wdx = ydz + zdy$$

Como decíamos mas arriba, en sus *Philosophiea naturalis* p*rincipia mathematica*, Newton volverá a utilizar el recurso a la representación geométrica para obtener el resultado de la derivación del producto. En el segundo Lemma de la proposición 7 del libro segundo de los *Principia*, Newton hace uso de un cuadrado cuyos lados sufren un incremento y decremento iguales[1438]. Newton está interesado en obtener la expresión de los momentos para el producto entre los fluentes *x* e *y*:

[1436] Cf. Newton [1969] p. 334, y la traducción en la p. 335: "Hende at the last moment of that infinitely decreasing fluxion –that is, at the first moment of flux of the rectangles *AF* and *AG* when they start to increase or diminish-, there will be".

[1437] Newton obtiene fácilmente la regla para la derivación del producto en el corolario 7 (Newton [1969] p. 336) substituyendo en la proporción *A:B::C:D*, las expresiones *A*=1 y *D*=*BC*.

[1438] Cf. Newton [1714] p. 225: "Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, seu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera *A* &*B* alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ seu *(x+dx)·(y+dy)-xy*

Para ello recurrirá a la diferencia entre el incremento y el decremento de medio momento de los lados del cuadrado:

$$(x+\frac{dx}{2})\cdot(y+\frac{dy}{2})-(x-\frac{dx}{2})\cdot(y-\frac{dy}{2})$$

obteniendo, con ello, el resultado correcto

$$xy+\frac{xdy}{2}+\frac{ydx}{2}+\frac{dxdy}{4}-xy+\frac{ydx}{2}+\frac{xdy}{2}-\frac{dxdy}{4}=xdy+ydx.$$

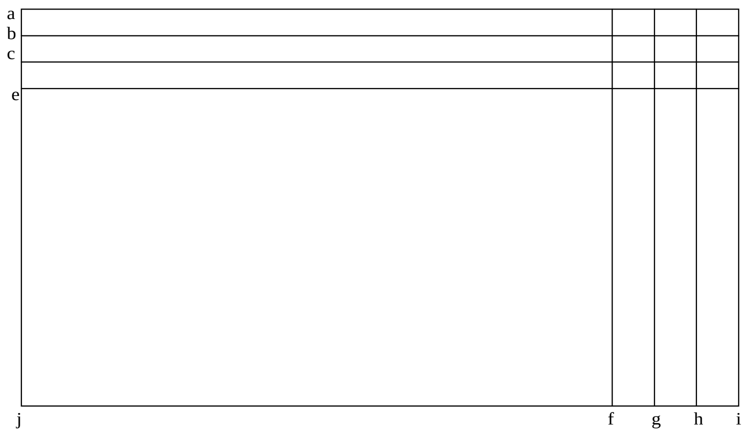
Esta nueva aproximación al producto del cuadrado libera a Newton de tener que ignorar el producto entre los diferenciales. Esto habría obligado a Newton a tener que argumentar recurriendo a la pequeñez de un infinitesimal de orden superior en relación a los infintesimales de orden inferior, para así omitir los primeros. Es decir, la falsa igualación entre $(x+\frac{dx}{2})\cdot(y+\frac{dy}{2})-(x-\frac{dx}{2})\cdot(y-\frac{dy}{2})$ y $(x+dx)\cdot(y+dy)-x\cdot y$ permite a Newton no tener que enfrentarse con el producto de diferenciales *dxdy*. Hegel señalará al respecto los siguiente[1439]:

Man sieht, in diesem Verfahren fällt das Glied, welches die Hauptschwerigkeit ausmacht

La *Hauptschwerigkeit* en cuestión no es otra que el producto entre los diferenciales *dx* y *dy*. De este modo, un procedimiento geométrico se pone al servicio de un cálculo que no podía menos que encontrar problemático el dejar de lado los términos de una serie. Esta dificultad se acentuaba cuando resultaba además que estos términos poseían un significado cualitativo. Para mayor claridad, podemos servirnos del siguiente dibujo:

$AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & menebit excessus *aB+bA*. Igitur lateram incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum *aB+bA*". Cf. la traducción inglesa en Newton [1999] p. 648: "Any rectangle *AB* increased by continual motion, when the halves of the moments, *½a* and *½b*, were lacking from the sides *A* and *B*, was *A-½a* multiplied by *B-½b*, or *AB-½aB-½bA+¼ab*, and as soon as the sides *A* and *B* have been increased by the other halves of the moments, it comes out *A+½a* multiplied by *B+½b*, or *AB+½aB+½bA+¼ab*. Substract the former rectangle form this rectangle, and there will remain the excess *aB+bA*. Therefore the total increments *a* and *b* of the sides there is generated the increment *aB+bA* of the rectangle".

[1439] Cf. Hegel [1978] p. 172.



Utilizamos la siguiente leyenda:

jc=y
jg=x
ca=dy
gi=dx
ce=db=dy/2
fg=gh=dx/2

Newton pretende calcular la superficie *(x+dx)(y+dy)-xy* = *xdy+ydx+dxdy* = □(ji·ja)-□(jg·je) = □(jg·ca)+□(jc·gi)+□(ca·gi). Para evitar el encuentro con el producto entre infinesimales representado por el cuadrado □(ca·gi), Newton decide resolver en vez de ello la superficie expresada por la formula:

$$(x+\frac{dx}{2})\cdot(y+\frac{dy}{2})-(x-\frac{dx}{2})\cdot(y-\frac{dy}{2}) \qquad [25]$$

que es igual a la solución buscada

xdy+ydx

cuando ingoramos la expresión *dxdy*. La ventaja de la expresión [25] es que en él se anulan los productos de diferenciales *dxdy/4* y *dydx/4* entre sí. En el dibujo que proponemos, esto equivale a la igualdad entre las superficies □(fg·ce) y □(gh·cb).

* * * * *

En este punto es importante volver sobre la comprensión de la noción de fluxión que defenderá Newton. En la introducción a su *De Quadratura Curvarum*, Newton desvincula sus fluxiones de los diferenciales de Leibniz. Frente al carácter infinito de los diferenciales, las fluxiones son, o al menos pueden expresarse por, magnitudes finitas[1440]. Por esta razón Newton defenderá el estatuto de magnitud verdadera para las fluxiones frente a los diferenciales.

Nam fluxiones sunt quantitates veræ, differentiæ autem nullam habent certam et veram quantitatem[1441]

El método que hace posible que las fluxiones puedan ser expresadas por magnitudes finitas será presentado en el método de las primeras y últimas razones de los *Principa*[1442]. Es este método el que permite expresar las fluxiones dentro de un límite de cocientes. Si bien el numerador y el denominador, la fluxión *A* y la fluxión *B*, tienden a cero, ello no impide que el límite de estas fluxiones tienda a una magnitud finita. Dos magnitudes finitas que guarden la relación que tienen las dos fluxiones en el momento de su primera o última razón, serán, con ello, magnitudes finitas que expresan tanto las respectivas fluxinones como la razón entre ellas en su momento último o primero. Para que esto sea así es necesario comprender las fluxiones no aisladamente, sino dentro de un cociente de fluxiones. En este sentido, el método de primeras y últimas razones no es otra cosa que un recurso matemático[1443] en defensa de la noción del límite entre magnitudes finitas pero en devenir frente a la postura que defiende la noción de cociente de límites de magnitudes infinitas o infinitesimales. Newton es explícito al respecto:

Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt quam data quavis differentia, nunquam verò transgredi, neq prius quam quantitates diminuuntur in infinitum[1444]

En última instancia, será la naturaleza misma la que dé contenido a las fluxiones de Newton. No en vano ha sido el movimiento mismo el origen de los fluentes:

[1440] La indecisión es del propio Newton. Así, si bien en el texto revisado habla de “fluxiones sunt quantitates finitæ” (en Newton [1981] p. 112), en el manuscrito Newton añade, no obstante, lo siguiente: “Nam præstat aliquando fluxiones per quantitates finitas exponere quam per infinite parvas” (in Newton [1981] p. 113 nota 38. Cf. la trad. p. 114: “For it profits on occasion to express fluxions by finite quantities rather than by infinitely small ones”).

[1441] Cf. Newton [1981] p. 114 nota 38: “For fluxions are true quantities, while differences have no true and certain quantity”.

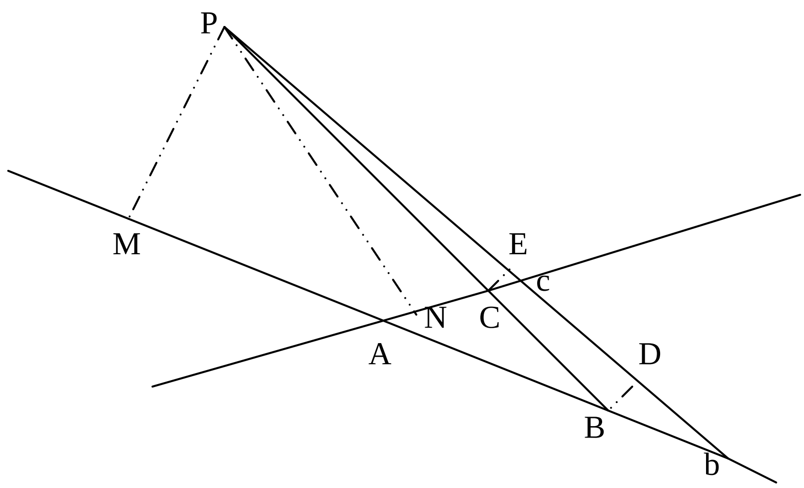
[1442] Véase el apartado 4.2.3.3 al respecto.

[1443] Frente a la poca claridad que acompaña el discurso que maneja los diferenciales, Newton introduce giros tales como “a fin de hablar en términos matemáticos” (*vel ut mathematice loquar*) o “a fin de hablar con exactitud” (*ut accuratè loquar*) cuando introduce su método de primeras y últimas razones. Cf. al respecto Newton [1981] pp. 109 y 110 también p. 111 nota 28.

[1444] Cf. Newton [1974] p. 195. Hay traducción al ingles en el *scholium* del método de primeras y últimas razones de los *Principia* en Newton [1999] p. 442: “Those ultimate ratios with which quantities vanish are not actually ratios of ultimate quantities, but limits which the ratios of quantities decreasing without limit are continually approaching, and which they can approach so closely that their difference is less that any given quantity, but which they can never exceed and can never reach before the quantities are decreased indefinitely”.

sed rei natura postulat primo quod prior obvenit consideratio fluxionum, proptera quod quantitates mathematicæ per motum quidem continuum describi ac generari possunt, non autem per additionem continuam partium minimarum[1445]

Un ejemplo del uso del método de las primeras y últimas razones puede ilustrar lo que estamos diciendo. En el ejemplo siguiente, al igual que ocurre en los demás ejemplos propuestos por Newton, el objeto buscado es el cociente entre las fluxiones. La búsqueda de una fluxión por separado no tiene sentido dentro del método de Newton.



En el dibujo de arriba, sea *PCB* una recta que realiza un movimiento de rotación sobre el punto P. Se pide la relación entre las fluxiones de *AB* con respecto a la de *AC*. Supongamos que la recta *PCB* se mueve a *Pcb* en un tiempo[1446] dado. Trácense las perpendiculares *PM*, *PN*, *BD* y *CE*. Luego, debido a la similitud de los triángulos Δ*bBD* y Δ*bPM* por un lado y Δ*cCE* y Δ*cpN* por el otro, tenemos que,

BD:*CE*::*BP*:*CP*

y

CE:*Cc*::*PN*:*cP*

[1445] Recomponemos así el texto posteriormente rectificado por Newton que en su versión final comienza diciendo “sed ad rerum naturam attendendo [...]”. Cf. Newton [1981] p. 108. Cf. también la traducción de la versión corregida en la p. 109: “but in giving consideration to physical nature there came to be a prior regard for fluxions, seeing that mathematical quantities can be described and generated through continuous motion indeed, but not through the continued addition of minimal parts”.
[1446] Se deduce por la conclusión de la prueba que este tiempo dado no es otro que el instante o momento *o*.

luego,

$$Bb : Cc :: bP \times BP \times PN : PM \times CP \times cP$$

En la última, e.d. primera, razón, las líneas *BP* y *bP* así como *CP* y *cP* coincidirán. El cociente entre *Bb* y *Cc* expresará la relación entre las fluxiones de *AC* y *AB*. La solución con ello:

$$\frac{flux(AB)}{flux(AC)} = \frac{\frac{BP^2}{PM}}{\frac{CP^2}{PN}}$$

Con ello las fluxiones vuelven a aparecer en un contexto, en una relación en la que únicamente adquieren sentido. Esta necesaria vinculación entre magnitudes infinitesimales volverá a aparecer dentro de un Principio físico al que Lagrange pretenderá reducir la entera física proponiendo así una teoría del cuerpo movil que sea una especie de alternativa a la mecánica newtoniana. Nos referimos al Principio de desplazamiento virtual y a la mecánica analítica. Pasemos a ver ahora los detalles de este asunto así como la relevancia del mismo para la lectura de Hegel que estamos proponiendo.

7. CAPÍTULO

DIALÉCTICA DEL *PRINCIPIO DE DESPLAZAMIENTO VIRTUAL*

ἔτι δὲ τὸ αὐτὸ [αἰτία] τῶν ἐναντίων ἐστίν·
ὅ γὰρ παρὸν αἴτιον τοῦδε, τοῦτο καὶ ἀπὸν
αἰτιώμεθα ἐνίοτε τοῦ ἐναντίου, οἷον τὴν
ἀπουσίαν τοῦ κυβερνήτου τῆς τοῦ πλοίου
ἀνατροπῆς, οὗ ἦν ἡ παρουσία αἰτία τῆς σωτηρίας[1447]

El propósito de este capítulo es mostrar la necesidad de una formulación *infinitesimalista* del equilibrio estático. Desde ahí, podremos obtener una fórmula general que sea el Principio al que se reduzcan, a la vez, la Estática y la Dinámica.. Veremos que la versión que hace uso de los infinitesimales para la definición del equilibrio estático, versión que será expresado por primera vez por Galileo, es altamente problemática. No obstante, este carácter problemático no hace acto de presencia una vez que la formulación del Principio haya sido realizado con el instrumental matemático proporcionado por el cálculo infinitesimal. Es únicamente con Galileo, como su primer formulador, y con Stevin, como su primer crítico, cuando el Principio de desplazamientos virtuales[1448] se mostrará en todo su aspecto contradictorio. Después, una vez que la formulación del Principio se realice haciendo uso del cálculo, se disolverá toda reflexión sobre su carácter contradictorio o, a lo sumo, se trasladará de lo formulado a la fórmula, de la *Gedankenexperiment* a la matemática.

Y es que, la dificultad de defender el Principio de desplazamientos virtuales consiste en que define un estado, a saber, el de equilibrio, desde su no tener lugar, –i.e., a partir del desequilibrio. Haciendo uso de la terminología de Newton, podríamos decir que el estado de equilibrio es definido como la primera razón en el que el equilibrio deviene desequilibrio –o,

[1447] Aristóteles, *Física* Β 195a 11-14. Cf. la traducción española en Aristóteles [1996] p. 44: “Más todavía, la misma cosa es causa de cosas contrarias, porque a lo que con su presencia es causa de tal cosa, a esto a veces lo consideramos causa de su contrario por su ausencia: así la ausencia del piloto es considerada causa del hundimiento de un barco, cuando su presencia lo era de su salvación”. En nuestro texto traduciremos ἐναντίος por opuesto y no por contrario.

[1448] Llamamos “Principio de desplazamiento virtual” lo que algunos, como Lagrange, llaman “principe des vitesses virtuelles” y otros, como Sommerfeld (en Sommerfeld [1947] p. 50), el “Principio dei lavori virtuali”, es decir, “das Prinzip der virtuellen Arbeit”.

a la inversa, como la última razón en que el desequilibrio deviene equilibrio El equilibrio comparece únicamente en su pérdida.

Antes del Principio de desplazamiento virtual se disponía ciertamente de una definición de equilibrio. Así Arquímedes definirá el equilibrio para la máquina simple "balanza romana" como el estado de proporción inversa entre la longitud de los brazos y los pesos. La diferencia con respecto al Principio de desplazamientos virtual es que, en el caso de Arquímedes, las fuerzas, al anularse, no llegan a maniferstarse. El estado de equilibrio se definirá precisamente por este "no manifestarse" de las fuerzas. El problema está en que si esto es así, en nada se distinguirían un estado en donde hay fuerzas en equilibrio y otro en donde no hay en absoluto fuerzas. Este problema es el que pretende resolver el Principio de desplazamientos virtuales. Mediante un experimento, digamos, matemático, se deja que las fuerzas que están en equilibrio comparezcan, pero únicamente en el primer *instante* en el que dejan de estar en equilibrio.

Gracias a este Principio, es posible entender los estados dinámicos como unos estados de continuo desequilibrio, -es decir, como unos estados en donde se rompe continua y uniformemente el estado de equilibrio. La continuidad de esa ruptura significa que obtendremos, como resultado de la fuerza, la aceleración [1449] de un cuerpo. El que el romperse tenga lugar uniformemente significa que la aceleración –el cambio de velocidad en relación al tiempo– ha de ser constante.

Una vez comprendido esto, el siguiente paso será intentar reducir los estados dinámicos a los estados estáticos. Para ello será necesario introducir el concepto de sistema de referencia. En Física se distingue habitualmente entre los sistemas de referencia inerciales y los no inerciales. Los primeros son aquellos que o bien no se mueven, o bien lo hacen con un movimiento uniforme rectilíneo. Los segundos son los que no son los primeros, es decir, los que se mueven aceleradamente[1450]. La distinción fundamental entre estos dos sistemas de referencia es que en el primero es la masa inercial en su versión de resistencia el que, digamos, tiene lugar, mientras que en el segundo las fuerzas son resultado de la versión *ímpetus* de la masa inercial y dan lugar, como veremos, a las fuerzas inerciales. Estos dos lados de la masa inercial son explicitamente formulados por Newton. En el capítulo 8 veremos que, siguiendo el espíritu de Einstein, la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitacional no es, contra lo que se suele afirmar en los manuales de física, nada empírico sino que es una igualdad, por así decir, necesaria.

De momento, comencemos por exponer a grandes rasgos el denominado "Principio de d'Alembert". Éste consiste en añadir a la ecuación de fuerzas de un sistema una nueva fuerza denominada fuerza inercial. Con ella obtenemos un estado de equilibrio en el nuevo sistema de referencia. Si antes de la introducción del Principio teníamos únicamente una fuerza que hacía que el cuerpo se moviese acelaradamente, después del Principio tendrémos la misma fuerza contrarestrada por otra con la misma intensidad pero en sentido contrario. Obtenemos así una ecuación del tipo A-A=0, que define el estado de equilibrio. Si en ella multiplicamos las fuerzas por los desplazamientos virtuales obtendremos una expresión con el que poder hallar un punto de unión entre el Principio de velocidades virtuales y el Principio de d'Alembert, – esto es, entre la estática y la dinámica.

[1449] Siempre, claro está, bajo el primer axioma de Newton.

[1450] O para ser mas exactos, los que se mueven con una aceleración constante -o con una velocidad angular constante si el movimiento es circular. Así lo hace por ejemplo Einstein en Einstein [1969] p. 59 y 61. Como se ve, desde Newton, toda la Física está basada en el supuesto de que la fuerza es aquello cuyo resultado es una aceleración constante.

Antes de entrar de lleno en la materia, reconstruyamos el argumento del que será el primer detractor del Principio de desplazamientos virtuales. Simon Stevin, en un apéndice de su *van de Weeghconst* formula, a modo de refutación, un silogismo impecable contra el Principio del desplazamiento virtual. La traducción inglesa dice así[1451]:

E. That which hangs still does not describe a circle;
A. Two gravities of equal apparent weight hang still;
E. Therefore two gravities of equal apparent weight do not describe circles

Con este silogismo, Stevin quiere refutar expresamente los argumentos de Aristóteles y sus seguidores. Stevin se refiere al texto pseudoaristótelico Μηχανικά, que actualmente no es considerado una obra de Aristóteles. Sea ello como fuere, el hecho es que no hay en la Μηχανικά una definición del estado de equilibrio a partir del desequilibrio. Lo único que encontramos en la Μηχανικά[1452] que pueda ser objetivo del silogismo de Stevin es el problema planteado por pseudo-Artistóteles de por qué las balanzas con los brazos más largos son más sensibles que los que tienen brazos más cortos. Es verdad que los brazos de la balanza con los brazos más largos se mueven más que los brazos de la balanza con los brazos menores. Pero con ello no se está afirmando que la balanza se encuentra en equilibrio cuando uno de los brazos se mueve en una determinada proporción.

En cualquier caso, el silogismo sí es perfectamente aplicable a las definiciones del estado de equilibrio que se harán habituales a partir de Galileo. El silogismo niega la posibilidad de hablar de equilibrio cuando ya no hay equilibrio. Si la balanza está en equilibrio entonces no recorre espacio. Dos cuerpos con pesos iguales están en equilibrio, luego no habrá un espacio recorrido por la balanza[1453].

Algo más *naiv* resulta otro frente contra este Principio, que cuestiona no ya el Principio mismo, sino la posibilidad de que tenga lugar aquello que el Principio define: el estado de equilibrio. Así Fourier, en su *Mémoire sur la statique contenant la Démostration du Principe des vitesses virtuelles et la Théorie des Moments*, negará que el estado de equilibrio objeto del tratado tenga lugar en la naturaleza[1454]. Con el mismo fundamento se podría argumentar que en la naturaleza tampoco hay estados de caida libre, sino que la aceleración que el físico predice se desvía de la que tiene lugar en la naturaleza por motivo del rozamiento del aire etc. En cualquier caso, en contra de lo que podría parecer, el desajuste con la *realidad* no es producto de un exceso de teoria sino de una falta de ella[1455].

En el mismo tratado Fourier distinguirá entre “equilibre” y “stabilité”. Si bien en el primer caso la expresión [7] es igual a cero, en el estado de “stabilité” puede ser también positivo. Es decir, un sistema en equilibrio puede producir trabajo si antes del desplazamiento

---

[1451] Cf. Stevin [1955] p. 509. El texto original es el siguiente: “E. Dat stil hangt en beschrÿst gheen rondt; A. Twee euestalwichtighe hanghen stil; E. Twee eustalwichtighe dan en beschrÿuen gheen rondt”.
[1452] Cf. Aristóteles [1970] p. 847 y sig.
[1453] Es decir, resulta absurdo “eine Bedingung dafür, dass die Kräfte einander das Gleichgewicht halten, herzuleiten aus der Annahme, dass Bewegung auftritt, dass also die Kräfte nicht im Gleichgewicht sind” (en Dijksterhuis [1956] p. 278).
[1454] Cf. Fourier [1890] p. 502: “L’équilibre, tel que nous venons de le considérer, est un état abstrait que la nature ne présente jamais”.
[1455] Cf. Kant [VIII] p. 276.

virtual aplicado el sistema se encontraba en un estado de estabilidad. Con ello, vemos que la distinción de Fourier entre “equilibre” y “stabilité” es la misma que la distinción que establece Jacobi entre los equilibrios labiles y los equilibrios estables[1456]. El ejemplo que ilustra el equilibrio lábil es el del péndulo que se encuentra en posición perperndicular sobre el punto de sujeción. En este caso, dice Jacobi, un desplazamiento virtual sí haría desplazar el pendulo en dirección al impulso impreso con lo que la expresión [7] sería positiva. El ejemplo de equilibrio estable es el del mismo péndulo cuando se encuentra situado perpendicularmente, pero esta vez bajo el punto de sujeción.

Con esta distinción, tanto Fourier como Jacobi pretenden enfrentarse a Lagrange. Éste, en su *Mécanique Analitique*, había identificado los estados de equilibrio y los estados en los que la expresión [7] es igual a cero[1457]. Jacobi considera poco atinada la afirmación de Lagrange. Es verdad que siempre que la expresión [7] es igual a cero hay estado de equilibiro, pero no lo es que, siempre que haya estado de equilibrio, [7] tenga que ser cero –i.e. no hay implicación recíproca entre ambas proposiciones. El contraejemplo son los estados de equilibrio labiles o instantáneos. En esta clase de equilibrio, un impulso cualquiera, por mínimo que sea, rompe con el estado de equilibrio haciendo que el sistema realice trabajo hasta que entre en un estado de equilibrio estable. Si aceptamos la distinción de Jacobi, tendríamos que concluir que el estado de equilibrio de la balanza romana es el de un equilibrio labil. En ese caso, una vez imprimido el impulso a la balanza, ésta se moverá en esa dirección hasta que dé con el equilibrio estable. Con ello, la expresión [7] no sería igual a cero y, consecuentemente, [7] no sería equivalente a la expresión clasica de equilibrio para la balanza romana, que afirma la proporcionalidad inversa entre la longitud de los brazos y los respectivos pesos. Es más, si el equilibrio de la balanza romana es denominado labil, no hay razón para no hacer lo mismo con el equilibrio de las demás máquinas simples. El resultado será así que la *Mécanique Analitique* define sólamente las condiciones de equilibrio estables que no son, como creemos, las de las máquinas simples. Con ello, la *Mécanique Analitique* se ocuparía exclusivamente de las condiciones de equilibrio de los sistemas que únicamente pueden desplazarse virtualemente en direcciones tales que el hacerlo tiene como consecuencia elevar su centro de gravedad.

En definitiva, no creemos que el equilibrio de las máquinas simples sea asimilable a ninguno de los dos ejemplos que utiliza Jacobi para ilustrar lo que entiende por equilibrio estable y labil. No sólo defendemos que la igualdad de la expresión [7] a cero es la que proporciona la definición de equilibrio para las máquinas simples, sino que, además, consideramos que el equilibrio de dichas máquinas no es, si nos basamos en los ejemplo de Jacobi, ni estable ni labil. El equilibrio no es estable por que un desplazamiento virtual hace bajar el centro de gravedad del sistema. Pero tampoco se trata de un equilibrio labil por que no desaparece[1458] una de las fuerzas agentes inmediatamente después de darse el desplazamiento *infinitesimal*. En fin, parece que la distinción entre los equilibrios labiles y los estables obedece a la dificultad de asumir el equilibrio de las máquinas simples -dificultad que estriba en la ambigüedad de tales equilibrios. Por una lado, la perdida del estado de equilibrio no debe poder producir trabajo ya que, de lo contrario, no habrá una correspondencia entre la definición clásica del equilibrio y la definición basada en los desplazamientos virtuales. Por otro lado, el equilibrio tampoco parece que puede ser estable por que es evidente que cualquier desplazamiento imprimido rompe con el estado de equilibrio.

[1456] Cf. Jacobi [1996] p. 31.

[1457] Cf. Lagrange [1888] p. 24

[1458] Así, en el caso del péndulo que se sitúa perpendicularmente sobre su punto de agarre, un desplazamiento mínimo en una dirección es suficiente para que sea anulada la posibilidad de que se ejerzan fuerzas en la otra dirección bajo las condiciones iniciales del sistema.

7.1 UNA FALTA QUE ES PRESENCIA[1459]

En su *Física*, Aristóteles da cuenta de los distintos sentidos que tiene la palabra *causa* (αἰτία). El principal problema de la división aristotélica consiste en que distintas causas pueden ser causa de lo mismo de un modo no accidental[1460]. En el caso que a nosotros nos interesa, la misma cosa será causa de cosas contrarias dependiendo de si está ausente (ἄπειμι) o presente (πάρειμι). En lo que sigue, pondremos en relación los conceptos fundacionales de la Estática con esta cuestión, que recoge la cita que abrió este capítulo.

Para ser exactos, la distinción que introduce Aristóteles en este parágrafo no tiene como objeto el de dar con un nuevo tipo de causalidad, sino, más bien, el de introducir una distinción en el modo de ser de la causalidad. Este modo de ser se define, como hemos dicho, como ausente o como presente. La distinción abarca así a las cuatro causas que han sido definidas en el parágrafo anterior. Es decir, cualquiera de ellas puede actuar como ausente o como presente.

La presencia o ausencia de una causa no es algo que se pueda afirmar unilateralmente, es decir, -i.e. constatando simplemente que tal presencia o ausencia ha tenido este o aquel resultado. La ausencia/presencia de un efecto sólo es afirmable si sabemos que con su presencia/ausencia obtendríamos el efecto opuesto. Es decir, sabemos de la ausencia de una causa por que sabemos que su presencia produciría el efecto opuesto al que presenciamos mientras ella está ausente y, a la inversa, sabemos de la presencia de una causa por que sabemos que su presencia produciría el efecto opuesto al que presenciamos. Conocer la

[1459] Obviamente no nos referimos aquí a esa forma particular de presencia que es ausencia llamada Ψυχή. Sobre este punto cf. Míguez Barciela [2008] p. 21.

[1460] Téngase en cuenta que, cuando distintas causas o series causales coinciden en el resultado accidentalmente, nos las habemos con lo espontáneo (τὸ αὐτόματον) que comprende dentro de él a la fortuna (τύχη). Cf. sobre este punto *Física* 195b 31 y sig, *Metafísica* 1025a 14 y sig. El esquema al respecto podría ser el siguiente: dentro de lo que ha llegado a ser (τὸ γιγνόμενον) unas cosas (1) han llegado a ser para algo (ἕνεκά του) y otras (2) lo han sido sin para algo. Dentro de lo que ha llegado a ser para algo, distinguimos entre lo que ha sido para algo (1.1) por naturaleza y lo que ha sido para algo (1.2) por el entendimiento. El grupo 1) es de las cosas que llegan a ser por necesidad, siempre y generalemente. El grupo 2) es lo que carece de estas características, es lo que tiene lugar accidentalmente. Pero el que haya tenido lugar accidentalmente lo decimos desde el grupo 1). No hay cosas que ocurran en el grupo 1) y otras que ocurran en el grupo 2). Todo lo que ocurre, incluso todo lo que no está más allá del raciocinio (παράλογος), pertenece al grupo 1). Ahora bien, a veces lo que ha tenido lugar en el ámbito de las cosas que son para algo lo ha sido sin para algo. Entonces estamos ante algo espontáneo. Si, en particular, la serie de 2) hace acto de presencia, no ya en 1), sino en 1.2), estamos ante un suceso que ha tenido lugar por fortuna. A lo que acompaña a la causa para algo sin que sea ella misma necesaria para ese algo lo llama Aristóteles causa por concurrencia. De este modo, haciendo uso de esta acepción de “causa por concurrencia”, podemos decir que la diferencia entre la causalidad por concurrencia y la causalidad espontánea consiste en que ésta es exclusiva: no hay en ella una causa para algo y otras “causas” que la acompañen. Todo lo que “explica” el tener lugar de algo espontáneo pertenece al grupo 2). Lo problemático es que en este grupo ni hay explicación ni hay todo. No hay explicación por dos motivos: falta la causa necesaria del para algo (a diferencia de la causalidad por concurrencia) y no hay un todo de causas. Efectivamente, en lo que es espontáneamente no hay un todo debido a que la causalidad en este ámbito es, en sentido estricto (ἁπλῶς), infinita. Por ello, esta causalidad no es ninguna causalida en Aristóteles. Frente a este marco, el pensamiento mágico no se caracterizaría tanto por reconocer lo que hemos caracterizado con Aristóteles lo *paralógico*, sino por negarle siquiera el derecho de poder hacer acto de presencia en el grupo 1). El pensamiento mágico no es irracional sino, por decirlo así, hiperracional, es decir, superdeterminista. Cf. al respecto Lévi-Strauss [1962] p. 23: “la pensée magique [...] se distingue moins de la science par l’ignorance ou le dédain du déterminisme, que par une exigence de déterminisme plus impérieuse et plus intransigeante”.

causalidad de algo es saber que con su ausencia obtendríamos el resultado opuesto. Si hacemos uso de la notación habitual de la lógica podríamos escribir esto así: dado (¬B→¬A) tenemos que (A→B) y, viceversa, dado (A→B) tenemos que (¬B→¬A). En definitiva, lo que tendrémos no es ni lo uno ni lo otro, sino los dos: (A→B) si y sólo si (¬B→¬A).

Vemos así que afirmar la ausencia/presencia de la causa exige demostrar que, en un "mundo contrafáctico", su presencia o ausencia darían lugar al efecto opuesto. La remisión a lo que hemos llamado mundo contrafáctico se expresa en aristóteles mediante el verbo *ser* en imperfecto de indicativo: ἦν. En este caso, el tiempo verbal caracteriza el fondo sobre el que tienen lugar unos acontecimientos hipotéticos[1461]: no es que la acción haya tenido de hecho lugar en el pasado, sino que había podido tener lugar. La traducción alemana, fiel al sentido contrafáctico del pasaje, vierte el verbo en imperfecto por el modo en subjuntivo "gewesen wäre"[1462]. La misma causa tiene lugar en los dos mundos –en uno como ausente, en el otro como presente[1463].

En este sentido, el sentido de las negación del imperfecto en los verbos con significado de finalidad, bien ha podido estar en el origen del intento de expresar algo que tiene lugar en forma de ausente. Ello es que la negación en imperfecto de los verbos con significado de finalidad como πείθω o δίδωμι no afirma el no tener lugar de la acción, sino el del objetivo de la acción. De este modo, οὐκ ἔπειθον no se traducirá por "no hablé" sino por "(hablé y) no convencí"[1464]. La acción ha tenido pues lugar, sólo que no con el resultado esperado, con el fin cumplido. No ha habido no tener lugar en absoluto de una acción, sino que ha tenido lugar una acción sin la presencia de su fin. Tenemos así que la negación en imperfecto tiene como significado el del tener lugar de una ausencia. Precisamente un significado que es análogo al que utiliza Aristóteles para expresar el tener lugar de una causa en forma de ausencia[1465].

Si bien todo lo que acabamos de decir vale sobre la causalidad en general, hay modos de causación, según Aristóteles, en las que la relación causa-cosa resulta ser más estrecha, únicamente representable bajo el esquema del bicondicional. Este es el caso del ejemplo del piloto de la nave. Si hacemos uso de las definiciones p = "presencia del piloto", $\neg p$ = "ausencia del piloto", h = "hay hundimiento" y $\neg h$ = "no hay hundimiento", lo que Aristóteles dice es lo siguiente: $(\neg p \rightarrow h) \rightarrow (p \rightarrow \neg h)$. Con esto sabemos que el presupuesto de fondo, la premisa que sostiene esta deducción tiene que ser: $p \leftrightarrow \neg h$..

En cualquier caso, tenemos que la ausencia de la causa no es simplemente su no tener lugar. Si expresamos esto representando sobre el mismo mundo los dos mundos, el contrafáctico y el no contrafáctico, entonces ya no estaremos hablando de un causa en forma de ausencia y de presencia, sino de una magnitud negativa o positiva. Del mismo modo en que las ausencia de la causa no era el mero no tener lugar de la misma, las magnitudes negativas no son negaciones de las magnitudes, sino, como dice Kant, algo estrictamente positivo:

[1461] Cf. Schwyzer [1950] p. 559: "das imperfekt ist im Alt- wie im Neugriech. am Platz, wenn eine Handlung als Situation geschildert werden soll, die den Hintergrund oder die Folge eines Geschehnisses bildet".
[1462] Cf. Aristóteles [1987] p. 65.
[1463] Adelantando algo los acontecimientos, hay que recordar que la definición del equilibrio estático hace uso de estos mismos enunciados contrafáticos. Véase por ejemplo Duhem [1992] p. 44: "Dans l'état d'équilibre, la force n'a pas d'effet actuel; elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement; mais on doit toujours la mesurer par l'effet qu'elle **produirait** si elle n'était pas arrêtée" (subrayado nuestro).
[1464] Cf. Schwyzer [1950] p. 558.
[1465] Así en el ejemplo de Aristóteles, el tener lugar del piloto en tanto que ausente.

Denn es sind die negative Größen nicht Negationen von Größen, wie die Ähnlichkeit des Ausdrucks ihn hat vermuten lassen, sondern etwas an sich selbst wahrhaftig Positives, nur was dem andern entgegengesetzt ist.[1466]

Kant[1467] distinguirá así entre la oposición lógica y la oposición real (*real*). La primera distinción es la que tiene en mente Aristóteles cuando piensa la ἐναντίος y la que es pilotada por el Principio de no contradicción: si se ha ganado una batalla naval entonces es falso que se haya perdido y viceversa. El resultado de afirmar dos predicados lógicamente opuestos sobre el mismo sujeto es lo que Kant denomina *nihil negativum irrepraesentabile*. Por otro lado, dos predicados que se oponen realmente se suprimen (*Aufheben*) el uno al otro dando lugar a algo representable, a algo que Kant denominará un *nihil privativum repraesentabile*. Un espacio en el que se representen las magnitudes negativas y positivas es un espacio regionalizado, un espacio con sentido, un espacio que, cuando se trata de representar en él a los cuerpos junto con otros cuerpos, consta de seis dimensiones[1468] y tres direcciones. Un espacio en el que el sistema de representación hace de mediación del fenómeno representado. Un espacio, en suma, en el que la elección del cero, del origen[1469], no podrá hacerse más que *a posteriori*, a partir de los datos del problema en cuestión. Cada representación queda con ello remitida al sistema de las representaciones[1470], sólo en él adquiere sentido.

Un sistema de representación bidimensional en donde se representen no ya las distancias, direciones y sentido de los cuerpos en relación al orígen, sino la masa[1471] de los mismos, es el de la balanza. En efecto, como ya hemos visto en el capítulo 1 de la primera sección, la construcción de la balanza postula la proporcionalidad entre sus brazos y las respectivas masas para el estado de equilibrio. Si llamamos a la longitud de los brazos "A" y

---

[1466] Cf. [Ak. II] p. 168. Podemos aplicar el mismo sistema de representacíon a los contenidos cognoscitivos o a lo que Frege llamará Pensamientos. Con ello, la expresión "¬p" no significará la negación de una afirmación, sino la afirmación de una negación. Esta conclusión será expresamente afirmada por Frege cuando comienza a hacer uso de la expresión "├". El pensamiento toma el lugar de las magnitudes. Cf. Tugendhat [1983] p. 210 y sig.

[1467] Cf. Kant [Ak. II] p. 171 y sig.

[1468] A saber, arriba, abajo, izquierda, derecha adelante y detrás. Cf. Aristóteles [1996] p. 90 y *Física* 208 b12 y sig.

[1469] Un algo de sin-sentido que, sin embargo, es necesario para la instauración del dispositivo de representación del sentido. Este algo, este vacio, puede ser, como hemos visto, el origen de las coordenadas cartesianas, pero puede ser también, por ejemplo, una carta. Piénsese así en el relato *The Purloined Letter* de Poe en el que el trama intersubjetivo está estructurado tomando como punto de referencia, de origen, una carta de cuyo contenido nada sabemos. Es únicamente Dupin, alguien capaz de saltar sobre su propia sombra y ponerse así en el lugar de cualquiera (como la niña del juego del mismo relato en el que se gana si se es capaz de ponerse un paso más allá del meramente ponerse en el lugar del otro) el que consigue dar con la carta inaugurando así una nueva red simbólica en donde el policía ocupa la posición del rey (el lugar 1: de los que no ven), el ministro la de la reina (el lugar 2: de los que ven que los del 1 no ven pero se engañan a sí mismos creyendo que lo que esconden está oculto) y Dupin el del ministro (el lugar 3: de los que ven lo que los de 1 y 2 no ven). Así, el error del policía es creer que el ministro es alguien en cuyo lugar no hay por que ponerse -ni siquiera puede ponerse por que es un loco, –uno que no tiene lugar. La carta inagura así una nueva Topología. El sinsentido de ir de demasiado lejos – allá, por ejemplo, en donde caminemos hacia donde caminemos ya no lo haremos más que en direción al sur– en ese ponerse en el lugar del otro viene recogido en aquel chiste judío que dice algo así como esto: "¿pero por qué me mientes? si, si ¿por que me estas mintiendo diciendome que vas a Krakow para que me crea yo que vas a Lemberg cuando en verdad resulta que vas a Krakow?"). Sobre este punto cf. Lacan [1966] pp. 11-61.

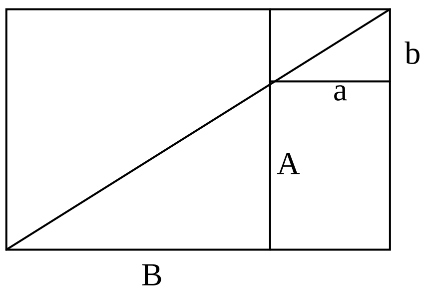
[1470] Con ello abandonamos el mundo *nouménico* para entrar en el fenoménico donde, como hemos visto, cada representación se remite a un sistema de representación. En general, este cero o lugar vacio que, en principio, puede ser llenado por cualquiera, es lo que en la Filosofía crítica se denominará sujeto transcendental.

[1471] O la superficie de una figura. Para este último caso cf. Arquímedes [2002] p. 329 y sig. Cf. para el texto original Arquímedes [1972] p. 426 y sigs.

“B”, y las masas que cuelgan de ellos “a” y “b”, tenemos que en equilibrio se cumplirá la proporcionalidad siguiente:

A:B::b:a [1]

Con ello, conseguíamos medir una magnitud intensiva haciendo uso de dos magnitudes extensivas. Si tomamos a “a” como la unidad de la magnitud intensiva “masa”, obtenemos que la masa de "b" es igual a *A:B*, donde *A* y *B* son las magnitudes extensivas medibles en cada caso particular. Hemos expresado la relación de analogía evitando hacer uso de la expresión para la identidad con el fin de evitar que el lector moderno manipule la expresión [1] de tal forma que obtenga en ella magnitudes negativas y, por consiguiente, el cero. En la definición del equilibrio nos ceñimos a su definición griega clásica tal y como la encontramos, por ejemplo, en Arquímedes[1472]. Para Arquímedes, y para un matemático griego en general, la proporción (λόγος) tenía un sentido estrictamente geométrico siendo algo así como la pendiente de un triángulo con los lados iguales a lo que nosotros llamamos numerador y denominador, es decir, a “a” y a “b”. De este modo, tener la misma proporción significa estar sobre la misma diagonal[1473]. La igualdad entre proporciones expresada por (1) tendría así la siguiente representación geométrica:



El problema de la igualdad entre las proporciones es que tiene un carácter absoluto, es decir, independiente a un espacio de representación en donde cobran sentido. Esto impide la completa comprensión del estado de equilibrio. La expresión “::” para la proporción de las proporciones no es capaz de expresar la interdependencia que se da entre las dos proporciones en un estado de equilibrio estático. La expresión “::” no puede afirmar que las proporciones tienen únicamente sentido dentro de la fórmula completa. Sin embargo, el equilibrio no consiste en que haya por un lado una proporción y por otro lado otra proporción que luego resultan ser proporcionales entre sí. Consiste, más bien, en que una proporción es la que es precisamente porque la otra es la que es. La proporción entre la longitud de los brazos es la que es por que la proporción entre las masas es la que es y viceversa. Es más, no sólo es necesario expresar esto último, sino también el hecho de que el estado que pretendemos describir es un estado de equilibrio, un estado cuya forma de mostrarse es, precisamente, el de no manifestarse. Veremos en lo que sigue que el cumplimiento de todas estas condiciones no se dará plenamente hasta la formulación del Principio de desplazamiento virtual por

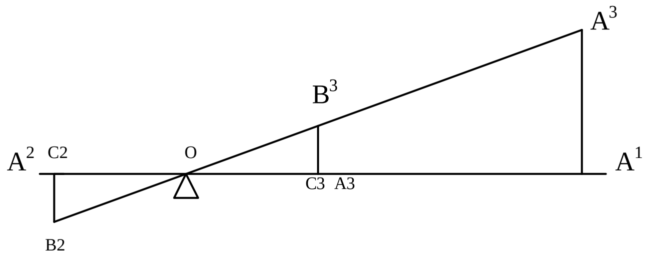
[1472] En la proposición 6 de su *Sobre el equilibrio de los planos*. Cf. Arquímedes [2002] p. 192 y Arquímedes [1972] p. 124.
[1473] Cf. Artmann [2001] p. 124 y sig.

Lagrange. Con ello, se hará patente que sólo una definición dinámica es una definición plenamente consecuente del equilibrio estático

Antes de comenzar con esta tarea, resulta necesario exponer, aunque sea brevemente, qué es lo que no entendemos por Principio de desplazamiento virtual. Para ello vamos a tener que enfrentarnos con las opiniones de E. Dijksterhuis[1474], E. Mach[1475] y P.Duhem[1476]. De acuerdo a estos autores sería Jordanus Nemorarius el primero en formular el Principio de desplazamiento virtual. Éste, en su *Elementa super demostrationen ponderis*[1477] demuestra por reducción al absurdo el equilibrio de una balanza con brazos de distinta longitud[1478]. Para ello, Jordanus se basa en la definición de equilibrio de una balanza de brazos iguales y masas iguales. El *reductio ad absurdum* consiste en mostrar que en caso de que no haya estado de equilibrio, se sigue una contradicción.. Para su demostración, Jordanus no puede ni tiene que hacer uso de las magnitudes negativas ni de entidades infinitesimales. La suya es una demostración meramente estática, una demostración que tiene un carácter meramente negativo: la demostración refuta las afirmaciones que niegan el estado de equilibrio, sea por exceso, sea por defecto. Ambas tesis, la que afirma el no equilibrio por defecto, como la que afirma el no equilibrio por execeso, son falsas. El desequilibrio no lo es ni por defecto ni por exceso.

Pero veamos[1479] cómo demuestra Jordanus el estado de equilibrio de una balanza romana. Los axiomas de los que parte Jordanus son dos. Uno afirma el estado de equilibrio para una balanza con brazos iguales y pesos iguales. El otro es la denominada ley de oro de la mecánica: si una fuerza puede elevar un peso *X* a una altura *A*, es también capaz de elevar un peso *n* veces mayor que *X* a una altura n veces menor que *A*.

El procedimiento por reducción al absurdo consitirá en este caso en lo siguiente: partir de un estado que se sabe es de equilibrio para ver que se incurriría en contradicción si no fuese tal el caso. Sea dado el dibujo siguiente:



En donde los pesos G^1 y G^2 cuelgan de A^1 y A^2 respectivamente. Se supone que la relación entre ellas es la siguiente:

[1474] Cf. Dijksterhuis [1956] p. 277.
[1475] Cf. Mach [1912] p. 102.
[1476] Cf. Duhem [1905] p. 121: “ce principe [le principe des déplacements virtuels] transparait si clairement qu’il est impossible de le méconnaitre”.
[1477] Seguimos la reproducción de la demostración reproducida por Dijksterhuis en loc. cit.
[1478] Una demostración análoga para el caso del plano inclinado tiene lugar en su *Opusculum de Ponderositate* reproducida también en Dijksterhuis [1956] p. 279.
[1479] Seguiremos para ello la exposición de Dijksterhuis en Dijksterhuis [1956] p. 277.

$G^1/G^2= OA^2/OA^1$

Es decir, se parte de un estado de equilibrio que se demostrará por reducción al absurdo. Las dos posibilidades del absurdo son que el desequilibrio tenga lugar por exceso o que tenga lugar por defecto en relación a[1480], pongamos, el peso G^2. Jordanus examina únicamente el primer caso presuponiendo en el lector una comprensión suficiente como para ver en el otro caso un mero análogo del primero.

Sea pues el absurdo consistente en que la balanza se encuentra en desequilibrio por exceso del peso G^2. En vez de considerar los segmentos del círculo A^2B^2 y A^1B^2 trazados supuestamente por la balanza, Jordanus considera los espacios C^2B^2 y C^1B^1 proporcionales a los mismos. Con ello, la ecuación inicial adquiere la forma:

$G^1/G^2= OA^2/OA^1= C^2B^2/ C^1B^1$

Sea dada una distancia OA^3 igual a OA^2, y cuelge el peso G^2 en el punto A^3 en lugar del peso G^1 en el punto A^1. Si $OA^3= OA^2$ entonces $C^3B^3=C^2B^2$, luego la igualdad inicial será:

$G^1/G^2= C^3B^3/ C^1B^1$

Por otro lado, sea la relación entre los dos pesos dada por $G^2=n\cdot G^1$. luego tendremos que

$G^1/G^2= G^1/ n\cdot G^1=C^3B^3/ C^1B^1$

es decir, $C^3B^3= C^1B^1/n$. Con ello, la ley de oro de la mecánica permite afirmar la condicional siguiente:

“A: si el peso G^2 fuese capaz de mover el peso G^1 a B^1

entonces

B: el mismo peso G^2 sería capaz de mover un peso mayor $G^2=n\cdot G^1$ a una distancia proporcionalmente menor $C^3B^3= C^1B^1/n$ ”

Ahora bien, por el axioma de equilibrio de la balanza de brazos iguales y pesos iguales, sabemos que la conclusión *B* es falsa. Por *modus tollens*, la afirmación A ha de ser también falsa: G^2 no es capaz de mover el peso G^1 a B^1. La prueba del desequilibrio *por defecto* es

[1480] En lo que sigue, la expresión “por exceso” querrá decir “por exceso por relación al peso G^2”, es decir, la balanza se ve inclinada en el sentido en el que apunta la fuerza G^2.

análoga. Con ello se demuestra el estado de equilibrio de una balanza en donde las fuerzas se encuentran en proporción inversa a la longitud de los brazos.

A esta prueba meramente negativa se contrapone la prueba positiva que es la que denominamoremos el Principio de desplazamiento virtual. Como vamos a ver, el Principio de desplazamiento virtual define el estado de equilibrio desde el estado de desequilibrio. La tesis y la antítesis son ambas verdaderas, sólo que lo son para, digamos, un momento infinitesimal. Esta definición del estado de equilibrio desde el desequilibrio, esta definición que afirma la contradicción del estado de equilibrio es lo que denominaremos Principio de desplazamiento virtual. De este modo, la diferencia entre Jordanus y Lagrange es la diferencia que hay entre una demostración indirecta y una demostración directa, una demostración por reducción al absurdo y una sin reducción al absurdo, en definitiva, es la diferencia que hay entre una demostración dialéctica y una demostración especulativa. La demostración de Jordanus es análoga a las demostraciones de *exhaustion* de Euclides en los que no se hacía uso de elementos indivisibles ni, con mayor razón, de infinitesimales. El Principio de desplazamiento virtual sí hace uso, como veremos, de los infinitesimales y de ahí que no pueda decirse que Jordanus sea el que lo formula por primera vez.

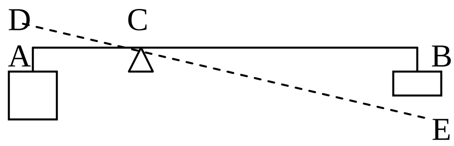
7.2 LA DEFINICIÓN DEL EQUILIBRIO EN GALILEO

La definición galileana del equilibrio estático sorprende por su fidelidad fenomenológica. Una de las razones para ello es, sin duda, el que Galileo carace de los medios matemáticos para expresar lo que pretende expresar. En Galileo, la imposibilidad de *facto* de recurrir al lenguaje del cálculo hace que el intento de expresar el estado de equilibrio se convierta en un verdadero problema. En este sentido, el uso de la notación del cálculo a partir de los trabajos de Leibniz tendrá como una de sus consecuencias el de ocultar el aspecto problemático que subyace bajo el concepto del infinitesimal. El saber manejar el símbolo en cuestión dará pie a creer que el concepto que es representado por tal símbolo es algo asimismo no problemático –en definitiva, algo ya sabido. Como tendremos ocasión de ver en el capítulo 4, únicamente con el destierro de los infinitesimales del reino de lo cuantitativo –algo formulado matemáticamente por Weierstrass y defendido antes por Galileo, Leibniz o Hegel– se conseguirá eliminar el lastre problemático de los infinitesimales.

El problema de Galileo resulta ser así el de definir lo que nosotros podríamos llamar un infinitesimal. Y el primer problema con el que se encuentra uno al respecto es el de decir si el infinitesimal es algo o no es nada. Este problema surge únicamente cuando se pretende considerar al infinitesimal en sí mismo, fuera del cociente de infinitesimales. Veremos que Galileo se encontrará efectivamente con este problema y que su fidelidad fenomenológica le llevará a afirmar que, por un lado, el "infinitesimal" es algo pero que, por otro lado, es también nada. El lugar donde ocurre todo ello es su *Mecanica*[1481].

Consideremos en primer lugar una balanza romana tal y como es dibujada en la siguiente figura:

[1481] Cf. Galileo [1943] pp. 147-191.



Por definición la balanza se encuentra en equilibrio en AB y se procede a romper el equilibrio dando un mínimo empujón en el punto B en dirección a E o, lo que es lo mismo, en el punto A en dirección a D:

[...] considerisi la libra AB divisa in parti diseguali nel punto C, ed i pesi, della medesima proporzione che hanno le distanze BC, CA, alternatamente sospesi dalli punti A,B: è già manifesto come l'uno contrapeserà l'altro, e, per consequenza, come, se a uno di essi fusse agiunto un ***minimo*** *momento di gravità, si moverebbe al basso inalzando l'altro; sì che, aggiunto* ***insensibile*** *peso al grave B, si moveria la libra, discendendo il punto B beso E, ed ascendendo l'altra estremità A in D.* [1482]

Lo que Galileo llama *minimo momento di gravità* no es otra cosa que lo que más tarde se denominará desplazamiento virtual de una balanza o, en general, de un sistema en equilibrio. Este desplazamiento tiene, por un lado, un ser, es algo (*minimo*) pero es, por otro lado, también una nada (*insensibilie*). En esta dualidad se basa el carácter contradictorio de esa subvariedad de infinitesimales que son los desplazamientos virtuales. Galileo expresa esta ambivalencia con todo su contenido paradójico y termina concluyendo consecuentemente:

E perchè, per fare descendere il peso B, ogni ***minima*** *gravità accresciutagli è bastante, però, non tenedo noi conto di questo* ***insensible***, ***non faremo differenza dal potere un peso sostenere un altro al poterlo movere.***[1483]

Es decir, Galileo considera iguales el estado de equilibrio y el estado del primer "instante" de desequilibrio. Es precisamente este primer[1484] instante de desequilibrio el que servirá para definir el estado de equilibrio. La exigencia de que el instante ha de ser el primero no es únicamente exigida por la necesidad de definir algo desde el lugar donde ese algo comienza a dejar de tener lugar, sino que es, a su vez, exigida por el hecho de que una balanza cambia su *gravitas secundum situm*[1485] en cada lugar de su trayectoria de desequilibrio, con lo

[1482] Cf. Galileo [1943] p. 163-164. (nuestro subrayado).
[1483] Cf. Galileo [1943] p. 164.
[1484] Primer instante de desequilibrio o, como diría Newton, el último instante de desequilibrio, dependiendo del sentido en el que nos movamos.
[1485] Cf. Descartes [1668] p. 14. Cf. también Haas [1914] p. 8. Sobre la necesidad de recurrir a los infinitesimales debido al cambio continuo del *gravitas secundum situm* cf. Duhem [1905] p. 337: "Lorsqu'on impose un déplacement à une machine par l'intermédiaire de laquelle deux poids se tiennent en équilibre, l'un d'eux monte et l'‘autre descend ; le travail effectué par le poids moteur est égal au travail subi par le poids résistant ; mais cette

que las condiciones mismas del equilibrio se verían, con ello, alteradas. Galileo intenta dar así con una definición del estado de equilibrio que podríamos denominar de "dinámica". El equilibrio es definido desde su no tener lugar, es decir, desde el primer instante de su desequilibrio. Esta definición es lo que se denominará el Principio de los desplazamientos virtuales. La formulación galileana de la misma será la siguiente:

tanto esser maggiore lo spazio BE dello spazio AD, quanto la distanza BC è maggiore della CA.[1486]

Es decir;

BE : *AD*::*CB* : *AC*

y si tenemos en cuenta que en el estado de equilibrio "no-dinámico" ha sido definido como

Peso en A : *Peso en B* :: *CB* : *AC*

tenemos que en el equilibrio se cumplirá,

Peso en A : *Peso en B* :: *BE* : *AD*

Que es, *in nuance*, la definición lagrangiana del Principio de desplazamiento virtual. Hemos visto que Galileo no puede formular matemáticamente tal Principio como lo hace Lagrange por la razón de que el primero carece del cálculo que el segungo sí dispone. Es más, en la definición del equilibrio "virtual" entran en juego consideraciones de sentido cuya formulación matemática exige el uso de las magnitudes negativas. Como se sabe, habrá que esperar hasta Vieta[1487] para que el uso del signo para la falta sea del dominio público en las matemáticas[1488]. Esto no implica, sin embargo, que con ello se disponga del concepto de

---

égalité n'a pas lieu quel que soit le déplacement, grand ou petit, que l'on impose au mécanisme; elle n'est vraie, d'une manière générale, que pour un déplacament infiniment petit à partir de la position d'équilibre". Cf. también Descartes [1668] p. 14 donde Descartes da cuenta de la balanza romana remitiéndose al plano inclinado.

[1486] Cf. Galileo [1943] p. 164.

[1487] O, en cierto modo, hasta Diophanto. Cf. al respecto Klein [1936] p. 131: "Daß die Wissenschaft Diophants in vieler Hinsicht nicht-griegische Züge aufweist [...] besonderes [...] wo [...] die Regeln für die Multiplikation des „Fehlens“ (λεῖψις) und des „Vorhandenseins“ (ὕπαρξις) – die den modernen Zeichen „minus“ und „plus“ entsprechen – angegeben werden, während Diophant den Begriff der „negativen Größe“ gar nicht kennt".

[1488] Es curioso ver a Descartes llamar "moindre que rien" a estas magnitudes negativas (en Descartes [1637] p. 346). Como no podía ser de otra forma, el contexto en el que aparecen estas magnitudes menores que nada es el de la aparición de la noción de "sentido" (en particular, Descartes habla de una curva que esta *renversée* con respecto a otra curva). No menos interesante resulta la observación de Maximus Planudes en relación a las "clases que faltan" (λείποντα εἴδη) de la Definición X de la *Arithmetica* de Diopantus: "Οὐχ ἁπλῶς λεῖψιν λέγει, μὴ καὶ ὑπάρξεώς τινος οὔσης, ἀλλὰ ὕπαρξιν ἔχουσαν λεῖψιν" ("no se dice simplemente faltar, como si no hubiese ninguna presencia, sino que [se dice] estar presente teniendo una falta". Citado en Klein [1936] p. 151) magnitudes negativas[1489]. Esta última falta impide así a Galileo expresar el Principio de desplazamiento virtual haciendo uso de las magnitudes negativas para expresar los dos sentidos de la misma dirección en que se mueve la palanca en su primer instante de desequilibrio.

Sin embargo, del mismo modo que la falta del cálculo no impedía a Galileo expresar verbalmente, en todo su aspecto paradójico, el desplazamiento virtual infinitesimal, tampoco la falta del concepto de las magnitudes negativas impedirá a Galileo expresar lo que será el Principio de desplazamientos virtuales recurriendo, verbalmente, a la direción del desplazamiento de la balanza. En palabras de Galileo,

Viene adunque ad essere la velocità del moto del grave B, discendente, tanto superiore alla velocità dell'altro mobile A, ascendente, quanto la gravità di questo eccede la gravità di quello[1490]

En definitiva, vemos que Galileo, antes incluso que Descartes[1491], expresa de una manera no formal lo que se denominará Principio de desplazamiento virtual. A diferencia de Galileo, Descartes expresará claramente la razón por la que el desplazamiento ha de ser infinitesimal, virtual, o únicamente uno que se da "al comienzo"[1492].

7.3 EL PRINCIPIO DE DESPLAZAMIENTO VIRTUAL EN LAGRANGE

En la formulación de lo que hoy se denomina Principio de desplazamiento virtual, Lagrange dispone de las herramientas necesarias para ofrecer una formulación matemática de dicho Principio. Es decir, Lagrange cuenta, por un lado, con el cálculo para expresar la virtualidad del desplazamiento y, por otro, con el uso de las magnitudes negativas para expresar el sentido del desplazamiento virtual. Afortunadamente, Lagrange no se limita a la formulación matemática sino que, siguiendo el hábito de su época, llega a acompañar en prosa el contenido matemático de la obra. Veamos en primer lugar la formulación, digamos, más galileana.

Lagrange considerará al Principio de desplazamiento virtual el Principio al que se puede reducir la entera disciplina de la Estática[1493]. Su objetivo no es tan sólo expresar este Principio formalmente, sino hacerlo en su forma más general[1494]. Esto último le permite utilizar el

[1489] De hecho, si bien Diopantus conoce las reglas de manipulación del signo para la falta (minus) en la multiplicación (a saber, *(-x)y=-(xy)* y *(-x)(-y)=xy*), clasifica dentro de las imposibles las ecuaciones como 4=4x+20 donde la solución es una magnitud negativa. Cf. al respecto Dieudonné [1987] p. 55.
[1490] Cf. Galileo [1943] p. 164.
[1491] En contra de la opinión de Duhem [1905] p. 338 „Descartes est donc le premier qui ait nettement affirmé le caractére infinitésimal du principe des désplacements virtuels" y p. 350 „Descartes a asisi et marqué nettement le caractére infinitésimal du principe des désplacements virtuels".
[1492] Así lo hace, por ejemplo, en una carta dirigida a Mersenne en el que dirá: "La pesanteur relative de chaque cors se doit mesurer par le commencement du mouvement que devrait faire la puissance qui le soutient, tant pour le hausser que pour le suivre s'il s'abaissait"(citado en Duhem [1905] p. 337).
[1493] Cf. Lagrange [1788] pp. 11-12: "Et en général je crois pouvoir avancer que tous les principes généraux qu'on pourroit peut-être encore découvrir dans la science de l'équilibre, ne seront que le même principe des viresses virtuelles, envisagé différemment, & dont ils ne différeront que dans l'expression".
[1494] Cf. Lagrange [1788] p. 12.

Principio para la resolución de cualquier sistema de fuerzas en equilibrio. Este equilibrio recibe la siguiente definición en Lagrange:

La loi générale de l'équilibre dans les machines est que les forces ou puissences soient entre elles réciproquement comme les vitesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances [1495]

Definición ésta que bien podríamos llamar la definición estática del equilibrio. Frente a ella, la versión no formal del Principio de desplazamiento virtual general es la siguiente:

Si un Systême quelconque de tant de corps ou points que l'on veut tirés, chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, & qu'on donne à ce systême un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle; la somme des puisances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée, parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zero, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, & comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé[1496]

Nótese que Lagrange no habla ya de igualdad de proporciones entre dos potencias y dos espacios. El lenguaje de las proporciones tiene el inconveniente de estar limitado, en principio[1497], a trabajar únicamente con cuatro elementos: dos fuerzas y dos desplazamientos. Pero si expresamos este equilibrio dinámico mediante una única ecuación, tendrémos la oportunidad de interpretar el sistema de N fuerzas como si se tratara de un único cuerpo *C* que se mueve en un espacio de *n-m* dimensiones bajo la acción de *n* fuerzas, siendo *m* las restricciones del sistema. En el equilibrio el vector de fuerzas será perpendicular al vector de desplazamientos virtuales[1498].

Se ello como fuere, el caso es que Lagrange ofrece una definición no formal de la velocidad virtual donde, al igual que en Galileo, no podían dejar de aparecer expresiones con un carácter ciertamente problemático que sólo con la introducción del cálculo se podrán evitar. De este modo, Lagrange hablará del "primer instante del movimiento" que hace romper el estado de equilibrio. La definición es la siguiente:

[1495] Cf. Lagrange [1788] p. 12.

[1496] Cf. Lagrange [1788] pp. 10-11.

[1497] Esta limitación es algo que sólo tiene lugar a primera vista. Así, la condición de equilibrio virtual es perfectamente expresable haciendo uso de proporciones cuando tenemos un sistema de más de dos fuerzas. La diferencia es que mientras que para N fuerzas necesitamos N proporciones con 2N variables, en caso de hacer uso de una igualdad logramos expresar lo mismo con una igualdad de 2N variables. Por ejemplo (seguimos el texto de Lagrange [1788] p. 14 y 15), en el caso de un sistema de tres fuerzas *P*, *Q* y *R*, y tres desplazamientos virtuales *dp*, *dq* y *dr*, las proporciones serían $\frac{P}{Q}=-\frac{dq}{dp}$, $\frac{P}{R}=-\frac{dr}{dp}$ y $\frac{Q}{R}=-\frac{dr}{dq}$, siendo en la primera proporción *dr* constante, en la segunda *dq* y en la tercera *dp*. Esto mismo se expresa en la ecuación de 6 variables: $Pdp+Qdq+Rdr=0$. Y es que, como decía Vieta, "Proportio potest dici constitutio aequalitas: aequalitas, resolutio proportionis" (citado de Klein [1968] p. 160).

[1498] Cf. sobre este punto Lanczos [1986] p. 74 y sigs.

On doit entendre par vitesse virtuelle celle qu'un corps en équilibre est disposé a recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu, c'est-a-dire la vitesse que ce corps prendrait réellement dans le premier instant de son mouvement.[1499]

Con ello, el Principio de desplazamiento virtual para el caso de dos fuerzas queda expresado como sigue:

des puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces puissances.[1500]

Lo que formalmente expresa Lagrange de este modo:

$$\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp} \qquad [2]$$

Donde P y Q son las fuerzas y dp y dq los desplazamientos infinitesimales respectivos de esas fuerzas. En la definición tienen lugar, con ello, las principales dos características que habíamos identificado ya en Galileo: 1) El que el desplazamiento tiene que ser infinitesimal y 2) El que la definición tiene que tener en cuenta el sentido del desplazamiento.

Esta doble característica permite afirmar que la fórmula (2) expresa el contenido de una bicondicional doble; una que es válida en el *mundo* fáctico y otra que es válida en el *mundo* contrafáctico. Los dos términos de la bicondicional son *Pdp* y *Qdq*. La introducción del signo para *minus* permite hablar de bicondicional doble y no, meramente, de una bicondicional. En efecto, la expresión [2] se puede formular como,

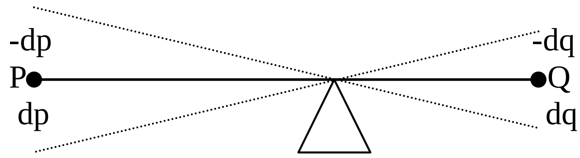
$$Pdp = -Qdq \qquad [3]$$ [1501]

Pero también como,

$$Qdq = -Pdp \qquad [4]$$

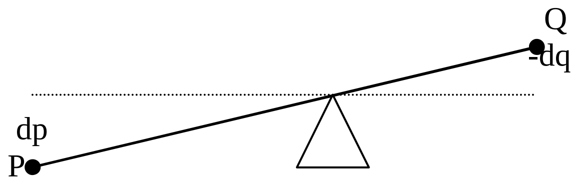
El dibujo que nos ayudará en nuestra exposición es el siguiente:

[1499] Cf. Lagrange [1788] p. 8.
[1500] Ibid.
[1501] Nótese que esta expresión, formulada así: $Pdp + Qdq = 0$, expresa que la suma del trabajo realizado por un sistema en equilibrio es cero. Con ello queda impedida la existencia del *perpetum mobile* de primera especie.

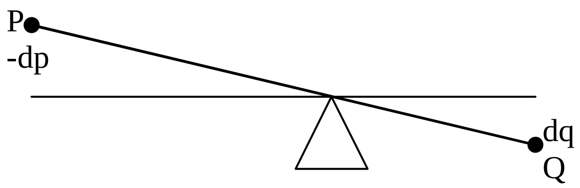


Donde el desplazamiente "hacia arriba" ha sido expresado mediante el signo minus y el "hacia abajo" sin el signo minus. El fulcro de la balanza romana es representado por el triángulo del dibujo.

Pues bien, la fórmula [3] es la expresión del primer *instante* de la ruptura del equilibrio para el caso en el que el peso *P* se desplaza infinitesimalmente hacia abajo y Q hacia arriba. Gráficamente:



Análogamente, la fórmula (4) será la expresión del primer *instante* de la ruptura del estado de equilibrio para el caso en el que el peso *P* se desplaza infinitesimalmente hacia arriba y Q lo hace hacia abajo. Algo que es representado por el gráfico siguiente:



La fórmula [3], expresión de la bicondicional $dpP \leftrightarrow -dqQ$, se puede desplegar en dos condicionales, $dpP \rightarrow -dqQ$ y $-dqQ \rightarrow dpP$, de cuyas negaciones (*modus tollens*) obtenemos la fórmula [4]. Tenemos así que las dos bicondicionales se implican mútuamente. Es decir,

$$(dpP \leftrightarrow -dqQ) \leftrightarrow (-dpP \leftrightarrow dqQ)$$

Algo, por cierto, no muy espectacular y que podríamos denominar como “Principio de la relatividad de las magnitudes negativas”[1502]. Lo importante es subrayar que la estructura que sostiene todo esto es la misma que tenía lugar en el ejemplo del piloto de Aristóteles. Efectivamente, allí teniamos también dos mundos, uno en el que el piloto está ausente, otro en el que está presente, que hacíamos corresponder con las condicionales:

$(\neg p \leftrightarrow h)$ [5]

y

$(p \leftrightarrow \neg h)$. [6]

La expresión [5] corresponde al *mundo* en el que el piloto no esta presente. La expresión [6] al *mundo* en el que el piloto esta ausente. Si estamos en el *mundo* en el que el piloto ha estado presente el *mundo* en el que no estaba es el contrafáctico y viceversa. Lo que Aristóteles expresaba era, sin embargo, que conocer lo uno [5]/[6] era conocer lo otro [6]/[5], conocíamos lo uno por que conocíamos lo otro: “la ausencia del piloto es considerada causa del hundimiento de un barco, cuando su presencia lo era de su salvación”. Ya hemos *derivado* para las expresiones [3] y [4] esta bicondicionalidad de las dos bicondicionales.

Lo que en el terreno lógico se daba simultánemente, es decir, el que podamos pasar sin ninguna dificultad de la expresión [3] a la expresión [4] y viceversa, de la expresión [5] a la expresión [6] y viceversa, era algo que en la realidad no podía tener lugar más que sucesivamente. No podemos estar al mismo tiempo y en el mismo sentido en el mundo fáctico y en el mundo contrafáctico. Si el piloto esta ausente entonces es que no esta presente, si el peso Q se mueve hacia abajo, entonces es que no se mueve hacia arriba. Esta imposibilidad queda recogida así en la expresión general [2] que habíamos desdoblado en [3] y [4].

La formulación actual del Principio de desplazamiento virtual cambia con respecto a la notación que utiliza Lagrange en la primera parte de su *Méchanique Analitique*. En la notación contemporanea se tenderá a evitar el uso de los diferenciales para la expresión del desplazamiento infinitesimal y en lugar de ello, siguiendo la notación de la segunda parte de la *Méchanique Analitique*, se hará uso de la letra del alfabeto griego δ. Con ello se pretenderá subrayar a la vez la diferencia y la similitud con respecto a los diferenciales expresados desde Leibniz por d. Digamos que d y δ son ambas “magnitudes” infinitesimales. Esto hace que las dos expresiones únicamente tengan sentido dentro de un cociente de diferenciales o de desplazamientos virtuales. Es decir, expresiones aisladas de su cociente como dx o δp carecen de sentido y solo dan lugar a confusiones y malentendidos[1503]. Por otro lado, la diferencia entre d y δ consiste en que si bien el primero pretende expresar una cambio actual, el segundo

[1502] Algo que tiene lugar también en la contabilidad: mis pasivos con respecto a la empresa B son para la empresa B activos con respecto a mi y viceversa. Y es que la contabilidad es el reflejo de la situación de una empresa en ese espacio regionalizado por activos y pasivos.

[1503] Como hemos visto en el capítulo cuarto de este trabajo, la defensa de esta tesis en Hegel intentará ser no meramente, digamos, fenomenológica, como en Newton, sino genética.

pretende ser la expresión de una cambio, un desplazamiento, virtual[1504]. δ es el desplazamiento que el cuerpo podría recorrer caso de romperse el equilibrio, no el que de hecho recorre[1505]. δ es resultado de un experimento matemático consistente en ver cual sería el resultado de romper el estado de equilibrio del sistema. El problema es que, como veremos, en el mundo real lo que únicamente hay son movimientos virtuales.

Ya se ha llamado la atención unas líneas más arriba sobre el hecho de que la ecuación fundamental del Principio de desplazamientos virtuales es la que hemos denotado como [2], siendo así que los sistemas con más de dos fuerzas impresas se reducen, en última instancia, a tantas equaciones con esa forma como fuerzas actúan en el sistema. Si esto último resulta ser importante para una filosofía que, como la de Hegel, comprende el cociente de diferenciales como la clave del cálculo diferencial, no lo es menos el que la expresión [2] no tenga como solución aquella que consiste simplemente en igualar Q y P a cero.

Es por ello que, antes de pasar a la versión dinámica del Principio de desplazamiento virtual, nos falta demostrar estas dos observaciones, siendo así que la segunda de las cuestiones nos permitirá comprender la diferencia entre la mecánica de Newton y la mecánica analítica –es decir, la basada en el Principio de desplazamiento virtual.

Para la primera cuestión seguiremos a Lagrange[1506] poniendo como ejemplo un sistema de tres fuerzas P, Q y R, y tres desplazamientos virtuales dp, dq y dr, respectivamente. La condición de equilibrio del sistema se reduce a las tres ecuaciones siguientes:

$Pdp+Qdq = 0$ donde r es constante

$Pdp+Rdr = 0$ donde q es constante

$Qdq+Rdr = 0$ donde p es constante

Con lo que tenemos tres equaciones de la forma [2] que expresan las condiciones de equilibrio para un sistema con tres fuerzas impresas. Vemos así que se considera al sistema únicamente bajo la acción de, en cada caso, dos fuerzas haciendo abstracción de las restantes. Como veremos en la segunda cuestión, en equilibrio las fuerzas y con ello, los desplazamientos, han de ser dependientes unos de otros. Es decir, dp ha de poder ser expresado como,

$dp=mdq+ndr$

en la primera ecuación, esta expresión tendrá la forma

[1504] Cf. Lanczos [1986] p. 38: “[...] this infinitesimal change [δ] is not caused by the *actual* change of an independent variable, but is imposed by us on a set of variables as a kind of *mathematical experiment*”. Cf. tambén Lanczos [1986] p. 39: “[...] *d* refers to an *actual*, δ to a *virtual change*”.

[1505] Cf. Lagrange [1788] p. 207: “[...] qu’on pourra toujours, dans la formule générale du mouvement, supposer les variations δx, δy, δz, égales auc différentielles *dx*, *dy*, *dz*, qui représentarent les espaces **effectifs** pacours par les corps dans l’instant *dt*, tandis que les variations dont nous parlons doivent représenter les espaces quelconques, que les corps **pourroient** parcourir dans la même instant” (subrayado nuestro).

[1506] Cf. Lagrange [1788] pp. 14 y 15.

$dp=mdq$

luego

$Pmdq= -Qdq$

y en la segunda,

$dp=ndr$

luego,

$Pndr=- Rdr$

luego resulta que

$Pdp=P(mdq+ndr)=-Qdq-Rdr$

obteniendo así la fórmula buscada,

$Pdp+Qdq+Rdr=0$

y en general,

$Pdp+Qdq+Rdr+\&c=0$ [7]

Con ello queda claro que la ecuación [7] para el estado de equilibrio de un sistema, se reduce a la ecuación originaria [2] en donde dos desplazamientos virtuales aparecen dentro de una razón o proporción. Con ello damos por demostrada la primera cuestión.

Nos falta ahora ver por qué en estado de equilibrio las fuerzas han de ser dependientes entre ellas, es decir, por qué no vale la solución trivial consistente en formular la ecuación [2] como

$Pdp+Qdq=0$

Para de ahí concluir que *P* y *Q* han de ser cero.

Comencemos[1507] por el caso más simple, aquél en que el sistema recibe una única fuerza impresa en un única dirección de nuestras coordenadas rectangulares. Para ello tenemos que descomponer cada desplazamiento virtual *dp*, *dq*, *dr*,… en tres componentes que serán paralelos a las coordenadas, a saber, las tres proyecciones de *dp*, *dq*, *dr*,... sobre las coordenadas. *dp* será así:

$$dp = dx_1 \cdot \cos\alpha_1 + dy_1 \cdot \cos\beta_1 + dz_1 \cdot \cos\gamma_1 \qquad [8]$$

donde α_1, β_1 y γ_1 son los ángulos del desplazamiento virtual *dp* con respecto a las coordenadas x_1, y_1 y z_1 respectivamente. La expresión [8] es con ello equivalente a esta otra:

$$(dp)^2 = (dx_1)^2 + (dy_1)^2 + (dz_1)^2$$

que es el teorema de Pitágoras para un triángulo que se encuentra en un espacio de tres dimensiones. Si descomponemos los demás desplazamientos análogamente, y si definimos X_1 como el componente de la fuerza *P* en la dirección del eje x_1, X_2 como el componente de la fuerza *Q* en la dirección del eje x_1, etc. podemos reformular la expresión [7] para el caso de *n* fuerzas impresas del siguiente modo:

$$\sum_{h=1}^{n} \left(X_h \cdot dx_h + Y_h \cdot dy_h + Z_h \cdot dz_h \right) = 0 \qquad [9]$$

Si suponemos ahora que el sistema de *n* puntos recibe el efecto de una fuerza únicamente en su primer punto y sólo en la dirección de la coordenada x_1, tendremos que

$$dy_1 = dz_1 = dx_2 = dy_2 = dz_2 = ... = dx_n = dy_n = dz_n = 0$$

Con lo que la fórmula [9] adquiere la forma siguiente:

$$X_1 dx_1 = 0 \qquad [10]$$

[1507] Cf. sobre este punto Haas [1914] p. 35 y sigs.

Y como hemos admitido que el punto primero sí es libre en su dirección paralela a x_1, la ecuación [10] sólo se cumplirá si el componente de la fuerza *P* en la dirección del eje x_1 es igual a cero. Es decir, cuando

$$X_1 = 0$$

El sistema estará por ello en equilibrio cuando no actúen fuerzas sobre él. Obtenemos el mismo resultado cuando el sistema tiene todos los grados de libertad posibles, es decir, 3*n*. En este caso, todos los desplazamientos virtuales $x_1, y_1, z_1, ...$ son independientes entre sí, con lo que la única posibilidad de que se cumpla [9] será

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = ... = X_n = Y_n = Z_n = 0 \qquad [11]$$

A saber, que sobre el sistema de *n* cuerpos no haya fuerzas actuando. No tiene sentido aplicar el Principio de desplazamientos virtuales sobre estos dos casos extremos. Basta con atender al Principio newtoniano para el equilibrio de un sistema según el cual las fuerzas resultantes[1508] sobre él han de desvanecer, sea por que no hay fuerzas impresas, –tal y como viene a ser el caso expresado por las ecuaciones [10] y [11]– sea por que en esa dirección la fuerza impresa es de igual valor pero de signo contrario a la fuerza de condición –en cuyo caso decimos que el sistema tiene un grado de libertad menos. Sea ello como fuere, el resultado es en ambos casos banal y no hace uso del contenido del Principio de desplazamiento virtual[1509].

Con ello hemos demostrado que la expresión fundamental del Principio de velocidades virtuales es la expresada por la fórmula [2]. Y es fundamental en dos sentidos;

i) En el sentido de que no es posible encontrar una expresión más simple que ella

ii) En el sentido de que las expresiones más complejas del Principio de desplazamientos virtuales -como, por ejemplo, [7]- son reductibles a ella.

En definitiva, hemos obtenido como resultado que la expresión fundamental de la Estática es una igualdad entre dos magnitudes extensivas y un cociente de diferenciales "virtuales". Vemos así que este resultado es solidario del lugar que ocupa el cociente de

---

1508 Las "fuerzas resultantes" F^r se definen como la suma de las fuerzas impresas F^i y las fuerzas que hacen cumplir las condiciones a las que se ve sometido el sistema F^c: $F^r = F^i + F^c$. Cf. Lanczos [1986] p. 76.

1509 Cf. Haas [1914] p. 39: "An sich hat es nun freilich keinen Sinn, auf einen solchen Fall das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit anzuwenden; denn in einem solchen Fall reduziert es sich eben auf den einfachen bekannten Satz, daß ein freier Punkt nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn in ihm gar keine Kraft angreift (oder was dasselbe ist, wenn in ihm mehrere Kräfte angreifen, deren Resultierende aber verschwindet)". No podemos pretender entrar aquí a examinar el denominado método del multiplicador indeterminado de Lagrange. En cualquier caso, hay que remarcar que no se considera en él el sistema en tanto que tal –sin las restricciones, como libre– sino uno en el que han sido consideradas las condiciones en sus variaciones infinitesimales. Es decir, no se iguala a cero la variación de la función *F*, sino la variación de la función $F^*=F+\lambda f$, donde f es la función que expresa la condición auxiliar. Todo sucede como si hacer uso de la función F^* en vez de la función *F* fuese equivalente a ponerse en unas coordenadas desde las que el sistema aparece como libre. Como veremos, esta idea es el núcleo del Principio de d'Alembert.

diferenciales en la *Wissenschaft der Logik* así como de la lectura de tal cociente ofrecida por Hegel. Cerraremos nuestro capítulo ofreciendo al lector la expresión análoga a [2] para el caso de un sistema que no se encuentra en equilibrio. En definitiva, vamos a ver la expresión fundamental de la Dinámica tal y como es presentada en la Mecánica analítica y que se conoce como el Principio d'Alembert.

7.4 LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA: EL PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Hay dos explicaciones posibles que son físicamente equivalentes[1510] para dar cuenta de la existencia de fuerzas que actuan sobre un cuerpo:

1.1) Uno consiste en afirmar el reposo o el movimiento rectilíneo uniforme tanto del sistema de referencia del observador como del cuerpo en cuestión y deducir de ahí la existencia de un campo de fuerzas como, por ejemplo, la gravedad.

1.2) La otra posibilidad consiste en afirmar que nuestro sistema de referencia se mueve con una aceleración igual al efecto del campo de la primera opción, pero en la direción contraria[1511].

A esta equivalencia de la explicación de la existencia de fuerzas actuando sobre un cuerpo se le llama habitualmente la "hipótesis de equivalencia de Einstein". De forma análoga, podemos dar cuenta de la no existencia de fuerzas actuando sobre un cuerpo desde dos posiciones físicamente equivalentes:

2.1) La primera opción, que corresponde a la primera opción de la suposición anterior, afirmaría a la vez el estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme del observador y del cuerpo y negaría la existencia de un campo de fuerzas[1512].

2.2) La segunda opción consiste en, admitiendo la existencia del campo de fuerzas, afirmar la aceleración para el observador y el cuerpo en dirección a dicho campo[1513].

Vemos así que el campo y la aceleración son como dos magnitudes que, dependiendo de la situación dinámica o estática, son complementarias o se anulan entre sí. En los casos 1.1) y 1.2) se da la complementariedad: es físicamente indistinguible tener una campo de fuerzas o tener la aceleración correspondiente en dirección contraria al origen del campo. En los casos

[1510] "Físicamente equivalentes" son "dos" situaciones físicas que son mecánicamente indistingibles entre sí.

[1511] El famoso *Gedankenexperiment* que ilustra este caso es el de un ascensor que, sin la existencia de campos de fuerzas, se mueve con una aceleración de $9{,}8 m/s^2$ (si el campo de fuerzas es el de la gravedad terrestre) en dirección contraria con respecto al campo de fuerzas admitido en la explicación primera.

[1512] Sea esta negación absoluta o relativa: la primera negación afirmaría la absoluta inexistencia de campos de fuerzas, la segunda, por el contrario, afirmaría la supresión de los efectos de estos campos de fuerzas sobre el cuerpo.

[1513] Haciendo uso nuevamente del ascensor, se trataría de hacer moverlo hacia el campo de fuerzas con una aceleración igual a la aceleración producida por este mismo campo de fuerzas. En definitiva, se trataría de mostrar que un cuerpo no pesa mientras cae. Cf. Bergmann y Schaefer [1954] pp. 54 y 55: "Eine Masse ist, während sie frei fällt, gewichtlos".

2.1) y 2.2) se da la supresión: no tener ninguna de las dos cosas es físicamente igual a tener las dos cosas[1514].

Pues bien, el Principio de d'Alembert parte de una situación en donde hay manifestación de fuerzas para, añadiendo un término que suprime tal fuerza, llegar a una situación en donde el estado es de equilibrio. En su versión moderna, el Principio de d'Alembert es un procedimiento mediante el cual un sistema que no se encuentra en equilibrio es reducido a un estado de equilibrio mediante la introducción de la denominada fuerza de inercia[1515]. Es decir, es un Principio que permite reducir los problemas dinámicos a un problema de Estática.

El ejemplo más sencillo es el del resorte que carga con un cuerpo de masa *m* produciendo en él la tensión *G=mg*. Si dejamos caer el resorte junto con el cuerpo, la tensión producida por éste en el resorte será *G-mg=0*. Pasamos así de un estado dinámico a otro estático o de equilibrio de fuerzas[1516].

En el apartado 8.3 de este trabajo tendremos que volver sobre este punto cuando tratemos de ver la distinción entre las fuerzas centrífuga y centrípeta. Este capítulo enlaza así con aquél y resulta imprescindible para comprender la tesis de Hegel sobre estas dos fuerzas. Adelantándonos algo a los acontecimientos, sea permitido decir que la fuerza centrífuga es la fuerza que surge de la aplicación del Principio de d'Alembert sobre un cuerpo con movimiento circular y que, debido a que no se da en sistemas inerciales, recibe el nombre de fuerza aparente en la literatura común.

Una vez dicho esto, comenzaremos nuestra exposición formal con la expresión [9]. Al sustituir en ella los diferenciales por los δ de los desplazamientos virtuales obtenemos la expresión siguiente:

$$\sum_{h=1}^{n}(X_h \cdot \delta x_h + Y_h \cdot \delta y_h + Z_h \cdot \delta z_h) = 0 \quad [1517] \qquad [12]$$

Partiendo de esta ecuación, veamos cómo expresa d'Alembert su Principio para después proceder a una formulación moderna. En su *Traité de Dynamique*[1518], d'Alembert descompone las fuerzas actuantes en un sistema de cuerpos en tres componentes: un componente es la fuerza impresa al sistema (letras *a*, *b* y *c* en el original)[1519], el otro

---

[1514] Es decir, si tenemos dos magnitudes x y –x, es lo mismo tener una x (caso 1.1) que tener la otra en dirección contraria –x (caso 1.2). A su vez, no tener ninguna de las magnitudes (caso 2.1)) es equivalente a tener las dos (caso 2.2). El ejemplo sólo pretende ilustrar aquellos estados que son físicamente equivalentes.

[1515] El término "fuerza de inercia" es ampliamente aceptado en los manuales actuales de Física y también nosotros haremos uso de él. Cf. p.e., Budó [1974] p. 145, Bergamnn y Schaefer [1954] p. 52, Lanczos [1986] y Goldstein [2007] p. 5.

[1516] Como se ve, hemos pasado mediante el Principio de d'Alembert de un caso dinámico –que en la exposición hemos clasificado dentro de 1.1) – a uno estático –caracterizado como 2.2) –. Sin embargo, el mismo experimento podría haberse interpretado como el paso de un estado 1.2) a otro 2.2). En este caso, tendríamos que imaginar a un ascensor metido dentro de otro ascensor, donde el primero se mueve dentro del segundo con una aceleración igual pero en dirección contraria. La correspondencia con 2.2) no llega a ser del todo ajustada debido a que en este último caso no se han tenido que presuponer campos de fuerzas.

[1517] Donde *n* el el número de fuerzas actuando sobre el sistema.

[1518] Cf. d'Alembert [1758] pp. 73 y 74.

[1519] Lagrange (en Lagrange [1788] p. 192) caracteriza así a estas fuerzas: "Soient maintenant P, Q, R,… les forces accélératrices données, qui sollicitent chaque corps *m* du systeme vers les centres auxquels ces forces sont supposées tendre".

componente es la fuerza que daría cuenta de la trayectoria trazada si no hubiese fuerzas de restricción entre los cuerpos del sistema, (letras a, b, c,...) y por último tenemos las fuerzas de restricción de los cuerpos del sistema entre sí (letras *α*, *ß*, *κ*,...):

Soient A, B, C, &c. les corps qui comosent le systême, & supposons qu'on leur ait imprimé les mouvements a, b, c, &c. qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les mouvemens a, b, c, *&c. Il est clair qu'on peut regarder le mouvement a imprimé au corps A comme composé du mouvement* a, *qu'il a pris, & d'un autre mouvement α; qu'on peut de même regarder les mouvemens b, c, &c. comme composés des mouvemens* b, *ß;* c, *κ; &c. d'où il s'ensuit que le mouvement des corps A, B, C, &c. entr'eux auroit été le même, si au lieu de leur donner les impulsions a,b,c, on leur eût donné à la fois les doubles impulsions* a, *α;* b, *ß;* c, *κ* , *&c.*

Es decir, la fuerza impresa es la suma de la fuerza real y la fuerza de restricción. De ahí que es físicamente equivalente el aplicar la fuerza impresa y el aplicar al mismo tiempo la fueza real y la fuerza de restricción:

$$\left.\begin{aligned} a &= \mathrm{a}+\alpha \\ b &= \mathrm{b}+\beta \\ c &= \mathrm{c}+\kappa \end{aligned}\right\} \quad [13]$$

Pero un sistema de cuerpos no puede ejercer por sí mismo ningún trabajo. Es decir, si tenemos un sistema con dos cuerpos, el trabajo de restricción que ejerce uno de ellos, digamos $\Xi_1 \delta x_1$, es igual pero con signo contrario al trabajo de restricción ejercido por el otro, digamos $\mathrm{H}_1 \delta y_1$. La suma tiene que ser por lo tanto igual a cero: $\Xi_1 \delta x_1 + \mathrm{H}_1 \delta y_1 = 0$ Este resultado es consecuencia de la versión analítica del tercer axioma de Newton[1520]. Tenemos con ello que el trabajo de restricción total ejercido por un sistema es igual a cero[1521]. La idea es expresada por Lagrange así:

Si maintenant on suppose le systeme en mouvement, & qu'on regarde le mouvement que chaque corps a dans un instant [en d'Alembert : a,b,c,...] *comme composé de deux, dont l'un soit celui que le corps aura dans l'instant suivant* [en d'Alembert: *a,b,c,...], il faudra que*

[1520] La versión analítica no afirma únicamente que la fuerza de acción es igual a la fuerza de reacción, $\Xi_1 = -\mathrm{H}_1$, sino que el trabajo de acción es igual al trabajo de reacción, $\Xi_1 \delta x_1 = -\mathrm{H}_1 \delta y_1$.

[1521] Cf. Budó [1974] p. 144: "Bei jedem Punksystem ist die gesamte virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich Null". El Principio de d'Alembert se puede expresar "intuitivamente" como sigue: si de un input de fuerzas impresas *a,b,c*,... obtenemos como output las fuerzas reales a,b,c,..., entonces las fuerzas que actúan "dentro" del sistema han tenido que anularse. De lo contrario habrían tenido su expresión en las fuerzas reales. Cf. Mach [1912] p. 366: "Da infolge der Verbindungen *tatsächlich* nur die Komponenten W, W', W''… wirksam werden, so halten sich die Kräfte V, V', V''… eben vermöge der Verbindungen das *Gleichgewicht*".

l'autre [en d'Alembert: α, ß, κ,..] *soit detruit par l'action réciproque des corps, & par celle des forces motrices dont ils sont actuellement animés.*[1522]

Donde, a diferencia de d'Alembert[1523], Lagrange sí recordará que los desplazamientos han de ser infinitesimales. La formulación de d'Alembert es la siguiente:

Or par la supposition, les corps A, B, C, &c. ont pris d'eux-mêmes les mouvemens a, b,c, &c. *Donc les mouvements α, ß, κ &c doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvemens* a, b, c, &c. *c'est-à-dire que si les corps n'avoient reçû que les mouvemens α, ß, κ &c. ces mouvemens auroient dû se détruire mutuellement, & le systêteme demeurer en repos.*

Algo que pasamos a expresar ahora matemáticamente. Sea

$$m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2}$$

la fuerza real[1524] del cuerpo *h* en direción al eje *x*. La fuerza real del cuerpo *h* en dirección al eje *y* será con ello:

$$m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2}$$

etc.

Por otra parte, sean las fuerzas de restricción[1525] del cuerpo *h* en las direcciones *x, y* y *z* respectivamente, Ξ_h, H_h y Z_h.

Por último, sean expresadas las fuerzas impresas tal y como lo eran en la expresión [12], es decir, X_h es la fuerza impresa ejercida sobre el cuerpo *h* en dirección al eje *x*, Y_h es la fuerza impresa ejercida sobre el cuerpo *h* en dirección al eje *y*, Z_h es la fuerza impresa ejercida sobre el cuerpo *h* en dirección al eje *z*, etc. Con ello, las expresiones recogidas en [13] adquieren la siguiente forma:

[1522] Cf. Lagrange [1788] p. 181.
[1523] Aunque no lo haga en la formulación general del problema, d'Alembert sí hará uso de los desplazamientos infinitesimales en el problema que analizaremos más abajo.
[1524] Lo que d'Alembert denominaba con las letras a,b,c,…
[1525] Lo que d'Alembert denominaba con las letras α, ß, κ,…

$$X_h = \Xi_h + m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2}$$

$$Y_h = \mathrm{H}_h + m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2}$$

$$Z_h = \mathrm{Z}_h + m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2}$$

es decir,

$$\Xi_h = X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2}$$

$$\mathrm{H}_h = Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2}$$

$$\mathrm{Z}_h = Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2}$$

Como hemos dicho más arriba, el total del trabajo realizado por las fuerzas de restricción del sistema ha de ser igual a cero.. Por ello tenemos que, para un sistema de *n* cuerpos:

$$\sum_{h=1}^{n} (\Xi_h \cdot \delta x_h + \mathrm{H}_h \cdot \delta y_h + \mathrm{Z}_h \cdot \delta z_h) = 0$$

es decir

$$\sum_{h=1}^{n} \left\{ \left(X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2} \right) \cdot \delta x_h + \left(Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right) \cdot \delta y_h + \left(Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2} \right) \cdot \delta z_h \right\} = 0 \qquad [14]$$

donde las expresiones $m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2}$, $m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2}$, etc. son las denominadas "fuerzas de inercia" que han de añadirse al sistema para que el conjunto sea considerado como si estuviese en equilibrio[1526].

[1526] Lagrange tampoco hablará de fuerzas de inercia cuando expone el Principio de d'Alembert en su *Méchanique Analitique*. Cf. Lagrange [1788] p. 193: " l'on voit que les loix du mouvement du systeme sont les memes que celles de son equilibre, en ajoutant simplement les nouvelles forces acceleratrices d^2x/dt, d^2y/dt, d^2z/dt, suivant x,y,z."

Podemo derivar dos consecuencias inmediatas de la expresión [14]. La primera es que si el sistema no es propiamente un sistema de cuerpos sino un conjunto de cuerpos libres sin restricciones entre sí, cada cuerpo puede analizarse por separado, es decir, los desplazamientos virtuales no tienen relación entre sí, y la expresión [14] se cumple únicamente cuando cada factor de cada desplazamiento virtual es igual a cero. Es decir, cuando,

$$X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2} = 0$$

$$Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2} = 0$$

$$Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2} = 0$$

etc. Es decir,

$$X_h = m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2}$$

$$Y_h = m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2}$$

$$Z_h = m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2}$$

etc. Con lo que obtenemos las expresiones Newtonianas del tercer axioma. Por lo tanto, cuando no hay fuerzas de restricción en el sistema la expresión [14] no nos ofrece nada nuevo. Esto encaja con el resultado que obteníamos con la expresión para el Principio de desplazamientos virtuales. En efecto, habíamos visto que para un sistema de cuerpos libres, las condiciones para el equilibrio que se seguían de la expresión [12] eran las mismas que se exigían desde la mecánica de Newton.

La segunda consecuencia que se ha de subrayar es que la expresión [14] contiene o es más general que la expresión [12]. En efecto, si el estado del sistema es de equilibrio, no habrá aceleración y, por tanto, las fuerzas de inercia serán igual a cero:

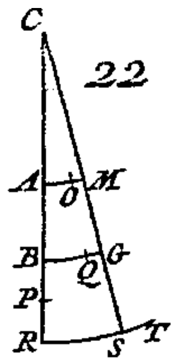
$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m \cdot_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \ldots = m_n \cdot \frac{d^2 x_n}{dt^2} = m_n \cdot \frac{d^2 y_n}{dt^2} = m_n \cdot \frac{d^2 z_n}{dt^2} = 0$$

La expresión [14] toma así la forma siguiente,

$$\sum_{h=1}^{n}\{(X_h)\cdot\delta x_h+(Y_h)\cdot\delta y_h+(Z_h)\cdot\delta z_h\}=0$$

que no es otra cosa que la expresión [12] del Principio de desplazamientos virtuales para sistemas en equilibrio.

Pero veamos todo ello mediante la solución de un problema[1527] que propone el mismo d'Alembert[1528]. Sea *CR* una varilla fija en *C*, en cuyos puntos *A*, *B* y *R* se sitúan tres cuerpos que sin la existencia de la varilla hubiesen recorrido el espacio *AO*, *BQ* y *RT* respectivamente[1529]. La varilla es la responsable de la fuerza de restricción del sistema haciendo que los cuerpos que cuelgan en *A*, *B* y *R*, recorran de hecho *AM*, *BG* y *RS* respectivamente. El dibujo es el siguiente:



Haciendo uso de la notación de d'Alembert en el Problema general, podemos expresar las variables del problema del siguiente modo:

$RT = a_1$

$BQ = a_2$

$AO = a_3$

$RS = \mathbf{a}_1$

[1527] Un problema que, dicho sea de paso, encaja ejemplarmente con la definición de problema mecánico dada por Lagrange en su *Méchanique Analitique* (Lagrange [1788] p. 190): "Il faut, dans la Méchanique, prendre les effets simples des forces pour conus; & l'art de cette science consiste uniquement á en déduire les effets composés qui doivent resulter de l'action combinée & modifiée des mémes forces". En nuestro caso, se tratará de obtener el efecto compuesto *RS* suponiendo conocidos los efectos simples *AO*, *BQ* y *RT*.
[1528] Cf. d'Alembert [1758] pp. 96 y 97.
[1529] Nótese que los espacios *AO*, *BQ* y RT son el resultado de lo que más arriba hemos llamado fuerzas impresas. En este caso, el origen de la fuerza impresa es la acción de la gravedad.

$BG = \mathbf{a}_2$

$AM = \mathbf{a}_3$

$ST = \alpha_1$

$GQ = -\alpha_2$

$MO = -\alpha_3$

El Principio de d'Alembert afirma que la varilla *CR* permanecería en reposo si únicamente hubiesen recibido los impulsos *ST*, -*GT* y -*MO*. Por ello, tenemos que:

$A \cdot MO \cdot AC + B \cdot GQ \cdot BC = R \cdot ST \cdot CR$

Donde *A*, *B* y *C* representan la masa de los cuerpos A, B y C respectivamente.

Dado que,

$RT = RS + ST$

$BQ = BG - GQ$

y

$AO = AM - MO$

y por otra parte, dado que por similitud de los triángulos:

$CR/RS = CA/AM$

y

$CR/RS = CB/BG$

tendremos que,

R·RT-RS·CR=A·AC((RS·CA)/CR-AO)+B·BC((RS·CB)/CR-BQ)

Despegando la ecuación para RS obtiene d'Alembert la solución del problema.

En definitiva, la expresión general del Principio de d'Alembert se puede intrepretar como sigue: a toda fueza impresa $X_h, Y_h, Z_{h,...}$ se le resta la denominada fuerza de inercia que hace que el sistema dinámico pase a ser considerado en equilibrio[1530]:

si l'on imagine qu'on imprime à chaque corps, en sens contraire, le mouvement qu'il doit prendre, il est clair que le système sera réduit au repos.[1531]

Vemos así que el Principio de d'Alembert juega un papel más general que el Principio de desplazamientos virtuales. Con el primero, añadimos al sistema en cada instante una fuerza de compensación con el fin de que la fuerzas que actúan sobre el sistema no produzcan aceleración. Como veremos en el capítulo siguiente, este Principio va resultar clave en la comprensión de la distinción entre las fuerzas centrífuga y centrípeta, así como en la igualdad esencial entre la masa inercial y la masa gravitacional. A todo ello nos conducirá el intento de comprender una afirmación de la *Dissertatio* de Hegel en donde se afirmará la perfecta permutabilidad entre las fuerzas centrífuga y centrípeta. Veremos que, para entender en qué consiste el error de esta afirmación de Hegel, habremos de comprender, en primer lugar, el horizonte sobre el que se funda la distinción entre estas dos fuerzas[1532].

[1530] Cf. Lagrange [1788] p. 179; „Cette méthode réduit toutes les lois du mouvement des corps à celles de leur equilibre et ramène ainsi la Dynamique à la Statique“, auch Budó (1974) S. 66: „Man kann das dynamische Problem formal auf ein statisches zurückführen, wenn man zu der auf den Massenpunkt wirkenden eingeprägten Kraft die d'Alembertsche Kraft addiert".

[1531] Cf. Lagrange [1888] p. 256.

[1532] No consideramos necesario para nuestros própositos inmediatos el seguir con las implicaciones del *Principio de desplazamiento virtual*. Si lo hemos hecho hasta d'Alembert inclusive lo ha sido por el hecho de que resulta necesario para comprender el error de Hegel consistente en afirmar la igualdad entre la fuerza centrífuga y la fuerza centrípeta. Digamos únicamente que después de d'Alembert, la siguiente etapa en esta exposición del *Principio de desplazamiento virtual* es la formulación hamiltoniana de la Mecánica en la que se basa la Mecánica cuántica clásica. Sobre este punto cf. Sommerfeld [1944] pp. 105-118.

8. CAPÍTULO

LA RELATIVIDIAD DE LA FUERZA Y EL COCIENTE DIFERENCIAL EN HEGEL

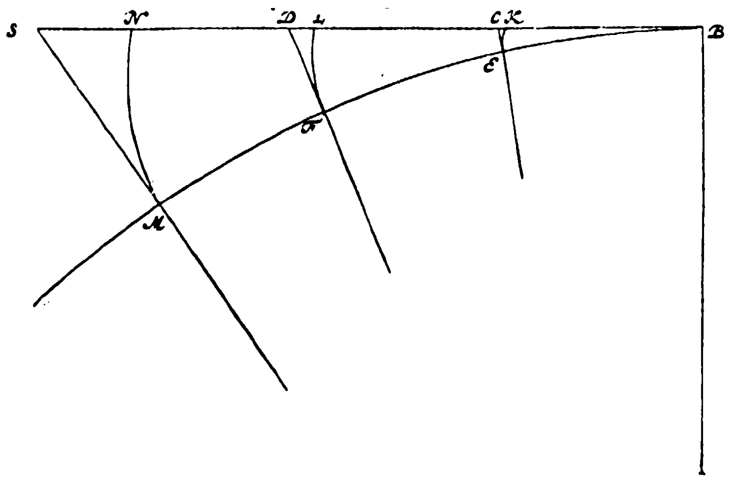
...daß die Wissenschaft […] jene numerische Gleichheit auf eine Gleichheit des Wesens reduziert hat[1533]

8.1 LOS MUNDOS POSIBLES DE HUYGENS

El holandés Christian Huygens será el primero en representar la fuerza centrífuga mediante una recta y, con ello, el primero en proporcionar una medición cuantitativa de la misma. Esta tarea la realizará Huygens en base a una ley que será expresada algo después como tal ley por Newton: la fuerza ejercida sobre un cuerpo es proporcional al trayecto recorrido por él[1534]. El problema de la medición de un espacio recorrido como resultado de la fuerza centrífuga consistía, empero, en que el cuerpo "en realidad" no recorrerá nunca este trayecto. Es decir, se trata del problema que se deriva del intento de medir, no ya, una fuerza "real", sino, lo que Huygens denominará un *conatus* o tendencia.

En la siguiente exposición nos centraremos en la obra póstuma de Huygens titulada "De Vi Centrifuga"[1535]. En él, el físico holandés propondrá descomponer el movimiento circular en dos partes. Por un lado tenemos el movimiento que recorrería el cuerpo si eliminásemos la influencia ejercida por la fuerza centrífuga (v.gr. aquél que recorrería un cuerpo que se mueve circularmente en una honda al cortar la cuerdo que lo sujeta al centro). Este movimiento libre de la fuerza centrífuga equivaldrá, dice Huygens, a un movimiento que será tangente al círculo en el que se estaba moviendo. El dibujo del que se sirve Huygens es el siguiente:

[1533] Cf. Einstein [1969] p. 59. Einstein se refiere aquí a la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria.
[1534] Nos referimos aquí a la segunda ley de los *Principia*. En lo que sigue se verá que, tal y como ocurre en esta ocasión, aquello que en Huygens tiene el estatuto de una herramienta presupuesta, será en Newton explicitado y convertido en axioma o ley.
[1535] Hay una edición bilíngüe francés-latín en Huygens [1929] pp. 254-301.



[1]

El cuerpo que ha sido soltado en el punto *B* se moverá, dice Huygens, en línea tangente a lo largo de la recta *BS*[1536]. Es decir, el cuerpo tiene un *connatus* en el punto *B* hacia el punto *S*. El segundo movimiento –y, por ende la segunda fuerza– es el que resulta de la fuerza centrífuga. Este movimiento es el objetivo de la investigación de Huygens. Éste es representado por la diferencia entre las rectas que representan los movimientos fáctico y contrafácticos descritos en primer lugar. Es decir, si el movimiento que de hecho se da es el circular, y si , además, el movimento que obtendríamos sin el efecto de la fuerza centrífuga es descrito por la tangente *BH*, entonces, la diferencia entre ambas –digamos, aquello que impide que el cuerpo se salga por la tangente–, es el movimiento resultante de la fuerza centrífuga (en el dibujo de arriba, el movimiento de las rectas *EC*, *FD* y *MS*).

El problema consiste en que, como decíamos, el cuerpo no llega a recorrer efectivamente ninguna de las rectas *EC*, *FD* o *MS*. El movimiento efectivo es aquél que recorre el cuerpo en su trayectoria de *B* a *M*. La solución del problema, como ya habrá adelantado el lector[1537], consiste en considerar los movimientos en su aspecto infinitesimal:

quamlibet minimam temporis particulam ab incepto motu considerandam, si vim conatus determinare velimus[1538]

No obstante, Huygens no permanecerá fiel a sus propias palabras y esto le impedirá solucionar el problema de un modo, digamos, moderna. Con “modo moderna” nos referimos a la manera en la que cualquier manual de física contemporáneo resuelve el problema. En los mismos, como se sabe, se considera que el efecto de la fuerza centrífuga se expresa en el cambio de dirección ejercido sobre el móvil en cuestión. Frente a ello, Huygens se encuentra inmerso en una doble corriente que tiene direcciones opuestas. Por un lado quiere calcular el *connatus* de la fuerza centrífuga y por ello tiene que hacer uso en su consideración de, si lo expresamos en un lenguaje ajeno a él, elementos infinitesimales o relaciones entre límites.

[1536] Cf. Huygens [1929] p. 259: “ubi ad *B* punctum venerit, conatum habet pergendi secundum rectam *BH* (en nuestro dibujo *BS*)”.

[1537] Ya que en un contexto análogo a éste nos encontrábamos con el uso de los infinitesimales. Nos referimos, claro está, a nuestra exposición del Principio de los desplazamientos virtuales del capítulo 7.

[1538] Cf. Huygens [1929] p. 259. Cf. la traducción francesa en Huygens [1929] p. 258: “il faut considérer un laps de temps aussi petit que possible après le commencement du mouvement, si nous voulons déterminer la force de la tendance au mouvement”.

Pero, por otro lado, está también interesado en aplicar la ley de Galileo sobre el movimiento circular –la ley según el cual el camino recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo.

En la imagen [1], los tramos de igual longitud *BE*, *EF* y *FM* representan la trayectoria que ha sido recorrida efectivamente por el cuerpo. Los tramos *BK*, *KL* y *LN* representan la trayectoria que recorrería un cuerpo si es librerado de la, digamos, influencia de la fuerza centrífuga[1539]. En lugar de las rectas *BC*, *CD* y *DC* –habituales en su obra– Huygens utiliza en este caso las rectas *BK*, *KL* y *LN*. La razón de ello estriba en que Huygens pretende demostrar que los segmentos *EK*, *FK* y *MN* aumentan como el cuadrado de los tiempos para lo cual necesitará suponer que lo que es válido infinitesimalmente, a saber, la igualdad entre *BK* y *BC*, es válido también para segmentos finitos[1540].

Tal y como habrá notado el lector, toda la exposición de Huygens está basada sobre el supuesto de que el observador es imaginado sobre el cuerpo en movimiento[1541]. Es decir, la descripción de la trayectoria fáctica del cuerpo que ha sido liberado de su unión con el centro es realizada desde un observador que se sitúa sobre el cuerpo móvil. Como veremos en la siguiente sección, esto es algo que le distingue de Newton y que será la clave para entender todo este capítulo. Para ser más exactos, para que podamos afirmar, como lo hace Huygens, que el cuerpo tiende hacia el exterior, tenemos que presuponer que el observador que se encuentra moviendo con el cuerpo lleva en su mano una honda cargada con una piedra[1542]. Esta piedra, dirá Huygens, señalizará, con respecto al que la sostiene, en la dirección del radio del círculo en sentido contrario a su centro.

Tener en cuenta este presupuesto constructivo permite comprender el sentido de la curva que dibujará Huygens al comienzo de su obra. Nos referimos a la curva denominada "evoluta" que, como se sabe, se define por la propiedad siguiente: la longitud de la tangente al círculo desde su comienzo (*N*) hasta la curva evoluta (*R*) es igual a la longitud entre el punto de inicio de la tangente y el comienzo de la curva evoluta (*B*)[1543]. Hemos usado la notación del siguiente gráfico:

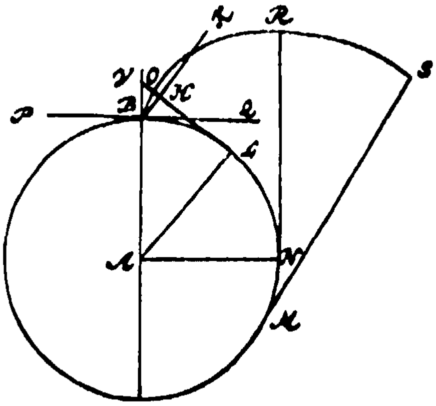
[1539] Hasta aquí, el efecto de la fuerza centrífuga se reduce a cambiar la dirección del móvil, pues las distancias que recorrería con y sin ella –los trechos *BK*, *KL* y *LN* por un lado, *BE*, *EF* y *FM* por el otro– son iguales. Nótese que puesto que se presupone que el cuerpo se mueve con movimiento uniforme, las rectas *BE*, *EF* y *FM* pueden representar tanto el espacio como el tiempo. Es decir, el tiempo es proporcional a los trechos *BE*, *EF* y *FM* –o a los *BK*, *KL* y *LN*–. La segunda ley de Kepler será, en la Física moderna, el paradigma de esta posibilidad de representar el tiempo espacialmente. Cf. al respecto De Gandt [1981] y [1985]. Hegel mismo llamará la atención sobre este mecanismo en la *Enzyklopädie*: "Dass die räumliche Determination durch die Zeit als eine Bestimmung von zwei Dimensionen, als Flächenbestimmung erscheint" (en Enz. § 270 (Hegel [IX] p. 92)).

[1540] Tal y como se expresa Huygens: "quoniam puncto B accipi possunt ut differentiola quæ est inter rectas curvasque hasce, minorem rationem habeat ad ipsarum longitudinem, quavis ratione imaginabili" (en Huygens [1929] pp. 265 y 267). Como ya hemos adelantado en la nota 1534, Huygens hace un uso en esta igualación de las rectas *BK* y *BC*, *BL* y *BD*, *BN* y *BS* de aquel mismo fundamento que en Newton tomará la forma de Principio en el Lemma 1 y 7 de los *Principia*.

[1541] Algo que dice expresamente Huygens: "Cogitemus maximam quampiam rotam hanc esse, ut hominem prope circumferentian, ei insistentem in B, facile una secum deserat" (en Huygens [1929] p. 261).

[1542] De Gandt dirá al respecto: "la position de l´observateur terrestre rend préférable ce point de vue" (en De Gandt [1979] p. 145). Lo cierto es que no se trata de que un punto de vista sea preferible a otro. Adoptar uno u otro punto de vista es lo mismo que tener una u otra posición de observación. Las distintas posiciones del observador darán, a su vez, distintas observaciones – no ya preferentemente, sino, necesariamente–. Como veremos, éste es el fundamento del error de Hegel.

[1543] Esta curva es construible mecánicamente si, después de rodear un círculo con una cuerda, empezamos a desembrollarla de tal forma que siempre quede tensa. La curva que dibujará el extremo de la cuerda será una evoluta.



[2]

Esta curva pretende representar algo, por principio, irrepresentable: a saber, la trayectoria de un cuerpo que ha sido soltado de la unión que lo mantenía atado al centro por parte de un observador que se mueve circularmente sobre el cuerpo principal. La irrepresentabilidad de esta representación estriba en que mientras que, por un lado, el observador es situado dentro de lo representado –a saber, sobre el cuerpo. Por otro lado, el observador es parte de la misma representación en la representación que se realiza. En otras palabras Huygens pretende aquí, por así decir, saltar sobre su propia sombra. Según la descripción de este dibujo, el cuerpo que ha sido soltado recorrerá en el primer instante un espacio perpendicular a la tangene en este punto. Esta recta tangente será la representada en el gráfico por el segmento *BV*. En los instantes siguientes el cuerpo se irá quedando atrás con respecto al observador situado sobre el cuerpo móvil[1544]. Esto último es algo que desde la Física moderna se explica diciendo que el cuerpo ha sido “liberado” de la fuerza de coriolis que, recordemos, es la responsable de que en los hemisferios del norte y sur del planeta los cuerpos caigan ligeramente hacia el este en relación al eje radial de la Tierra. Podemos representarnos el efecto de esta fuerza de la manera siguiente: la ralentización del cuerpo liberado se debe a que ha de recorrer una círculo cuyo radio aumenta según se aleja del cuerpo en rotación –y ello con la misma fuerza impresa con el que, en principio, acompaña al movimiento del cuerpo en rotación. La razón por la que los segmentos *NR* y *NB* deben tener la misma longitud la encontramos en el dibujo [1].

En efecto, ya habíamos dicho sobre esta imagen que la igualdad entre los segmentos *BE* y *BC*, *BF* y *BD*, *BM* y *BS* era algo que tenía lugar únicamente a escala infinitesimal. En una escala finita lo que de hecho tenemos es que el cuerpo liberado recorrerá los segmentos *BK*, *BL* y *BN* al mismo tiempo que el cuerpo con el movimiento circular recorre los espacios *BE, BF* y *BM*. Esta misma idea fundamentada en los trechos finitos, si es expresada desde un observador situado sobre el cuerpo con el movimiento circular, da lugar al dibujo [2][1545]. En él la igualdad entre los segmentos *BE* y *BK*, *BF* y *BL*, *BM* y *BN* equivale a la igualdad entre las tangentes al círculo y los segmentos del perímetro del dibujo [2].

[1544] Hoy en día la causa del retraso al que el cuerpo se ve sometido se le llama fuerza de Coriolis.

[1545] Con esto no queremos decir que en el dibujo [1] no se presuponga que el observador realiza las observaciones desde el cuerpo móvil. Lo que ocurre es que Huygens es del todo consecuente con este presupuesto a la hora de elaborar el dibujo [1]. De este modo, al hablar de la fuerza centrífuga que “siente” el observador y que es realizado por el cuerpo que al ser soltado de su atadura llegará a recorrer tal trayectoria etc. está presuponiendo que el observador se encuentra situado sobre el cuerpo con el movimiento circular. Pero, al mismo tiempo, la recta tangente asignada al movimiento contrafáctico del cuerpo liberado sólo tiene sentido desde la perspectiva de un observador situado fuera del sistema de referencia móvil.

Ilustremos esta idea con un ejemplo. En el dibujo [2] habíamos dicho que, por la definición de la curva evoluta, los segmentos *NR* y *NB* eran iguales. Pues bien, el significado de esta igualdad consiste en que el segmento *NB* representa la trayectoria del observador durante un tiempo dado *t* mientras que el segmento *NR* representa la distancia que el objeto liberado en el punto *B* habría recorrido en este mismo tiempo *t*. Como decíamos, la igualdad entre los segmentos *BE* y *BK*, *BF* y *BL*, *BM* y *BN* equivale a la igualdad entre los segmentos *LO* y *LB*, *NR* y *NB*, *MS* y *MB* etc.

La dificultad para comprender la curva evoluta consiste en que, en contra de lo que cabría esperar, no son los segmentos de la evoluta los que son iguales a los segmentos de la circunferencia, sino que son las tangentes las que se igualan a las respectivas partes de la circunferencia. Si bien es verdad que resulta obvio que el recorrido fáctico es el que realiza el objeto a lo largo de la circunferencia, no lo es tanto que el recorrido contrafáctico –i.e. aquél que el cuerpo habría recorrido en caso de haber sido soltado en un punto en particular– no tenga que ser el trayecto descrito por la curva evoluta. El concepto de recorrido contrafáctico se refiere al espacio que ha recorrido el cuerpo desde el punto en el que ha sido liberado, pero teniendo en cuenta que en el gráfico [2] el punto *B* ha ido desplazándose. Así, al cabo de un rato el punto *B* estará en el punto *N* y el espacio desde el punto en el que ha sido liberado el cuerpo no será el espacio desde el punto *B*, sino desde el punto *N*. Es importante tener presente que con "punto desde en el que ha sido liberado el objeto" no se refiere Huygens a un punto del, llamémoslo así, espacio absoluto, sino que se refiere a un punto móvil de la circunferencia –a saber, al lugar que ocupa el móvil que se encuentra movimiento circularmente. Si olvidamos esto será inevitable ver algo erróneo o desacertado en el esquema de Huygens[1546].

En cualquier caso, el análisis del movimiento circular en Huygens no nos interesa tanto por la fórmula con la que el físico holandés resuelva el problema, sino por la perspectiva del observador desde la que aborda el problema. Hemos intentado mostrar que esta perspectiva es la de alguien que se encuentra situado sobre el objeto móvil. Hemos visto ya que la fuerza asociada a esta perspectiva era la denominada "fuerza centrífuga". Nos falta ahora por ver que la fuerza que irá asociada a un punto de vista o a un sistema de referencia, digamos, más democrático y científico es el de la fuerza centrípeta. Esta fuerza va asociada en Física a los sistemas de referencia inerciales, y, en la historia de esta ciencia, al nombre de Isaac Newton.

8.2 LA REVOLUCIÓN NEWTONIANA

8.2.1 Consideraciones previas

Será Newton el primero en representar el movimiento circular mediante el uso de un proceso al límite en el que los protagonistas serán unos segmentos paralelos al radio del círculo que representaban el trayecto finito –no infinitesimal– o previo al paso al límite

[1546] La concordancia entre los dibujos [1] y [2] se basa en la consideración siguiente: mientras que, como hemos dicho, en [2] el punto de liberación se mueve con respecto al observador exterior, en el gráfico [1] el observador se encuentra situado sobre el cuerpo que en el gráfico [2] es contemplado desde fuera. Así, si consideramos que la recta *NR* de [2] corresponde en [1] a la recta *BM*, tendríamos que concluir que el punto *N* de la figura [2] es en el dibujo [1] el punto *B*. De ahí que parezca que incluso los puntos *E*, *F*, *M*, son puntos contrafácticos del movimiento. El punto *B* es el único que fácticamente se mueve, pero cuyo movimiento no es representado en el dibujo [1] por situarnos nosotros –el observador– sobre el mismo punto.

resultado de la atracción ejercida por el centro[1547]. La formulación explícita de esta forma de aproximación al movimiento circular la realiza Newton en el primer teorema del tratado *de Motu*, en el que, partiendo del presupuesto de una fuerza dirigida al centro de un círculo, se deduce la tercera ley de Kepler[1548]. Nuestro objetivo de ahora es mostrar la importancia de este cambio de construcción en Newton. Las características principales de este cambio son las siguientes:

i) Newton rompe con la, por así decir, intuitiva forma de representación de Huygens, según la cual el observador es representado como si estuviera situado sobre el cuerpo móvil. Con Newton el observador no está situado ya en el cuerpo móvil sino que, al contrario, considera las cosas desde un sistema de referencia inercial.

ii) El nuevo componente del movimiento circular, el segmento paralelo al radio, es producto de una fuerza dirigida a un punto que se encuentra situado fuera de una trayectoria inicial inercial. Este punto será siempre el mismo. Por ello, la acción sucesiva sobre la trayectoria inercial –los desvíos sucesivos sobre la misma– dará lugar a una trayectoria final circular del móvil. La fuerza dirigida a este centro fijo será denominada "fuerza centrípeta". La construcción newtoniana es coherente sólo bajo la condición de que los segmentos inerciales y centripetales tengan una "longitud infinitesimal".

iii) Con el nuevo proceder constructivo, Newton es capaz de hacer uso del paralelogramo de fuerzas[1549]. Una fuerza central es paralela al radio sólo bajo la condición de tener una longitud infinitesimal. Esto último hace posible la introducción del paralelogramo de fuerzas ya que toda fuerza representable sobre el paralelogramo debe de ser susceptible de desplazamiento. Esta capacidad de ser desplazado es lo que hace posible considerar a las dos fuerzas actuando uno primero y el otro despúes, el otro primero y el uno después o el uno y el otro a la vez[1550]. Así, la fuerza central debe ejercerse en una dirección paralela al radio[1551]. De este modo, desde las reglas de construcción del paralelogramo es indiferente si primero suponemos el movimiento inercial y luego el centrípeto o si lo hacemos al revés. Como se sabe, Newton se queda con la primera alternativa –es decir, comienza con la suposición del movimiento inercial para, en un segundo paso, pasar a considerar el movimiento que es resultado de la fuerza centrípeta. Y es que esta indiferencia en el orden de las fuerzas que tiene lugar en el plano del paralelogramo no se cumple en relación a iii.i) –la fuerza requerida

---

[1547] Esta forma de construir el movimiento circular es algo que implícitamente hace Newton en los manuscritos preparativos al tratado *de Motu*. Véase el manuscrito MS. Add. 3958.5 Fol. 87,89 en Herivel [1965] pp. 192-195. Cf. también el segundo teorema del tratado *de Motu* en Herivel [1965] p. 259. La demostración de este último teorema es correcta únicamente bajo la condición de que los segmentos *CD* y *cd* son "infinitamente pequeños", esto es, cuando estos segmentos son paralelos al radio. En el texto de Harivel el dibujo del la págnia 259 no reproduce bien –cosa que sí hace De Gandt en De Gandt [1995] p. 26– el original –que es reproducido en la página 293– ya que las dos figuras han de ser, en términos de Leibniz, similares.

[1548] Hegel observa correctamente que Newton demuestra "demasiado" con esta demostración: "der Newtonsche Beweis von dem Satze, dass ein dem Gravitationsgesetze unterworfener Körper sich in einer *Ellipse* um den Zentralkörper bewege, auf eine *konische Sektion* überhaupt geht, während der Hauptsatz, der bewiesen werden sollte, gerade darin besteht, dass die Bahn eines solchen Körpers nicht ein Kreis oder sonst eine konische Sektion, sondern allein die Elliptische ist" (en Enz. § 270 (Hegel [IX] p. 86)). Sin embargo, para De Gandt, en esta generalidad reside el mérito de Newton: "Newton´s genius was in this restraint: from the beginning he established the law of areas on the level of generality that properly belongs to it" (en De Gandt [1995] p. 24).

[1549] Cf. el manuscrito Add. 3965.1 (en Herivel [1965] pp. 246-256) donde Newton hace uso del paralelogramo de fuerzas pocas líneas antes de la demostración del Teorema 1 de *de Motu* que ahora comentamos.

[1550] Esta simultaneidad es lo que pretende hacer posible Newton con las siguientes prescripciones: "spatio quam minimo et quasi infinite parvo" (en Herivel [1965] p. 263) o "differentia supponitur infinite parva" (en Herivel [1965] p. 193)

[1551] Algo que expresa Newton así: "Ipsi BS parallela agatur cC occurrens BC in C" (en Herivel [1965] p. 258).

para explicar el movimiento– ni tampoco en relación a iii.ii) –las distintas construcciones del movimiento.

iii.i) En relación a las fuerzas requeridas para la construcción del movimiento, podría parecer que la alternativa no contemplada por Newton –aquélla según la cual primero tiene lugar una fuerza central para luego pasar al movimiento inercial– da lugar a considerar las fuerzas centrífugas en vez de las centrípetas. Desgraciadamente el asunto es más complicado que esto con lo que tendremos que volver sobre esta cuestión en el apartado 8.2.3.

iii.ii) La segunda alternativa relevante frente a la de Newton es la de Huygens. Tal y como hemos visto, Huygens parte del presupuesto del movimiento inercial, para, de ahí, deducir el *connatur a centro*. Esta tendencia es, sin embargo, resultado de una fuerza que ha sido compensada –una fuerza, virtual[1552]. Huygens no parte del caso finito para, de ahí, pasar al caso infinitesimal mediante un proceso al límite como lo hace Newton. Huygens más que construir con esta fuerza el movimiento será con el movimiento con el que costruye la fuerza[1553]. Newton, sin embargo, hace uso de la fuerza centrípeta para construir el movimiento circular. Esto es lo que ocurrirá en la primera proposición del primer teorema del primer libro de los *Principia*. En él Newton parte del movimiento inercial y con la ayuda de una fuerza centrípeta construye el movimiento curvilíneo.

iv) Con la forma newtoniana de representar el movimiento circular será posible considerar a la fuerza centrípeta como la causante del cambio en la dirección del cuerpo. Obviamente esto no puede ser así en la dimensión finita, donde la diagonal del paralelogramo es mayor que los lados. Y es que en un paralelogramo rectangular de dimensiones no infinitesimales la diagonal es mayor que cualquiera de sus lados y, por ello, tanto la fuerza inercial como la centrípeta deben haber dado lugar a cambios positivos en el espacio recorrido en una u otra dirección. Esto no tiene por qué ser así en la dimensión infinitesimal. En esta dimensión, bajo la perspectiva de las primeras y últimas razones de Newton, la trayectoria recorrida por el móvil –a saber, el arco– es igual de larga que el componente tangencial del paralelogramo. Con ello a la responsable del otro lado del paralelogramo sólo le será posible ser responsable del cambio de dirección del móvil.

Será en el Lemma 7 de su *De Methodo Rationum primarum & ultimarum* de los *Principia*[1554] donde establece Newton la igualdad entre el arco, la diagonal y la tangente. El arco es la trayectoria del cuerpo que resulta de una acción continua de una fuerza. La diagonal es, por el contrario, el resultado de un único golpe o presión aplicado sobre el cuerpo. Para el objetivo de este apartado, resulta particularmente importante la igualdad entre la diagonal y la tangente. Gracias a este Lemma nos será permitido considerar –en una dimensión infinitesimal o en *rationes ultimæ*– el segmento paralelo al *sinus versus* como producto de la acción de la fuerza centrípeta. De este modo, la fuerza centrípeta será la causante del cambio de dirección del cuerpo pero no del espacio recorrido por él. Con ello surge la caracterización del Principio de inercia en forma de una ley que tiene lugar no ya, sobre magnitudes, sino sobre vectores[1555]. El movimiento curvilíneo es considerado así como un movimiento acelerado, es decir, uno que es resultado de la acción continua de una fuerza[1556].

[1552] "Virtual" en el sentido de que sus efectos no tienen la forma de un movimiento, de algo real.

[1553] Así se expresa A. Doz en Hegel [1994] p. 180: "loin qu´elle serve à construire le mouvement, c´est au contraire à partir du mouvement qu´elle est construire".

[1554] Cf. para la primera edición Newton [1686] pp. 26-36 y para la traducción inglesa Newton [1999] pp. 433-443.

[1555] A esta formulación vectorial se debe, según R. Westfall, la superioridad del Principio de inercia sobre las teorias basadas en el concepto de *impetus*: "the concept of impetus rejected any effort to state it in vectorial terms. From a dynamic point of view, then, changes of direction were anomalous events […] there were not seen

8.2.2 La ley del paralelogramo de fuerzas

Hemos adelantado ya algunas de las cuestiones con las que vamos a ocuparnos en este apartado en el que nos detendremos en un aparato de representar y sumar fuerzas denominado paralelogramo de fuerzas. Lo primero que hay que decir al respecto es que la denominación "paralelogramo de fuerzas" puede dar lugar a confusiones. Esto se debe a que lo que de hecho se representa en un paralelogramo de fuerzas no son las fuerzas mismas sino las velocidades que resultan de ellas. Para poder decir que, mediante las velocidades, se están representando indirectamente las fuerzas necesitamos un axioma adicional que postule la proporcionalidad entre las velocidades y las fuerzas. Esto es lo que se hace, en los *Principia*, en el segundo axioma de Newton[1557]. Este axioma es el equivalente físico del Principio de analogía utilizado por Oresme para medir las cualidades[1558]. En el caso del paralelogramo de fuerzas los segmentos son los espacios recorridos real o virtualmente en un determinado tiempo que son proporcionales a las fuerzas que se pretenden representar.

No obstante, interpretar la ley del paralelogramo como una ley que atañe a las fuerzas no está libre de objeciones. Así en su *Dissertatio*, Hegel llama la atención sobre la tendencia de multiplicar con el uso negligente del paralelogramo las fuerzas de la naturaleza sin ton ni son:

Sed ubi Newton, qui lucem, quam natura simplicem esse voluit, in partes dissecuit, ita alias simplices vires recolvit, lineasque quibus ad theoremata de illarum quantitatibus struenda utitur, vires appellat, physici jure mirantur, quomodo per tractationem phaenomeni mathematicam tanta virium multitudo oriatur, quas natura ignorat[1559]

as dynamic actions" (en Westfall [1972] p. 188) . El mismo punto de vista es compartido también por M. Wolff en Wolff [1978] pp. 322 y sigs.

[1556] Huygens había demostrado ya en su *de vi Centrifuga* que el espacio recorrido bajo la acción de la fuerza centrífuga es directamente proporcional al cuadrado del tiempo. Con ello, el concepto de Huygens de fuerza centrífuga cumple con la definición de la noción de fuerza que rige en un sistema conceptual basado en el Principio de inercia: la acción de una fuerza constante da lugar a la aceleración uniforme. Los problemas que su enfoque suscita al respecto son dos. En primer lugar, Huygens hace uso de una geometría de segmentos no infinitesimales, cuando el proyecto de calcular el *connatus* presuponía calcular el efecto de las fuerzas en su primer instante de acción. En segundo lugar, la demostración de Huygens se reduce *de iure* a trayectorias circulares. La correlación entre los infinitesimales y el *connatus* es formulada en la p. 403. Newton es más consecuente en este respecto y otorga a la mencionada proporcionalidad el estatuto de hipótesis. Cf. Herivel [1965] p. 258: "Hypoth 4. Spatium quod corpus urgente quacunque vi centripeta ipso motus initio describit esse in suplicata ratione temporis".

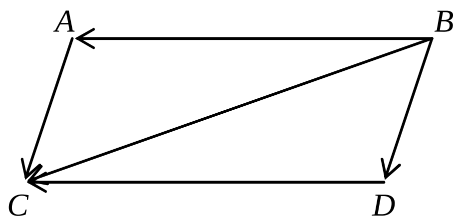
[1557] Cf. Newton [1999] p. 416. Newton mismo cree poder representar directamente las fuerzas cuando en el Corolario 2 de los *Principia* dice lo siguiente: "Ponderis autem A exponatur vis tota per lineam AD" (en Newton [1686] p. 14) (cf. la traducción inglesa en Newton [1999] p. 418 "and if now the total force of the weight A is represented by line AD").

[1558] Cf. la traducción inglesa de la edición de M. Clagett: "For whatever ratio is found to exist between intensity and intensity, in relating intensities of the same kind, a similar ratio is found to exist between line and line, and viceversa" (en Clagett [1968] p. 16).

[1559] Véase la traducción de Neusers en Neusers [1986] p. 91: "Aber wenn Newton das Licht, das die Natur einfach haben wollte, in Teile aufgespalten hat, (auch) die anderen einfachen Kräfte auflöst und Linien Kräfte nennt, die er benutzt, um Lehrsätze über die Beträge (der Kräfte) aufzuhäufen, dann wundern sich Physiker zu Recht, wie durch mathematische Behandlung so viele Kräfte entstehen sollen, die die Natur nicht kennt".

En su crítica al, por así decir, uso dinamicista del paralelogramo, Hegel sigue la interpretación meramente foronómica de Kant. Este último diferenciará la construcción foronómica – e.d., geométrico– de la mecánica[1560]. En las líneas que ahora siguen, nos limitaremos a interpretar foronómicamente el paralelogramo sinque nos comprometamos con la existencia de las causas de las velocidades representadas por él.

La ley del paralelogramo es una regla de construcción por la que se suman[1561] dos vectores[1562] que tienen el mismo origen. El módulo de cada vector representa el espacio recorrido por el cuerpo en la dirección de este vector en un tiempo dado. La regla del paralelogramo presupone que este espacio ha sido recorrido con una velocidad uniforme o, si no ha sido éste el caso, que ha sido recorrido con una velocidad media obtenible mediante la regla de la escuela de Merton[1563]. Debido a que la velocidad representada es una en particular[1564], podemos representarnos el movimiento del cuerpo como el producto de un único golpe ejercido sobre él. El cuerpo es imaginado en el vacío por lo que podrá moverse con la velocidad alcanzada indefinidamente.



Por esta razón, los puntos *C*, *A* y *D* del gráfico de arriba no son, en contra de lo que tal vez cabría esperar, puntos o lugares de reposo alcanzados por el cuerpo, sino lados del cociente –en el caso de *A* y *D*– y exponente del cociente de una proporción –en el caso de *C*. El paralelogramo no suma dos movimientos consumados sino la proporción entre dos movimientos que están teniendo lugar, *de faco* o *de iure*, simultáneamente. Debido a que los movimientos, como decíamos, no están consumados, no se suman absolutamente sino en relación uno al otro. Esta relación es la proporción que se establece entre los lados del paralelogramo. La interpretación física[1565] de esta proporción es la dirección del movimiento compuesto por los dos movimientos primitivos.

[1560] Cf. Kant [Ak. IV] p. 493: “Die geometrische Construction erfordert, dass eine Größe mit der andern, oder zwei Größen in der Zusammensetzung mit einer dritten einerlei seien, nicht dass sie als Ursachen die dritte hervorbringen, welches die mechanische Construction sein würde”.

[1561] Como regla de composición, el paralelogramo de fuerzas cumple con las siguientes condiciones: 1) establece un criterio de homogeneidad para descartar lo componible de lo que no lo es y 2) proporciona el resultado de la composición como dado en un instante.

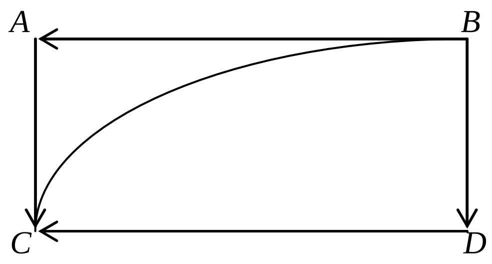
[1562] Evidentemente, mediante la sucesiva aplicación de la regla del paralelogramo podríamos llegar a sumar una pluralidad infinita de vectores.

[1563] Ello se debe a que mediante una recta en la que se represente la velocidad de un cuerpo las distinciones de las velocidades, la aceleración, no pueden ser representadas. Para ello necesitaríamos al menos dos velocidades, es decir, dos rectas.

[1564] Es decir, debido a que no se representan una serie de velocidades crecientes o decrecientes, e.d., no se repesentan aceleraciones mediante el paralelogramo.

[1565] Otra interpretación podría ser la geométrica. En base a ella, podríamos decir, por ejemplo, que la velocidad de un cuerpo es tres veces mayor que la velocidad de otro cuerpo. En este caso el paralelogramo no sería un

Con el fin de no mezclar una lectura mecánica con una dinámica, esto es, para no tener que aceptar una aceleración infinita que estaría causada por el choque impreso en el punto *B*, tenemos que partir del supuesto de que el cuerpo móvil se encontraba ya en movimiento en ese punto. Si consideramos el caso en el que el ángulo *ABD* es recto, estaremos ante el instrumento necesario para representar el movimiento circular[1566] sobre unas coordenadas en las que las dos direcciones[1567] son absolutamente independientes entre sí:



El último paso para poder representar el movimiento circular mediante un paralelogramo es desplazar el punto *C* hacia el punto de origen *B* hasta que tengamos las últimas relaciones entre el arco, la diagonal y el *Sinus Versus*[1568]. Es decir, *grosso modo*, tenemos que hacer infinitamente pequeños[1569] los lados *AB* y *BD*. La importancia de la igualdad en el plano infinitesimal entre la diagonal y la tangente ha sido ya mencionada. Ahora tenemos que llamar la atención sobre el hecho de que la introducción de las fuerzas –sea en forma de choques discretos o continuos– requiere a su vez la introducción de consideraciones infinitesimalistas. En nuestro caso, el cambio de dirección constante es concebible y matemáticamente tratable sólo bajo una aproximación infinitesimalista.

Así como el movimiento es el cambio continuo de lugar, la acelaración es el cambio continuo del movimiento del cuerpo. Tal y como el primer axioma de Newton define el movimiento, la aceleración es el movimiento que cumple con este axioma en la medida en que no cumple nunca con ella. Los conceptos que hacen posible esta supuesta contradicción son los de la fuerza y el de la continuidad de la misma.

---

mecanismo para sumar distintos movimientos del mismo cuerpo, sino de comparar distintas velocidades de distintos cuerpos.

[1566] El movimiento elíptico de los planetas no es representable mediante el paralelogramo de ángulo recto, pues en estas órbitas el ángulo de las fuerzas sufre una variación constante.

[1567] Y con ello, en una interpretación mecánica, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

[1568] Que es la recta *BD*.

[1569] No seguimos aquí la interpretación de Whiteside (en Whiteside [1966] p. 110) quien del hecho de que el segmento *AC* –incluso en el límite– representa una involuta deduce la existencia de infinitesimales de segundo orden en el pensamiento matemático de Newton. Los infinitesimales de segundo orden serán introducidos también por T. Schubert en su exposición de la primera proposición del primer libro de los *Principia*, en este caso para mostrar una supuesta inexactitud en Newton. Frente a ello consideramos que cuando Schubert (en Schubert [1798] p. 21 §16) iguala *AB-Bc* a $\partial\partial s$ para de ahí concluir que Newton ha tenido que igualar ilegítimamente esta última expresión a cero ($\partial\partial s=0$), ignora que el choque en dirección al centro no ha tenido ningún efecto sobre la longitud de los trayectos recorridos *AB*, *Bc*,... Esto es, consideramos que el presupuesto con el que trabajo Schubert ("wirkt aber nun eine Kraft in dem Körper nach der Richtung seiner Bewegung, so…" *loc.cit*) es insostenible ya que en la primera proposición de los *Principia* el golpe "atractivo" únicamente actúa sobre la dirección del cuerpo que se mueve con una velocidad uniforme.

8.2.3 La fuerza centrífuga en Newton

No podemos pretender ofrecer aquí una exposición exhaustiva del papel y desarrollo del concepto de la fuerza centrífuga a lo largo de los trabajos físicos de Newton[1570]. Esta tarea exigiría una investigación que saldría de los marcos delimitados a esta tesis. La rápida incursión que realizaremos, sin embargo, en esta materia es exigida por el lugar intermedio en el que situaremos el pensamiento de Hegel: por un lado tendrá como acompañante a Huygens, pero, por el otro lado, hará uso de la fuerza centrípeta de Newton. Veremos a continuación que esta alternativa en la que situamos a Hegel se dará también, sólo que no simultaneamente, en Newton. El objetivo de todo este capítulo consiste en ver, precisamente, en qué se basa y a qué apunta esta simultaneidad. Para esto, comenzaremos mostrando la aproximación de Newton a al fuerza centrífuga.

Es un hecho innegable que Newton hace uso de la fuerza centrífuga en sus primeros manuscritos. Newton introducirá la fuerza centrífuga en su análisis del movimiento circular mediante un procedimiento que recuerda al de Huygens[1571]. La diferencia entre los dos autores se reduce a la terminología: en vez del término “Centrifuga”, Newon hablará de “vis a centro” o de “conatus a centro”. Estos términos no aparecerán en el manuscrito *de Motu* donde serán substituidas por el de fuerza centrípeta. Este último término será introducido explícitamente en la primera Proposición del primer Teorema de los *Principia*. A pesar de ello, el concepto de fuerza centrífuga no desaparecerá por completo de los *Principia* ni tampoco de la correspondencia de Newton[1572].

Uno de los más significativos pasajes de los *Principia* en el que se habla explicitamente de la fuerza centrífuga es el Escolio a las definiciones del libro primero[1573]. En él Newton expondrá los conocidos experimentos del cubo de agua y de los dos globos. En lo que se refiere al primer experimento, el *conatus recedendi ab axe motus* será el indicio –o la prueba– de que el movimiento circular del agua es algo efectivo o absoluto. Newton distinguirá los movimientos absolutos de los relativos en que los primeros tienen una fuerza como causa de su aceleración[1574]. Esto significa que allí donde hay una resistencia al cambio de estado originada por la masa inercial del cuerpo se hablará de movimiento absoluto. La búsqueda es así una búsqueda de las fuerzas de inercia. Veremos en el siguiente apartado que la fuerza de centrífuga es una fuerza perteneciente a esta clase así como en qué modo esto es así.

El abandono gradual del uso del concepto de fuerza centrífuga a favor de la fuerza centrípeta estará unido en Newton al abandono de sistemas de referencia móviles o acelerados a favor de sistemas inerciales. Podríamos expresar esta idea algo más gráficamente diciendo que Newton pasará de situarse sobre el objeto con órbita circular a situarse, mediante un acto que podríamos denominar de reflexión, fuera de esta órbita. Este lugar en el que se sitúa Newton, es el de un sistema de referencia inercial o absolutamente inacelerado. Para

---

[1570] Dos estudios recomendables sobre el tema son el de Herivel (en Herivel [1965] p. 54 y sigs) y el de Bertoloni (en Bertoloni [1990] p. 27 y sigs).

[1571] Cf. Herivel [1965] pp. 147, 193, 306 (Def. 12) y 314 (Def. 14).

[1572] Cf. la carta a Halley del 14 de julio de 1686 (citado en Herivel [1965] p. 58), a Oldenburg del 23 junio de 1673 y a Hooke del 13 diciembre de 1679 (citados en Bertoloni [1990] p. 28).

[1573] Cf. Newton [1999] p. 408.

[1574] Cf. Newton [1999] p. 412: „The causes which distinguish true motions from relative motions are the forces impressed upon bodies to generate motion“. El problema se traslada con ello de la foronomía (el denominado Principio óptico de relatividad) a la dinámica (el Principio dinámico de no relatividad). La nueva tarea consiste así en distinguir fuerzas que se aplican sobre el cuerpo y fuerzas que se aplican sobre el sistema de referencia. Esto deriva en la búsqueda de fuerzas de resistencia del cuerpo.

comprender el significado de esta afirmación vamos a ofrecer primero una deducción matemática de las dos fuerzas protagonistas en este capítulo para, a continuación, proseguir con la labor interpretativa.

8.3 LA REALIDAD DE LAS FUERZAS Y DE LOS SISTEMAS DE REFERENCIA

8.3.1 Introducción

Si tenemos en cuenta que, todavía hoy, muchos de los manuales de física no consiguen ofrecer una exposición clara y unívoca de la fuerza centrífuga, podría pensarse que el problema de una correcta comprensión de la existencia de esta fuerza permanece abierto o, al menos, no ha sido suficientemente aclarado. Tampoco la exposición hegeliana de la teoría del movimiento de los planetas de Newton está libre de confusión. Comprender cuáles son las razones de esta confusión exigirá no darnos por satisfechos con la mera negación de los errores cometidos por Hegel e intentar vislumbar en qué medida tales errores eran necesarios. Para tal fín será necesario una navegación que preceda al análisis de la obra del filosofo alemán en el que delimitaremos el terreno de juego sobre el que se sitúan tales afirmaciones.

Es habitual caracterizar la fuerza centrípeta como fuerza efectiva, mientras que se denomina fuerza aparente a la fuerza centrífuga. Veremos en lo que ahora sigue que las denominaciones “efectiva” y “aparente” sólo tienen sentido dentro de un sistema de referencia. Podemos adelantar algo los acontecimientos diciendo lo siguiente: la fuerza centrípeta es efectiva en relación a un sistema de referencia inercial, pero no en relación a un sistema de referencia, pongamos por caso, con movimiento circular. A su vez, la fuerza centrífuga es una fuerza inercial y es efectiva en un sistema de referencia con movimiento circular, pero no en uno inercial. En definitiva, vamos a ver que los términos “efectivo” y “aparente” no tienen un sentido absoluto o independiente del sistema de referencia.

8.3.2 El Principio de d’Alembert

Como habíamos visto en el capítulo anterior, podemos reducir un problema dinámico a otro estático introduciendo la denominada fuerza de d’Alembert o fuerza inercial. Para ello no tenemos más que reformular la igualdad newtoniana $F=m\cdot a$ de la forma siguiente:

$$F - m \cdot a = 0$$

y si definimos

$$I = -m \cdot a$$

entonces

$F + I = 0$

I es la denominada fuerza de inercia cuya existencia se debe a que el sistema de referencia del observador se encuentra en un estado de movimiento acelerado:

This vector I can be considered as a force, created by the motion. We call it "force of intertia"[1575]

Para ilustrar esta nueva formulación, puede resutar útil aplicar el Principio de d'Alembert sobre un dinamómetro. Una masa *m* que cuelga del dinamómetro ejercerá sobre el mismo una fuerza igual a $F^a = m \cdot g$, donde *g* es la aceleración producida por la gravedad terrestre. Al mismo tiempo, en el punto en el que cuelga la masa, el dinamómetro ejercerá una fuerza igual pero en dirección opuesta a la aceleración terrestre. Podemos denominar a esta fuerza F^r "fuerza de reacción de la fuerza F^a". La igualdad entre las dos fuerzas es algo que postulará Newton en la tercera ley del movimiento[1576]. Si aquello sobre lo que se sostiene el dinamómetro es un sistema de referencia inercial, la fuerza de reacción ejercida por él es igual a la fuerza gravitacional terrestre:

$$Tensión = Acción = Reacción = m \cdot g$$

Si ponemos el punto por donde se sostiene el dinamómetro en movimiento con una aceleración igual a γ en dirección al centro de la Tierra, la atracción ejercida sobre la masa disminuirá en esa cantidad[1577] –y, en consecuencia, también la fuerza de reacción ejercida por el dinamómetro:

$$Tensión = Acción = Reacción = m\ g - m\ \gamma = m \cdot (g - \gamma)$$

En el caso límite, el punto de sostén del dinamómetro se moverá con una aceleración igual a la aceleración gravitacional *g*. Esto es lo mismo que no tener ningún punto de apoyo: la masa no ejercerá fuerza alguna, ni el dinamómetro una fuerza de reacción[1578]:

[1575] Cf. Lanczos [1986] p. 88.

[1576] La igualdad entre la fuerza de acción y de reacción es una ley que es análoga a la primera ley del movimiento cuando ésta es aplicada sobre dos cuerpos que actúan entre sí. La relatividad no será ya entre sistemas de referencia inerciales, sino entre las mismas fuerzas y, por ende, entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales. Si atendemos a la analogía entre la primera y la segunda ley, podemos echar de menos una segunda parte en la tercera ley que hable de las fuerzas que rompen esta igualdad entre la fuerza de acción y de reacción y hacen posible los cambios de estado de reposo o movimiento uniforme rectilíneo.

[1577] El experimento es fácilmente imaginable suponiendo que el dinamómetro está sostenido desde el techo de un ascensor, que desciende con una aceleración ·γ hacia el centro de la Tierra.

[1578] No es que la masa no ejerza ninguna fuerza de acción por que no tenga ninguna fuerza de reacción que le haga contra ni tampoco que la fuerza de reacción tenga lugar primero para despúes pasar al no tener lugar de la fuerza de acción. Es decir, no hay un primero ni un despúes sino una simultaneidad en el darse de las dos fuerzas. Cf. d'Alembert [1758] p. 77: "Si plusierurs puissances se sont en équilibre d´une maniere quelconque, la force résultante sera nulle, s´il n´y a pas de point fixe".

Tensión=Acción=Reacción= $m \cdot g - m \cdot \gamma = m \cdot (g - \gamma) = 0$

Este último caso equivale a aquél en el que el dinamómetro ha sido puesto en caída libre[1579]. En él, el sistema de referencia no es por más tiempo inercial sino que es uno que se mueve con una aceleración g en dirección al centro de la Tierra[1580]. En este sistema de referencia todos los cuerpos que se mueven con la misma aceleración que el observador se considerará que se encuentran en reposo. No habrá necesidad de postular fuerzas para dar cuenta de la aceleración que únicamente es observable desde fuera de este sistema de referencia no inercial[1581]. Y viceversa, aquellos cuerpos que, desde un sistema inercial, son considerados en estado de reposo o movimiento uniforme aparecerán, desde el sistema en caída libre, como objetos cuyo movimiento necesita la introducción de fuerzas que actúan sobre los mismos[1582].

Obviamente, cuando decimos que el sistema de referencia no inercial se mueve con una aceleración γ, tenemos que tener en cuenta que esto es algo que sólo se sabe desde fuera del sistema. Al observador del sistema no inercial le parecerá que se encuentra en reposo y que comparte este reposo con el cuerpo de masa m. Si se le informa a este observador sobre el hecho de que hay un campo de fuerzas actuando en dirección al centro de la Tierra y que esta fuerza da lugar a una aceleración g, el observador que se encuentra sobre el sistema de referencia no inercial podrá explicar los hechos de dos modos distintos: puede pensar que hay otro campo de fuerzas enfrente de la Tierra de modo que él se encuentra entre dos campos de fuerza en estado de equilibrio. Pero puede pensar también que su sistema de referencia se mueve aceleradamente con una aceleración $\gamma=g$ en dirección al centro de la Tierra. Es decir, puede hablar de fuerzas o de aceleraciones para explicar los mismos fenómenos. De este modo, del mismo modo en que el Principio de relatividad galileano establecía la relatividad entre los movientos rectilíneos uniformes y el reposo, el Principio de relatividad *einsteiniano* establecerá la relatividad entre los movimientos acelerados y los inerciales. En el primer caso podrá hablarse de impulso aplicado sobre el cuerpo h en dirección a o del movimiento del observador b en dirección $-a$. Análogamente, en el segundo caso podrá hablarse indistintamente de una fuerza que actúa sobre el cuerpo h en dirección a o de una aceleración que mueve al observador b en dirección $-a$.

[1579] Este experimento trata de responder a la siguiente cuestión: ¿cuánto pesa un cuerpo con masa m mientras cae?.

[1580] Obviamos la pequeña desviación del vector de caída con respecto a la dirección radial que apunta al centro de la Tierra –desviación producida por la fuerza centrífuga– y suponemos que el experimento se realiza en el ecuador o en los polos. Cf. Alonso/Finn [1970] p. 129.

[1581] La necesidad de introducir fuerzas no será algo exclusivo de los sistemas inerciales sino, en mayor o menor grado, también de los sistemas no inerciales con un movimiento acelerado distinto a g.

[1582] Los cinco casos siguientes agotarían la casuística de este experimento: 1) el sistema de referencia se mueve con una aceleración $\gamma>g$, 2) el sistema de referencia se mueve con una aceleración $\gamma=g$, 3) el sistema de referencia se mueve con una aceleración γ donde $0< \gamma<g$, 4) el sistema de referencia se mueve con una aceleración $\gamma=0$ y, por último, 5) el sistema de referencia se mueve con una aceleración $\gamma<0$. Las fuerzas que actúan sobre la masa m para cada caso serán las siguientes: para 1) hay fuerzas negativas –en dirección contraria a g– actuando sobre la masa m, para 2) no ha fuerzas actuando sobre el cuerpo m, para 3) las fuerzas actúan positivamente –en la misma dirección que la aceleración terrestre– sobre el cuerpo con una intensidad menor que la gravitación, para 4) la fuerza que actúa sobre la masa es igual a la fuerza gravitacional y, por último, para 5) la fuerza que actúa sobre la masa es mayor que la fuerza gravitacional. Este último caso equivale a un objeto que está situado sobre un cuerpo que tiene –ignorando las diferencias introducidas por la fuerza centrífuga– una masa mayor que la de la Tierra.

8.3.3 Deducción de las fuerzas centrípeta, centrífuga y de coriolis

Vamos a ofrecer ahora una deducción formal de las fuerzas centrífuga, centrípeta y de coriolis que podrá encontrar el lector en cualquier manual de física clásica[1583]. Por motivos de simplicidad supondremos que los planetas se mueven en una órbita circular alrededor de un punto. Un ejemplo cuya expresión matemática queda recogida en la deducción que ahora ofrecemos es el de la honda.

Sean O^i y O^r dos sistemas de referencia. Cualquier punto de cada sistema de referencia es expresado por los correspondientes vectores (x^i,y^i,z^i) y (x^r,y^r,z^r) que tienen, por definición, el mismo origen. Sea el primer sistema de referencia O^i un sistema de referencia inercial y el segundo, O^r, un sistema de referencia rotatorio con el vector de rotación $\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$[1584]. Esto último hace que el sistema de referencia O^r sea, en relación a O^i, un sistema de referencia acelerado. Sean los correspondientes vectores unitarios de cada sistema de referencia $\vec{e}^{\,i}=(e^i_x,e^i_y,e^i_z)$ y $\vec{e}^{\,r}=(e^r_x,e^r_y,e^r_z)$. Debido a que los dos sistemas de referencia tienen el mismo origen, los dos vectores para un cuerpo o punto A serán iguales –si bien puedan tener distintos componentes. Es decir,

$$\vec{r}^{\,r}=x^r(t)\cdot e^r_x+y^r(t)\cdot e^r_y+z^r(t)\cdot e^r_z$$

y

$$\vec{r}^{\,i}=x^i(t)\cdot e^i_x+y^i(t)\cdot e^i_y+z^i(t)\cdot e^i_z$$

y

$$\vec{r}^{\,r}=\vec{r}^{\,i}$$

Introducimos ahora la notación $d^r\vec{X}/dt$ para expresar el movimiento del vector $\vec{X}$ en relación al sistema de referencia rotatorio. Tendremos así la siguiente igualdad:

$$\frac{d\vec{r}^{\,i}}{dt}=\frac{d^r\vec{r}^{\,i}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,i}=\frac{d^r\vec{r}^{\,r}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r} \qquad [1]$$

Esto último lo expresaremos así con más sencillez:

[1583] Nosotros seguiremos en lo principal a Lanczos [1986] p. 98 y sigs.

[1584] Presuponemos que la velocidad de rotación es constante. Para un caso más general cf. Lanczos [1986] pp. 100-103.

$$\vec{v}^{\,i} = \vec{v}^{\,r} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r}$$

Para obtener la aceleración tenemos que derivar esta expresión en relación al tiempo. El resultado será,

$$\frac{d\vec{v}^{\,i}}{dt} = \frac{d\vec{v}^{\,r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}^{\,r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}^{\,r}}{dt}$$

y si tenemos en cuenta que $d\vec{X}/dt = \dot{\vec{X}}$, esta expresión tendrá la forma

$$\dot{\vec{v}}^{\,i} = \dot{\vec{v}}^{\,r} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{\,r} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}^{\,r} \qquad [2]$$

Utilizaremos ahora la expresión [1] para obtener las siguientes dos expresiones:

$$\frac{d\vec{v}^{\,r}}{dt} = \frac{d^{\,r}\vec{v}^{\,r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r} \qquad [3]$$

y

$$\frac{d\vec{r}^{\,r}}{dt} = \frac{d^{\,r}\vec{r}^{\,r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r} = \vec{v}^{\,r} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r} \qquad [4]$$

Introducimos ahora [3] y [4] en [2]:

$$\dot{\vec{v}}^{\,i} = \frac{d^{\,r}\vec{v}^{\,r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r} + \vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{\,r} = \frac{d^{\,r}\vec{v}^{\,r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{\,r} + \vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r} + \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r}\right] =$$

$$= \frac{d^{\,r}\vec{v}^{\,r}}{dt} + 2\cdot\left[\vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r}\right] + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{\,r} + \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r}\right]$$

Que es lo mismo que

$$\vec{a}^{\,i} = \vec{a}^{\,r} + 2\cdot\left[\vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r}\right] + \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r}\right] + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{\,r}$$

o

$$\vec{a}^{r} = \vec{a}^{i} - 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}^{r}] - \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^{r}] - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

En esta expresión, el segundo término del lado derecho es la aceleración de coriolis, mientras que el tercero es la aceleración centrífuga en un sistema de referencia rotatorio o, respectivamente, la aceleración centrípeta en un sistema de referencia inercial. Si suponemos que la velocidad angular es constante podremos igualar a cero el último término.

Si, además de ello, multiplicamos toda la expresión con la masa *m* del cuerpo obtendremos la igualdad para las fuerzas:

$$F^{r} = F^{i} - 2 \cdot m \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}^{r}] - m \cdot \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^{r}] = F^{i} - F^{C} + F^{cf} \qquad [5]$$

y si consideramos las cosas desde el sistema de referencia inercial:

$$F^{i} = F^{r} + 2 \cdot m \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}^{r}] + m \cdot \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}^{r}] = F^{r} + F^{C} + F^{cp} \qquad [6]$$

donde:

F^{r} : fuerza registrada para el cuerpo *A* en el sistema de referencia rotatorio

F^{i} : fuerza registrada para el cuerpo *A* en el sistema de referencia inercial

F^{C} : fuerza de coriolis resultado del movimiento relativo del sistema de referencia rotatorio.

F^{cf} : fuerza centrífuga resultado del movimento relativo del sistema de referencia rotatorio

F^{cp} : fuerza centrípeta ejercida sobre el cuerpo *A* para un sistema de referencia inercial

8.3.4 Interpretación de las fuerzas derivadas en el apartado anterior

Abriremos esta sección –dedicada a la interpretación de las fuerzas centrífuga y centrípeta– con un texto de Newton. En un manuscrito redactado poco antes de *de Motu* encontramos la siguiente definición:

Def 12. Corporis vis insita innata et essentialis est potentia qua id perseverat in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in linea recta, estque corporis quantitati *proportionalis, exercetur dici potest corporis vis exercita…cuius [?] una species est vis centrifuga gyrantium*[1585]

¿La fuerza centrífuga, un "género de fuerza de inercia[1586]"? ¿un cuerpo que es inerte y, a la vez, ejerce resistencia? Veamos todo esto con más detalle.

Puede llamar la atención al lector de la primera ley del movimiento de Newton el que su primera parte sea algo difícil de formular matemáticamente. En efecto, la expresión "Corpus omne perseverare in statu suo quiscendi vel movendi uniformiter in directum" no puede significar lo que parece que significa cuando la aislamos de la segunda parte. Es decir, no puede ser que un cuerpo persevere en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, digamoslo así, cueste lo que cueste. No es que los cuerpos perseveran en su estado absolutamente, sino que lo hacen en una cierta medida. La siguiente pregunta es así evidente: ¿en qué medida?, ¿cómo podemos medir esta medida? La respuesta cuantitativa es la siguiente. La fuerza requerida para el cambio de estado es proporcional al cambio de estado obtenido (Segunda ley) y, al mismo tiempo, proporcional a la masa o fuerza inercial (Tercera Definición). Las dos proporciones pueden expresarse en una fórmula ajena al lenguaje de Newton:

$$F^{requerida} \propto F^{inercial} \cdot \Delta v$$

Donde $F^{requerida}$ es la fuerza requerida para cambiar el estado del cuerpo, $F^{inercial}$ es la resistencia ejercida por el cuerpo y Δv es el cambio de velocidad obtenido como resultado de la aplicación de la fuerza $F^{requerida}$. El problema de esta exposición es que, al llamar a la fuerza $F^{inercial}$ "fuerza de resistencia", estamos suponiendo que el cuerpo se encuetra en reposo absoluto o con un movimiento rectilíneo uniforme. En definitiva, estamos suponiendo que nuestro sistema de referencia en relación a *A* es inercial. Sin embargo, una vez que se ha establecido la proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración, es equivalente explicar los fenómenos suponiendo,

i) que nuestro sistema de referencia es inercial y que hay una fuerza que actúa sobre el cuerpo *A*.

ii) que no hay fuerzas actuando sobre el cuerpo *A* pero que nuestro sistema de referencia es no inercial o acelerado[1587].

[1585] Cf. Herivel [1965] p.306. Cf. también la traducción inglesa en Herivel [1965] p. 311: "The internal and innate force af a body is the power by which it preserves in its state of rest or of moving uniformly in a straight line. It is proportional to the quantity of the body, and is actually exercised proportionally to the change of state, and in so far as it is exercised it can be said to be the exercised force of the body, of which [?] one kind is the centrifugal force of rotating bodies".

[1586] Aquí y en lo que sigue traduciremos *insita* por *inercial*. Para ello nos apoyamos en pasajes de los *Principia* de Newton como los siguientes: "By inherent force I mean only the force of inertia" (Per vim insitam intelligo solam vim inertiae. En Newton [1999] p. 796) o "This force [the inherent force] is always proportional to the body and does not differ in any way from the inertia of the mass except in the manner in which it is conceived" (En Newton [1999] p. 404). Estos y otros pasajes son citados por Cohen (en Newton [1999] pp. 96-99) como prueba de esta misma tesis.

[1587] Esto que así presentamos es el conocido Principio de equivalencia de Einstein. Este Principio es el equivalente del Principio de la relatividad del movimiento galileano. La diferencia consiste en que, mientras el segundo postula la equivalencia mecánica de los movimientos uniformes entre sí así como en relación al reposo, el primero postula la equivalencia mecánica entre las acelaraciones y las fuerzas. Del mismo modo en que

Por lo tanto, la denominación “resistencia” no es del todo ajustada. De hecho, el propio Newton, poco después de esta cita, llamará la atención sobre la ambigüedad del término “inercia”. En efecto, dirá Newton, la inercia puede significar tanto la “resistencia” (I^{res}) de un cuerpo como el “impetus” (I^{imp}) realizado por él. No es difícil asociar la inercia de resistencia con la primera de las dos alternativas que disponemos para explicar los fenómenos físicos. En ésta se considera al cuerpo en reposo en relación a nuestro sistema de referencia y la fuerza con la que reacciona a la fuerza que se ejerce sobre él es, digamos, algo pasivo, una resistencia. A esta fuerza *insita* en el cuerpo la llamaremos masa inercial. La segunda fuerza no tiene este carácter de ser algo pasivo, sino que es ella misma activa. Esta fuerza tiene lugar cuando nos encontramos en la segunda alternativa (ii). En él, el observador se mueve con el cuerpo aceleradamente con lo que la fuerza que ejerce el cuerpo es producto de su impetus. En el caso de que el movimiento no inercial sea circular este impetus inercial llevará el nombre de fuerza centrífuga. Pero debido al Principio de relatividad *einsteiniano* debemos poder suponer que el cuerpo no se mueve aceleradamente sino que hay un campo gravitatoria que actúa sobre él. En este caso, la masa sobre el que actúa el campo gravitatrio es denominada *masa gravitatoria*. Dado que los tres casos[1588] son equivalentes entre sí, las masas que subyacen a estas observaciones habrán de ser, asimismo, equivalentes: la masa intercial y la masa gravitacional han de ser equivalentes.

En efecto, hemos visto en el parágrafo anterior que la fuerza centrífuga y la centrípeta tienen el mismo valor pero que tienen el signo contrario. La fuerza centrífuga y la centrípeta son resultado de la fuerza de inercia[1589] y, en particular, del doble carácter de la misma. En efecto, la fuerza centrípeta es la fuerza ejercida por un campo de fuerzas situado en el centro de la órbita sobre un cuerpo cuya inercia es lo que hemos denominado resistencia. A su vez, la fuerza realizada por la inercia de un cuerpo acelerado cuando nos situamos en un sistema de referencia inercial con respecto a él es la fuerza inercial que hemos denominado impetus. Mientras que la fuerza centrípeta da lugar a la resistencia, por parte del cuerpo, a cambiar de dirección, la fuerza centrífuga es el ímpetus al cambio de dirección.

La fuerza centrípeta es así un caso del modelo que hemos descrito en el punto i): consideramos que el cuerpo –por ejemplo, el planeta Tierra– se encuentra en movimiento circular y el sistema de referencia es inercial, por lo que deducimos la existencia de fuerzas actuantes sobre el cuerpo. Esta fuerza actuante es la fuerza centrípeta. Frente a ello, la fuerza centrífuga es la fuerza de resistencia que tiene lugar al considerar los fenómenos desde el modelo ii). En efecto, en este caso consideramos que el cuerpo no tiene un movimiento

---

podemos repartir la cuota fija de movimiento uniforme entre el cuerpo y nuestro sistema de referencia (siendo los dos extremos aquél en el que se asigna todo el movimiento uniforme al objeto considerando, con ello, al observador en reposo, y aquél en el que se asigna al observador todo el movimiento uniforme para considerar el objeto en reposo), del mismo modo podemos repartir la cuota de aceleración y fuerza entre lo observado y el observador (siendo en este caso los extremos estos dos: o bien consideramos que no hay fuerzas actuando sobre el cuerpo sino que todo se debe a la aceleración al que está sujeto el sistema de referencia, o bien consideramos que nuestro sistema de referencia es inercial o no acelerado y que las fuerzas actúan, digamos, con pleno rendimiento sobre el cuerpo).

[1588] Es decir, 1) el caso en el que se explican los fenómenos postulando un campo gravitatorio que actúa sobre el cuerpo inmóvil con respecto a tal campo, 2) el caso en el que se explican los fenomenos haciendo mover aceleradamente al sistema de referencia –en relación a tal sistema el cuerpo se encuentra en reposo– y 3) el caso en el que se considera al cuerpo con movimiento circular y bajo una fuerza centrípeta que le impida seguir la dirección de la tangente. La masa que protagonizará cada uno de estos tres casos lo hará bajo tres manifestaciones distintas. El reparto será el siguiente: en 1) la masa es la masa gravitacional, en 2) la masa inercial ímpetus y en 3) la masa inercial resistencia.

[1589] De ahí que es habitual caracterizar a ambas fuerzas o a la primera de ellas como fuerzas inerciales. Cf. por ejemplo Vogel [1977] p. 40 y sigs. Cf. también Bergmann/Schaefer [1954] p. 52 y sigs.

acelerado[1590] o, para no complicar demasiado las cosas, que el cuerpo se encuentra en reposo en relación a nuestro sistema de referencia. Esto equivale a decir que consideramos los fenómenos situados sobre el cuerpo o que es al sistema de referencia mismo a lo que adscribimos la aceleración. En este caso, en vez de hablar de fuerzas actuantes sobre el cuerpo hablaremos de la aceleración a la que está sometido el sistema de referencia. Por esta razón, la fuerza centrífuga no es una fuerza que actúa desde fuera del cuerpo sino algo que el cuerpo mismo realiza. A esto lo habíamos llamado la inercia en su variante de ímpetus.

Tal vez la diferencia entre los dos ímpetus no es tan evidente como en el caso del choque entre dos bolas con movimiento rectilíneo. En este caso, el cuerpo que se mueve con el sistema de referencia –el cuerpo considerado en reposo– es considerado capacitado de una inercia a resistir, mientras que el cuerpo que se mueve es considerado con una inercia al ímpetus. En el caso del movimiento circular los respectivos sistemas de referencia son el sistema de referencia inercial[1591] "exterior al cuerpo" por un lado, y el sistema de referencia anclado en el cuerpo con movimiento rotatorio[1592] por el otro.

Una vez dicho esto, resulta comprensible la igualdad expresada por las fórmulas [5] y [6] en relación a las fuerzas centrífuga y centrípeta. Esta igualdad es consecuencia de la tercera ley de Newton: en el caso de la fuerza centrípeta la masa es considerada como reactiva, y activa en el caso de la fuerza centrífuga. A diferencia del choque entre dos cuerpos, en el caso del movimiento rotatorio tendremos un único cuerpo, sólo que considerado en dos estados distintos: un estado fáctico y el otro contrafáctico.

Los distintos sistemas de referencia proporcionan, a su vez, distintos movimientos en el caso de que se llegue a soltar el cuerpo. Para un observador que se sitúa fuera del cuerpo rotatorio, el cuerpo que ha sido liberado trazará una trayectoria tangente a la órbita circular. A su vez, para un observador que rota junto con el cuerpo liberado, éste traza una trayectoria en el que el cuerpo se alejará progresivamente del observador que permanece en la órbita original, quedando, al mismo tiempo, progresivamente detrás del observador[1593]. Es decir, la trayectoria que tiene lugar para el sistema no inercial, dibujada desde el sistema inercial, sería algo así como una espiral en la que la tangente del inicio de la espiral –el segmento infinitesimal que representa el primer momento después de haber sido soltado– es perpendicular a la tangente a al dirección del punto en el que el cuerpo ha sido soltado[1594].

Podemos así transformar el "experimento del ascensor" –analizado unas líneas más arriba– en un "experimento centrifugal" equivalente a él. Del mismo modo en que ahí el aumento de la aceleración γ equivalía a una supresión de una fuerza que, considerada desde el sistema de referencia inercial, era perfectamente real, ahora, en el caso del "experimento centrifugal", veremos que un progresivo abandono del sistema de referencia inercial tendrá como consecuencia la progresiva eliminación de la fuerza que en ella es, en efecto, real: nos referimos a la fuerza centrípeta. Para ver esto sólo tenemos que abandonar progresivamente el

---

[1590] Lo que equivale a decir que el cuerpo se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme o está, con respecto a nuestro sistema de referencia, en reposo.

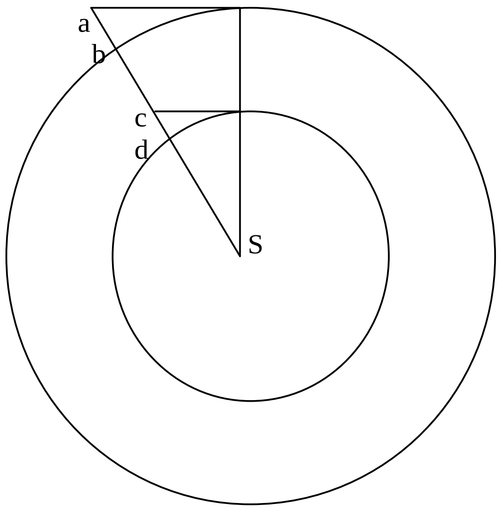
[1591] Para ser exactos, este sistema de referencia está también situado sobre el cuerpo –pero no sobre el cuerpo fáctico, sino, digmoslo así, el contrafáctico. Este movimiento contrafáctico es aquél del que parte Newton para construir su movimiento orbital y sufre la acción de la atracción central. La peculiaridad de estos dos sistemas de referencia –frente a los dos anteriores– consiste en que ahora sólo tenemos un cuerpo y no dos. De ahí que nos veamos obligados a poner el sistema de referencia sobre el mismo cuerpo, una vez sobre el cuerpo fáctico, la segunda vez sobre el cuerpo contrafáctico.

[1592] Por lo tanto, un sistema de referencia no inercial.

[1593] Algo que, tal y como habíamos adelantado al hablar de Huygens, se debía a la fuerza de Coriolis.

[1594] En esto reside el fundamento de la evoluta de Huygens.

sistema de referencia inercial que, por comodidad expositiva, situaremos en el centro de la órbita del planeta rotatorio:



En este caso, el aumento progresivo de la aceleración γ equivale a considerar el movimiento del planeta situado en la órbita más exterior desde una órbita cada vez más alejada del centro. El observador situado sobre S –i.e. el observador inercial– asignará a la acción de la fuerza centrípeta la longitud del segmento *ab*. Aquél que rota en una órbita situada entre el centro *S* y la órbita exterior del planeta[1595], asignará a la fuerza centrípeta un segmento *x*=*ab*-*cd* (donde 0 < *ab* – *cd* < *ab*). Es decir, el observador que ve las cosas desde el sistema de referencia rotatorio no considerará el trecho *cd* como algo que tenga que ver con la fuerza centrípeta, sino como el impetus del cuerpo en el que él se encuentra situado: la fuerza centrífuga. La parte de *ab* producida por la acción de la fuerza centrípeta será así *ab*-*cd*. Vemos así que en el límite, cuando el observador se mueve en la órbita exterior del planeta, el segmento asignado a la acción de la fuerza centrípeta será igual a cero, mientras que el segmento que desde *S* era asignado a la fuerza centrípeta es ahora asignado a la fuerza centrífuga.

Este aumento de la fuerza centrífuga se puede apreciar claramente en el siguiente experimento: un pendulo que está situado sobre el polo no es afectado en modo alguno por la fuerza centrífuga. Sin embargo, según vaya bajando hacia el equador, aumentará la magnitud de ésta progresivamente.

Para terminar esta exposición vamos a ver cuáles son, de acuerdo a la tercera ley de Newton, las fuerzas de reacción a estas dos fuerzas. En el caso de la fuerza centrípeta, la fuerza de reacción será[1596], vistas las cosas desde *S*, la tensión que ejercería el cuerpo que rota en la órbita exterior si estuviese atado al centro *S* mediante una cuerda. Esta tensión disminuirá a medida que el observador se sitúa en órbitas cada vez más alejadas de *S*. Así, en el caso de un observador que se encuentra situado en una órbita intermedia entre *S* y la órbita

---

[1595] Esto, dicho en el experimento del ascensor sería: 0<γ<g.

[1596]¡Y no la fuerza centrífuga!. Cf. Bergmann [1954] p. 96: “Welche Kraft greift nun an der Hand an? Nicht etwa die Zentrifugalkraft, sondern die reale Reaktionskraft nach dem dritten Newtonschen Axiom […] Die Zentrifugalkraft dagegen muss […] an dem Stein selbst angebracht werden”.

exterior, podríamos imaginar que la cuerda une al planeta con el observador. En este caso la tensión de la cuerda será menor que la tensión que se mide cuando lo que la cuerda une con el planeta es el punto *S*. Esta tensión es lo que expresábamos por el segmento *ab-cd*. En el caso extremo, caso en el que el observador se mueve junto con el planeta, no hay cuerda que una algo con algo porque los dos elementos que han de ser unidos son uno y el mismo: la tensión es cero.

En el caso de la fuerza centrífuga, la fuerza de reacción a la misma viene de la mano de aquél que sostiene el cuerpo en el lugar en el que se encuentra. Esta tensión será máxima en la órbita más alejada, y disminuirá en progresión geométrica según vaya disminuyendo el radio de la órbita. En el caso límite, visto las cosas desde *S*, no habrá nada que sostener[1597] y la tensión –que es índice de la fuerza centrífuga– será igual a cero.

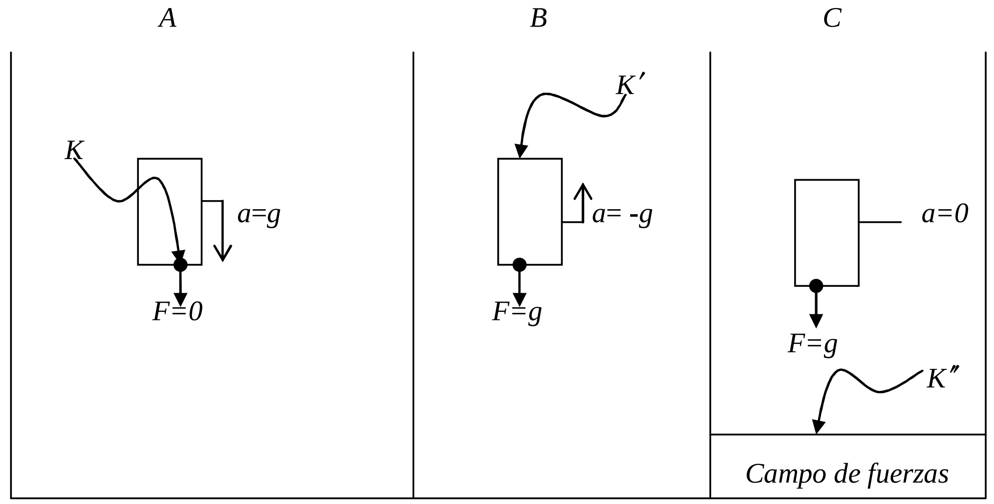
8.3.5 El Principio de equivalencia y la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria

Tenemos que ver ahora la relación entre el apartado previo y la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Comenzaremos explicando el denominado Principio de equivalencia de Einstein. Para ello haremos uso de un *Gedankenexperiment* que él mismo propone[1598] pero que, a nuestro modo de ver, no llega a exponer claramente ni a mostrar la finalidad a la que responde. Para ser exactos, es cierto que a Einstein no le cabe la menor duda de que la conclusión de la *Gedankenexperiment* deber ser la igualdad esencial (*Gleichheit des Wesens*) entre la masa inercial y la masa gravitatoria[1599]. Lo que ocurre es que el carácter de necesidad de esta igualdad es olvidado en demasiadas ocasiones por el propio Einstein[1600]. El carácter esencial de la igualdad es algo que ha quedado en el olvido en la Física actual con lo que ha devenido un simple objeto de costosas e insignificantes investigaciones de carácter empírico. Consideramos que esta "igualdad esencial" está únicamente propuesta en el texto de Einstein y que, por esta razón, necesita ser expuesta. Terminaremos la sección trasladando el *Gedankenexperiment* al caso del movimiento circular.

Supongamos un sistema de referencia *K* desde el que no se detecta ni aceleración ni acción de ninguna fuerza sobre un cuerpo *b*. Llamaremos "sistema de referencia inercial" a un sistema con tales características. Supongamos ahora otro sistema de referencia K' para el cual el cuerpo "realiza" una fuerza en dirección contraria al movimiento acelerado con el que se mueve K'. Supongamos, por último, un tercer sistema de referencia K'' en el que la fuerza que "realiza" el cuerpo no es explicada desde el movimiento del sistema sino desde la existencia de un campo de fuerzas[1601]. Pues bien, el Principio de equivalencia afirma la igualdad de derecho (*Gleichberechtigung*) de estos tres sistemas de referencia.

[1597] Debido a que el cuerpo es circular y su centro coincidirá con el punto *S*.
[1598] Cf. Einstein [1969] pp. 59-60.
[1599] Cf. por ejemplo Einstein [1917] p. 45 y sigs.
[1600] Podríamos resumir el argumento empírico –cabría incluso decir "circular"– de la siguiente forma: si partimos de una igualdad como $a \cdot A = b \cdot B$ dada "en la teoría", y sabemos que para que se expliquen los "hechos de la eperiencia" es necesario que $a=b$, enconces tendremos que $A=B$ –es decir, la masa inercial será igual a la masa gravitatoria. Obviamente, el carácter de más o menos del que está afectado la igualdad $a=b$ afectará también a la igualdad $A=B$, con lo que aquél carácter de necesidad de la igualdad pregonado por Einstein desaparecerá por completo.
[1601] Como se ve, hemos desdoblado el sistema de referencia K' de Einstein en dos subclases: una con el sistema de referencia K' y otra con K''. Este desdoble obedece a la distinción que encontrábamos en Newton entre dos formas de darse la masa inercia.

Los tres “mundos” –que denominaremos *A*, *B* y *C*– pueden ilustrarse mediante el uso de un ascensor: en el mundo *A*[1602], tanto el cuerpo como nosotros, junto con el ascensor, descendemos en caída libre con una aceleración igual a *g*. En el mundo *B*, el ascensor se mueve aceleradamente en dirección contraria hacia donde apunta la fuerza de *b*. En el mundo *C* el ascensor no se mueve aceleradamente y se explica el peso del cuerpo *b* postulando un campo de fuerzas situado debajo del cuerpo. Vamos a representar estos tres mundos mediante el siguiente dibujo[1603]:



Como se ve, podríamos denominar *A* “mundo de d’Alembert”. La razón de ello radica en que en este mundo hemos suministrado una aceleración γ al sistema de referencia del observador con lo que el observador llega a caer junto con el cuerpo *b*. Puesto que, de acuerdo a este sistema de referencia, el cuerpo *b* se encuentra en reposo[1604], es habitual decir que éste es un sistema de referencia inercial[1605]. Ahora bien, hablando con precisión, debido a la relatividad del movimiento acelerado, se obtiene el mismo resultado tanto en el caso en el que el mundo es *A*, como en el caso en el que el mundo es uno en el que tanto el sistema de referencia como el cuerpo se encuentran en resposo absoluto[1606]. Es decir no tiene sentido hablar de un sistema de referencia que se encuentra absolutamente en estado de reposo[1607] ni de aceleración[1608].

[1602] Nótese que este es el mundo que representa “el pensamiento más feliz de la vida” de Einstein. Cf. Einstein [2002] p. 265.
[1603] La notación y los símbolos que se utilizan en el dibujo no pretenden ser más que una ayuda para la comprensión del pasaje.
[1604] O en movimiento rectilíneo uniforme.
[1605] Así lo hace el mismo Einstein en *loc.cit*.
[1606] O en movimiento rectilíneo uniforme.
[1607] O en movimiento rectilíneo uniforme.
[1608] De hecho, al decir que el observador está en caída libre lo decimos nosotros; el observador no sabe nada de esto.

Si traducimos este experimento al caso del movimiento circular obtenemos las siguientes correspondencias. El mundo *A* del movimiento circular es aquél en el que el observador se encuentra sobre el cuerpo rotatorio ignorando su movimiento. Tampoco "siente" ninguna fuerza centrífuga porque no hay división entre aquello que es expelido hacia fuera y aquello que evita esto último. El mundo *B* correspondería en el ejemplo rotatorio al caso en el que el observador se encuentra fuera de la órbita del planeta, en situación de poder afirmar que el planeta se encuentra en movimiento y que este movimiento es el que, gracias a la masa inercial del cuerpo, debe ser compensado por la fuerza centrípeta o de atracción del cuerpo situado en el centro de la órbita[1609]. Por último, el mundo *C* corresponde al caso en el que el observador se encuentra situado sobre el planeta sin saber de su movimiento acelerado. Esto significa que no podrá achacar la fuerza centrífuga que él siente al movimiento del cuerpo y que tendrá que postular, como en el caso *C*, un campo de fuerzas[1610].

Pues bien, la masa que es responsable de la fuerza que realiza el cuerpo en el mundo *B* es la denominada masa inercial. Esta masa es la que resiste al cambio de estado de movimiento o reposo que es causado por la aceleración a la que el cuerpo es sometido. Vemos así que la fuerza centrípeta es la que actúa contra esta masa inercial del mismo modo en que el fondo del ascensor actúa contra la tendencia del cuerpo *b* de conservar su estado. A su vez, en el mundo *C* terrestre o planetario, se ha tenido que echar mano de un campo de fuerzas que sería el responsable de atraer al cuerpo. En este caso, la masa del *b* es considerada en su aspecto gravitacional. El hecho de que el cambio de una masa a otra sea simplemente el tránsito desde un sistema de referencia a otro, hace que los das dos sean esencialmente idénticas. De este modo, haciendo uso de la fórmula [5] cabría escribir:

$$F^{cp} = m_i \cdot \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,r} \right] F$$

y

$$F^{cf} = m_g \cdot \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,r} \right]$$

donde,

m_i : masa inercial

m_g : masa gravitacional

[1609] Nótese que la labor asignada al fondo del ascensor –impedir que el cuerpo, con la fuerza de su masa inercial, rompa el fondo del ascensor– equivale en el modelo *B* planetario a la labor realizada por la fuerza centrípeta.

[1610] Téngase en cuenta que en el mundo *C* terrestre la fuerza de reacción a la acción del peso del cuerpo *b* la realiza la Tierra y que la misma función la realizará la órbita que sostiene al cuerpo sobre su órbita. Por ejemplo, al pesar un cuerpo no hacemos más que trasladar con nuestro cuerpo el vector de fuerza en dirección al centro de la Tierra al lugar donde nuestro cuerpo hace contacto con la Tierra. En este punto el vector anterior es compensado por un vector de fuerza de reacción. Esto –que, explicado así, puede sonar a un relato– no debe hacer olvidar que la igualdad entre la acción y la reacción se da en cada punto de nuestro cuerpo, y que el relato únicamente pretendía presentar los agentes de las causas.

8.4 LA IGUALDAD ENTRE LA FUERZA CENTRÍFUGA Y LA FUERZA CENTRÍPETA EN HEGEL

8.4.1 Introducción

El análisis de la crítica hegeliana al contenido de los *Philosophiae Naturalis Principia mathematica* que ahora iniciamos se limitará al estudio del escrito de habilitación de Hegel: la *Dissertatio Philosophica de Orbitis Planetarum*. Ya con el título mismo de la obra de Newton estará Hegel en desacuerdo. En contra de lo que enuncia este título, Hegel considera que los *Principia* no son un trabajo de contenido filosófico. Los *Principia* son, para Hegel, más una Mecánica formalizada que una Física filosófica.

Hegel mantendrá a lo largo de su obra la distinción entre la Mecáncia relativa y absoluta que introducirá en sus primeros trabajos. Esta distinción consiste en que la Mecánica relativa se fundamenta en la materia en tanto que inercial, mientras que la Mecánica absoluta se fundamentará en la capacidad de atracción de la materia. A esto último llamará Hegel la materia grave del cuerpo. Si bien es cierto que la Mecánica relativa, debido a que considera a la materia como muerta, se ocupa de los efectos externos de los cuerpos[1611], la Mecánica absoluta se ocupará de la materia viva o, lo que es sinónimo en Hegel, con la materia libre.

La propiedad de la materia de ser libre significa para Hegel que la materia, considerada como grave, se determina a sí misma. La materia grave tiende, *por sí misma*, hacia otro cuerpo[1612]. Y sabemos que aquello que se determina a sí mismo es libre[1613]. Hegel considera la materia de la Mecánica absoluta como esencialmente grave y, por ello, esencialmente libre. Frente a ello, Newton considerará la materia como no grave en sus *Regula Philosophandi*, debido a que la propiedad de la gravedad no cumple la tercera de las reglas. Esta regla es la siguiente:

Regula 3: Qualitates corporum quae intendi remitti nequeunt, quaeque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendae sunt[1614]

Pero la *gravitas*, dirá Newton, varía en relación al alejamiento con respecto a la Tierra:

Gravity [gravitas] *is disminushed as bodies recede from the earth*[1615]

[1611] Estos "efectos externos" son el choque y, en la *Enzyklopädie*, el choque junto con la presión. Cf. Hegel [1986] p. 86: "nos autem impulsum ad mechanicam neque ad veram physicam pertinere censemus". En la *Enzyklopädie* Hegel añadirá al choque la acción de la presión: "Druck und Stoß sind die beiden Ursachen der äußerlichen mechanischen Bewegung". La diferencia entre ambas consiste en que la presión, en tanto que efecto constante, prepara el traspaso a la noción de caída.

[1612] Esta autodeterminación entra en una contradicción inmediata con la propiedad inercial de la materia: "Unmmittelbar widerspricht die Gravitation dem Gesetze der Trägheit, denn vermöge jener strebt die Materie *aus sich selbst* zur andere hin".

[1613] Cf. De Gandt en Hegel [1979] p. 105: "Un être qui se détermine lui-même est libre".

[1614] Cf. Newton [1726] p. 387. Cf. Newton [1999] p. 795: "Rule 3. Those qualities of bodies that cannot be intended and remitted and that belong to all bodies on which experiments can be made should be taken as qualities of all bodies universally"

Con estas dos premisas la conclusión es evidente: la gravedad no pertenece a las propiedades esenciales de la materia. A. Koyre[1616] y K. N. Ihmig[1617] han llamado la atención, entre otros, sobre el hecho de que en este punto Newton no se refiere con “gravitas” a la Gravitación universal[1618], sino al peso. El problema permanecerá abierto y, quedará soslayado[1619] hasta el punto de no hacerse público como tal problema en los años posteriores a la muerte de Newton.

8.4.2 Sobre la disolución de las fuerzas en el paralelogramo

Hegel criticará en la construcción newtoniana del movimiento circular de los Planetas su exclusión de los métodos geométricos. En vez de presuponer un todo del que deducir las relaciones respectivas, Newton intenta reconstruir el todo partiendo de las partes[1620]. La Física, según Hegel, debe imitar el modelo de la Geometría puesto que, de lo contrario, no merece llamarse ciencia.

A los ojos de Hegel, será Kepler el que realizará con el mayor acierto esta asimilación. Ello se debe a que Kepler acepta como dado la órbita elíptica de los planetas. Con ello descubre, en la denominada segunda ley, la proporcionalidad entre el tiempo y la superficie barrida por el radio vector. Newton intentará, a la inversa, partir del paralelogramo para, desde ahí, construir la órbita de los planetas. Esto significa deducir el todo partiendo de las partes. Este procedimiento permite a Newton trasladar las fuerzas de la mecánica terrestre a la celeste –según Hegel, de forma injustificada.

Ya hemos visto más arriba cómo el proceder de Newton tiene que echar mano de lados de extensión infinitesimal. Hegel pone este procedimiento en relación con la “superación”[1621] del polígono de infinitos lados en un círculo. Los lados del polígono serán, en este caso, la diagonal del paralelogramo.

Hegel considera que la tangente de la órbita representada por uno de los lados del paralelogramo es el componente centrifugal del movimiento planetario. Esta afirmación le ha hecho valer la crítica de De Gandt, pues al identificar el componente de la tangente con la

---

[1615] Cf. Newton [1999] p. 796.

[1616] Cf. Koyre [1965] p.162 : “it was not *gravitas* as weight (*pondus*) that was in question but *gravitas* as an attracting power, the *pondus* of which was only an effect. Thus it could- and according to Newton himself did- remain constant, all changes of *weight* norwithstanding”.

[1617] Cf. Ihmig [1989] p.25: “Mit »gravitas« meint Newton hier offensichtlich das Gewicht (pondus) und nicht den in Kap. I.1. erläuterten Begriff der allgemeinen Gravitation”.

[1618] Algo ya expresado en la constante de la Gravitación Universal *G*: “This constant *G* …may be compared to other ‘universal’ constants -of which there are not very many in the whole of science- such as *c*, the speed of light, which figures so prominently in relativity, or *h*, Planck´s constant, which is so basic in quantum theory” (en Cohen [1985] p. 165).

[1619] Seguimos aquí la tesis de Koyre cuando afirma que: “the subtle differences maintained by Newton between ‘pysical’ and ‘nonphysical’ (transphysical) forces, ‘essential’ and ‘nonessential’ properties of matter, were lost for the eighteenth-century reader” (en Koyre [1965] p.162).

[1620] Cf. Hegel [1986] p. 12 “neque enim geometria ex lineis sub angulo recto aut alio quocunque coeuntibus circulum aut aliam curvam de qua quaestio est, suponit ut datam, atque ex his datis reliquarum linearum rationes inde determinatas docet”.

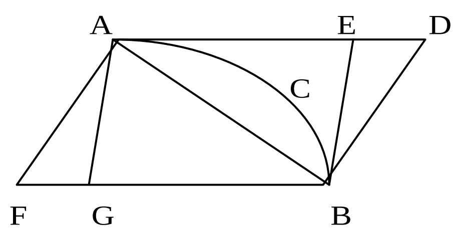
[1621] *Aufheben* esta vez en latín: *tollere*. Cf. Hegel [1986] p. 9: “ita tamen ut notione infiniti er ultimate rationis ipsum polygonum er rectas lineas simul tollat”.

fuerza centrífuga no es fiel a la doctrina newtoniana. Esta falsa identificación sería así el motivo por el cual una gran parte de la crítica de Hegel a Newton llegaría a perder todo su peso[1622]. No es sólo que la identificación sea desacertada, sino que la fuerza que ha sido identificada a la tangente es un "abus de language"[1623] y una "manière de parler"[1624]. Desgraciadamente De Gandt no explica qué es lo que quiere decir con las expresiones "abuso de lenguaje" y "manera de hablar". El apartado que lleva el prometedor titulo de "La force centrifuga, histoire d´un malentendu" tampoco arroja mucha luz al respecto. Todo indica a pensar que De Gandt se empeña en no aceptar la fuerza inercial como una fuerza además de que rehúsa encontrar tal fuerza en Newton. En contra de esta posición, ya hemos visto cuál es la realidad de la fuerza centrífuga así como cuál es la evolución que tuvo este concepto en el pensamiento de Newton. Teniendo esto en cuenta, podríamos decir que el error de Hegel no consiste tanto en hablar de una fuerza quimérica, sino en pretender hacer uso de las dos perspectivas irreconciliables al mismo tiempo. En efecto, Hegel hace uso de una fuerza que sólo tiene lugar en un sistema de referencia móvil al mismo tiempo que considera que la dirección en que actúa esta fuerza es tangencial –una dirección ésta de la que sólo cabe hablar desde una perspectiva inercial.

Para comprender esto, resultará necesario examinar primero la forma –errónea– en la que Hegel interpreta el Lemma de los *Principia* en el que Newton representa las fuerzas responsables del movimiento orbital de un planeta mediante un paralelogramo. El texto original del Corolario 3 del Lemma 7 de los *Principia* dice así:

Et proptereea hæ omnes lineæ in omni de ratinibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt[1625]

Los segmentos que ahí se mencionan son los mismos que ya han aparecido en los Corolarios 1 y 2. En ellos Newton realiza una generalización del Lemma 7 pasando así de un paralelogramo con ángulo recto a otro que puede tener todos los posibles ángulos comprendidos entre los 0° y 180°. Un dibujo ayudará a comprender esto:



El Lemma 7 junto con los Corolarios 1 y 2 afirma que la tangente *AE* y *AD*, el arco *C*, la diagonal *AB*, y los segmentos *FB* y *GB* son, en sus últimas proporciones, iguales. La lectura demasiado permisiva de Hegel considera que la igualdad sirve también para el *sinus versus*

[1622] Cf. Hegel [1979] p. 136 n. 19: "C´est ici une des plus graves erreurs de la *Dissertation*, qui invalide une bonne partie de l´argumentation".
[1623] Cf. Hegel [1979] p. 136.
[1624] Cf. Hegel [1979] p. 72.
[1625] Cf. Newton [1686] p. 30. Cf. Newton [1999] p. 436: "And therefore all these lines can be used for one another interchangeably in any argumentation concerning ultimate ratios".

AF así como para *AG*. Desde esta lectura, Hegel reprochará a Newton afirmar la igualdad, en las últimas proporciones, entre el *Sinus versus*, el arco y la tangente:

neque ad contradictionem istam tollendam confugi potest ad priman nascentium et ultimam evanescentium rationem, in qua ratio arcus, sinus versi et tangentis sit ratio aequalitatis, ita ut hae lineae pro se invicem usurpari possint[1626]

Sin embargo, Newton no afirma la igualdad entre la fuerza centrípeta –o su representante *Sinus versus*– y la fuerza centrífuga –o, según la lectura de Hegel, la tangente. De hecho, la órbita elíptica se construye desde una cambiante desigualdad entre estos componentes. Por ello creemos que Hegel tiene únicamente en cuenta el movimiento circular. La supuesta igualdad geométrica en *rationes ultimæ* entre el *Sinus versus* y la tangente es una consecuencia de la igualdad física que efectivamente existe entre la fuerza centrífuga y la fuerza centrípeta. El problema del razonamiento de Hegel consiste en que estas dos fuerzas no se pueden reproducir sobre el mismo paralelogramo[1627] debido a que no hay un único sistema de referencia en el que ambas se puedan experimentar.

La incapacidad del procedimiento inagurado por Newton de explicar el todo –la órbita de un planeta– partiendo desde las partes –los lados del paralelogramos– se hace evidente en la órbita elíptica. Puesto que Newton no se expresa abiertamente al respecto, puede suponerse[1628] que Hegel se refiere a Laplace en la crítica a las dificultades de la física de construir la órbita elíptica mediante el uso de la fuerza centrífuga y de la fuerza centrípeta. En una elipse, Hegel adscribe a la tangente la fuerza centrífuga y a la *sagitta*[1629] la fuerza centrípeta para, desde ahí, llegar a estas dos inconsecuencias:

i) ¿Cómo es posible, mediante la relación entre la componente centrípeta y la centrífuga, explicar las distintas velocidades del planeta en los distintos puntos de la órbita? Hegel parece querer afirmar que estos dos componentes conservan una relación de igualdad a lo largo de la órbita del planeta para, de ahí, deducir que la explicación es sólo posible mediante la introducción de perturbaciones en estas relaciones de igualdad. El problema sería así el siguiente:

Der Umlauf der Planeten auf einer elliptischen Bahn werde aus der Zu- und Abnahme von Zentrifugal- und Zentripetalkraft erklärt- was heißt dann eigentlich 'Gleichheit'?[1630]

[1626] Cf. Hegel [1986] p. 13.
[1627] Siendo, como afirma Hegel, el *Sinsus versus* el segmento que representa la fuerza centrípeta y la tangente el segmento que representa la fuerza centrífuga.
[1628] Tal y como hace Neuser en Hegel [1986] p. 153.
[1629] Hegel, al igual que Newton, utiliza el término *sagitta* (*esp*. flecha) y no el *Sinus versus* cuando el objeto de estudio es la órbita elíptica y no la órbita circular. Esto sugiere que Hegel es consciente de la diferencia entre el componente centripetal dirigido al centro y el componente radial (la *Brennstrahl*) así como de su correspondiente papel en la construcción de la órbita circular, en un caso, o elíptica, en el otro. La variabilidad del ángulo entre la tangente y la *sagitta* hace posible responder al siguiente problema: ¿cómo es posible concebir las distintas aceleraciones únicamente mediante estos dos componentes del planeta –positiva desde el aphelio al perihelio, negativa desde el perihelio al aphelio–cuando, según la segunda ley de Kepler, el radio vector de dos puntos equidistantes al sol debe barrer espacios iguales en tiempos iguales?
[1630] Cf. Neuser en Hegel [1986] p. 10.

O, en palabras de Hegel:

diversitas velocitatis ex turbato virium aequilibrio explicari solet[1631]

Tal y como hemos mencionado más arriba, no consideramos correcta la tesis que afirma que la fuerza centrípeta –o, en sentido estricto la *sagitta*– y la fuerza centrífuga –o la tangente– han de ser iguales. La igualdad es algo que se cumple necesariamente en el movimiento circular, pero no en el elíptico. La razón de ello es en que el movimiento circular es un movimiento que conserva el equilibrio entre la tendencia a escapar del centro y la fuerza que lo retiene en la órbita. Es precisamente la quiebra de este equilibrio, con sus distintas variaciones, la que hace posible comprender –con las dificultades que estamos viendo– el movimiento elíptico partiendo de las partes.

ii) La segunda dificultad consiste en que tanto en el aphelio como en el perihelio, el *sagitta* del paralelogramo debe cambiar de signo de aceleración: en el primer caso debe pasar de una aceleración negativa a otra positiva, en el segundo caso debe pasar de una aceleración positiva a otra negativa. Considerado el fenómeno únicamente desde la perspectiva de los componentes, estos cambios se hacen inconcebibles mientras no se considere el todo de la órbita elíptica. Hegel extrañará la unidad subyacente a estos dos componentes del paralelogramo que hiciese posible rescatar el cambio de aceleración del reino de la casualidad (*casus*):

so lautem et planetae cometaeque, si eorum motus ex virium centripetae et centrifugae ratione explicatur, nulla necessitae sed mero quodam casu se invenisse dicendi erunt[1632]

O, lo que podría ser lo mismo, del reino de la Tautología. Hegel se refiere con ello al contenido de lo que se expresa habitualmente mediante una fórmula. Así, dirá Hegel, en una fórmula como *A*=*B*, los distintos grados de *A* son explicados desde los distintos grados de *B* y los distintos grados *B* desde los distintintos grados de *A*:

diversae enim velocitates planetarum es diversitate intesionis virium, diversa autem intensio virium, ex diversa velocitate cognoscitur [1633]

Por ejemplo, sabemos que hoy en día la fuerza centrífuga es expresada mediante la siguiente fórmula:

$$K^{cf} = -m \cdot \omega^2 / r$$

Donde *r* expresa el radio y ω la velocidad angular del planeta. La interpretación de la fórmula ofrecida por Hegel afirmaría en este caso que la ciencia se reduce a afirmaciones

[1631] Cf. Hegel [1986] S. 104.
[1632] Cf. Hegel [1986] pp. 96-98.
[1633] Cf. Hegel [1986] pp. 104-106.

tautológicas como éstas: suponiendo la velocidad angular constante, la mayor aproximación al centro de un planeta tiene como consecuencia una mayor fuerza centrífuga (K^{cf}) –y, viceversa, el planeta se aproxima al centro cuando al fuerza centrífuga es mayor. La bicondicional implicita de una fórmula se reduciría a decir esto. En la *Jenaer Logik* Hegel mantendrá el contenido de la crítica y evitará buscar la solución en una supuesta lectura exclusivamente condicional del contenido expresado por una fórmula[1634]. La lectura de Hegel pone de manifiesto que las afirmaciones del lenguaje científico que hacen uso de las fórmulas tienen que ver más con relaciones de acción recíproca que con la causalidad. De ahí que considerar tales fórmulas como tautológicas no significa que, para Hegel tales expresiones no digan nada, sino que no generan algo que estuviese más allá del concepto en el que inmediatamente se expresan.

8.4.3 La intercambiabilidad entre la fuerza centrífuga y la fuerza centrípeta

Un ejemplo en el que estas dos fuerzas aparecen en su conexión con el sistema de referencia es el de las mediciones del peso realizadas, por ejemplo, con un péndulo. Debido a la rotación terrestre tiene lugar una fuerza centrífuga sobre la Tierra que, según los cálculos de Newton[1635], debe ser equivalente a 1 entre 300 partes de la fuerza de la gravedad de la Tierra. Esto hace que la atracción originaria se vea disminuida en una parte equivalente.

$$\left[\frac{\textbf{Sinus versus del arco terrestre que rota durante un segundo en el ecuador}}{\textbf{Longitud del espacio de caída en un segundo en el ecuador}}\right] = \left[\frac{\textbf{Fuerza centrífuga}}{\textbf{Fuerza de la gravedad}}\right] = \left[\frac{1}{300}\right]$$

Hegel intenta asignar –mediante un razonamiento algo enrevesado pero, como veremos, revelador– la magnitud medida en el *Sinus versus* a la fuerza centrípeta para, de ahí, deducir una mayor fuerza de la gravedad. Para ello se apoya en una supuesta completa inercambiabilidad[1636] de las fuerza centrípeta y centrífuga. Es decir, la fórmula implícita en el razonamiento de Newton es la siguiente:

N) Fuerza de la gravedad = Fuerza de atracción + Fuerza centrífuga[1637]

En ella, puesto que la fuerza centrífuga es negativa, la fuerza de la gravedad será menor que la de atracción. La fuerza de la gravedad es la fuerza que se puede medir sobre los distintos puntos de la superficie de la Tierra haciendo uso de un péndulo. En el ecuador la fuerza de la gravedad y de la atracción coinciden.

[1634] Algo que sí hace A. Doz: "si la force gravitationnelle augmente quand le corps s´approche du centre, ce n´est pas parce qu´elle augmente que le corps s´approche, c´est parce qu´il s´approche qu´elle augmente" (en Hegel [1994] p. 188).

[1635] Véase para ello Newton [1999] tercer Libro , Proposición XIX, tercer Problema.

[1636] Cf. Hegel [1986] p 106: "alteram cum altera vi pro lubitu commutari".

[1637] O, expresando lo mismo con la ayuda de la formula [5], $F^r = F^i + F^{zf}$ esto es, $Fuerza\ de\ la\ Gravedad^{Ecuador} = Fuerza\ de\ la\ Gravedad^{Polos} + F^{cf}$.

Frente a esto, Hegel considera igual de justificada esta otra fórmula:

H) Fuerza de la gravedad= Fuerza de atracción + Fuerza centrípeta

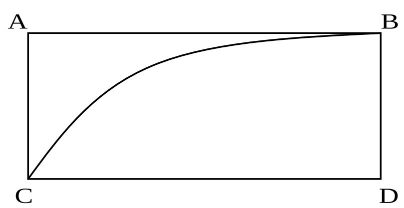
Fórmula que sería correcta sólo si la fuerza centrífuga y la centrípeta fuesen iguales en magnitud y en el signo –cosa que no es el caso– o, en el caso de que, en un sistema que hace uso de la fuerza centrífuga, la fuerza de la gravedad y la fuerza de la atracción fuesen iguales, respectivamente, a la fuerza de la atracción y la fuerza de la gravedad en un sistema que hace uso de la fuerza centrípeta –lo que tampoco es el caso–[1638]. Mientras que con la fórmula *N* tenemos una menor fuerza de atracción –gracias a un aumento de la fuerza centrífuga– con la fórmula *H* la fuerza de la gravedad es mayor en el ecuador –debido a la fuerza centrípeta. Con la formula *N* tenemos mayor fuerza de la gravedad en los polos que en el ecuador. Con la fórmula *H* tenemos justo lo contrario.

Caer en un error así es más facil de lo que puede parecer. El error resulta incluso inevitable si comenzamos leyendo la fórmula [5] de la siguiente forma:

$$F^r = F^i - 2\cdot m\cdot\left[\vec{\omega}\times\vec{v}^{\,r}\right] - m\cdot\vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{r}^{\,r}\right] = F^i - F^C - F^{cf} \qquad [7]$$

Y si, además de ello, consideramos las dos fuerzas iguales en magnitud y distintas en su signo. Una de dos, o bien consideramos que las dos fuerzas tienen el mismo signo y, entonces, la expresión [7] es la correcta, o bien, tienen un signo distinto y la expresión correcta es [5]. Hegel parece querer tomar sólo una parte de cada formulación: $F^r = F^i + F^{cf}$ y $F^i = F^r + F^{zp}$ por un lado, $F^{cf} = F^{cp}$ por el otro. Con ello, Hegel pretenderá tomar una parte de dos formulaciones que resultan entre sí incoherentes.

Es así más interesante comprender las razones que llevan a Hegel a proponer una alternativa –como *H*– que tratar de entender cómo ajusta esa fórmula alternativa a los hechos de la experiencia[1639]. La siguiente imagen nos ayudará al respecto:



[1638] O, expresado con ayuda de la formula [5]: $F^r = F^i + F^{zp}$.

[1639] Un "hecho de la experiencia" es, por ejemplo, que un péndulo oscile más lentamente en el ecuador que en los polos. La "razón" de ello, viendo las cosas desde *H*, es que, debido a una mayor fuerza en dirección vertical, resulta más dificil para el péndulo abandonar esta dirección. El movimiento de un péndulo no es, según Hegel, un "reiner Fall". Por eso no es posible decidirse entre las fórmulas *N*) y *H*) con su ayuda. Cf. Hegel [1986] p. 108: "Coporis autem penduli motus non purus est lapsus". Para De Gandt : „Ce passage mériterait de figurer dans le grand sottiser des philosophes" (en Hegel [1979] p. 146 n. 40).

En él, de acuerdo a las reglas de construcción, el *Sinus versus BD* es igual a *AC*. Hegel parece afirmar que estos segmentos pueden adscribirse con igual derecho a la fuerza centrípeta que a la centrífuga. Esto es, se podrían interpretar los segmentos *à la* Huygens –como efectos de la fuerza centrífuga– o *à la* Newton –como efectos de la fuerza centrípeta. Lo curioso es que Newton toma en este ejemplo el punto de vista de Huygens y habla, por ello, de la fuerza centrífuga[1640]. Esto se debe a que, tal y como hemos visto, las mediciones realizadas con un péndulo son mediciones realizadas sobre la Tierra –es decir, mediciones pues realizadas sobre un sistema de referencia rotatorio. Esto hace que tengamos que hablar de fuerzas centrífugas y no de fuerzas centrípetas si es que queremos hacer uso de las expresiones [5] o [7].

En conclusión, el error tiene su origen en un descuido tan sutil como es comenzar por considerar la fuerza centrífuga con signo positivo[1641] cuando lo mismo se ha hecho también con las fuerzas de gravedad y de atracción. Esto significa que se está llamando fuerza centrífuga a un vector de fuerza exactamente igual –tanto en el módulo como en la dirección– al vector de la fuerza centrípeta. Si la cosa quedara ahí no habría lugar para error alguno[1642]. La única dificultad consistiría en que difícilmente se puede llamar a un vector así “vector de la fuerza centrífuga”. Ahora bien, lo que no es admisible es, una vez que nos hemos embarcado en una lectura así, considerar que la fuerza centrífuga y la fuerza centrípeta tienen el mismo módulo pero el signo contrario[1643]. Lo que hacemos con ello es considerar el vector de la fuerza centrípeta en dirección centrifugal y, con ello, restar a un vector en dirección centripetal –al vector que expresa la fuerza de la atracción– otro vector –el supuesto vector centrípeta– que está orientado en sentido contrario. Con ello no hacemos otra cosa que sumar un vector –con el mismo modulo que el vector centrífuga– a otro vector que expresa la fuerza de la atracción y está en su misma dirección. La pregunta es, ¿por qué no es físicamente[1644] lícito realizar esta operación?

El que la fuerza centrífuga y la fuerza centrípeta sean, como afirma Hegel, intercambiables entre sí, no significa que lo sean independientemente de la expresión en la que aparecen. Cada expresión es una expresión que describe los fenómenos desde un punto de vista, es decir, desde un sistema de referencia y, de ahí que las fuerzas que aparecen en esta expresión deban de ser compatibles con el sistema de referencia desde el que la expresión cobra sentido. Así, en la expresión [5] se describen las cosas desde un sistema de referencia rotatorio o, en el caso que nos ocupa, desde la Tierra. Aceptar este punto de vista o aquél que es expresado por la fórmula [6] no es una elección arbitraria. Siguiendo con el ejemplo que nos ocupa, el del péndulo es un movimiento cuya medición se realiza sobre un sistema de referencia móvil. La expresión inmediata del que partimos –es decir, aquello que obtenemos en las mediciones– es la fuerza F^r –lo que más arriba hemos llamado “fuerza de la gravedad”. En consonancia con esto y de acuerdo a lo que hemos dicho sobre las fuerzas que tienen lugar en sistemas de referencia no inerciales, la fuerza con la que se expliquen los posibles desajustes entre lo medido en el sistema de referencia inercial y no inercial será la

---

1640 Algo que De Gandt estará obligado a aceptar: “Il est vrai que c´est un des très rares endroits des *Principia* où Newton utilise la notion de force centrifuga“ (en Hegel [1979] p. 145 n. 39). La razón de este cambio de perspectiva de Newton se debe, según De Gandt, a que este concepto resulta ser ahora “plus commode ” (sic.).

1641 Algo que se hace en la expresión $F^r = F^i - F^{cf}$ debido a que el signo de minus ha sido sacado fuera de la expresión para la fuerza centrífuga.

1642 Es decir, tendríamos que $F^r = F^i - F^{cf}$ y que $F^{cp} = F^{cf}$.

1643 Es decir, considerar, $F^{cp} = -F^{cf}$.

1644 Que la substitución no es formalmente lícita se aprecia en lo que sigue: si hemos supuesto que $F^r = F^i - F^{cf}$, entonces tendremos que $F^i = F^r + F^{cf} = F^r + F^{cp}$ luego $F^{cp} = F^{cf}$.

fuerza centrífuga[1645]. Esto explica que Newton, alguien que se ha dedicado a considerar los fenómenos descritos en el *Principia* desde un punto de vista inercial[1646], se ponga a explicar, por de pronto, los fenómenos haciendo uso de la fuerza centrífuga.

Evidentemente, desde un punto de vista formal, nada puede impedir que hagamos uso de la formula [6] en vez de la fórmula [5]. Es decir, podemos hacer uso de la fuerza centrípeta para explicar los fenómenos haciendo como si las cosas se consideran desde un sistema de referencia inercial. El problema de esta aproximación –problema que afecta a la lectura de Hegel– consiste en que no se entiende que, siendo el punto de vista adoptado el inercial, la variable cuyo valor se desconoce sea precisamente aquella que se mide desde ese sistema de referencia: la F^i o, en el ejemplo, la fuerza de atracción. Lo que es matemáticamente realizable es, por ello, conceptualmente insostenible.

Siendo esto así, que la fuerza centrífuga y la centrípeta sean iguales en magnitud no significa que se deben obviar que apuntan en direcciones contrarias. Las expresiones que tienen en cuenta estas direcciones para la fuerza centrífuga y centrípeta son las que hemos denominado [5] y [6]. En la primera, la fuerza de gravitación y la fuerza de atracción tienen las dos la misma dirección –signo positivo– mientras que la fuerza centrífuga tiene, como no podía ser de otra forma, la dirección contraria –signo negativo–[1647]. Otro tanto ocurre, pero en dirección contraria, con la expresión [6]. Si, a pesar de todo, hacemos uso de las expresiones como esta:

$$F^r = F^i - F^{cf} \qquad [8]$$

estaremos llamando vector de fuerza centrípeta a un vector con el mismo modulo y la misma dirección que el vector para la fuerza centrípeta. Es decir, estaremos suponiendo que $F^{cf} = F^{cp}$. Por esta razón, en contra de lo que hace Hegel, no tendrá sentido substituir en [8] la fuerza centrífuga por el valor negativo de la fuerza centrípeta. Si hacemos eso, terminaremos sumando vectores con la misma dirección[1648] con lo que la fuerza de la gravedad será mayor que la fuerza de la atracción. Esta conclusión es la conclusión a la que llega Hegel y la que, por los motivos que hemos intentado desvelar en este capítulo, es necesario rechazar[1649].

[1645] Es decir, estamos afirmando algo así como que la fuerza centrífuga –y, en general, las fuerzas de inercia– es lo que permite pasar de un sistema de referencia no inercial a otro inercial, mientras que la fuerza centrípeta, al contrario, permite pasar desde un sistema inercial a otro no inercial.

[1646] Un punto de vista que podríamos atribuir, de entrada, a cualquiera. La Teoría de la Relatividad General se ocupará precisamente de hacer que los puntos de vista no inerciales sean también, de entrada, puntos de vista de cualquiera. En el caso de la Teoría de la Relatividad Especial las transformaciones con las que pasar de un cualquiera a otro cualquiera son las denominadas transformaciones de Lorenz que, como se sabe, se fundamentan en la constancia –no relatividad– de la velocidad de la luz. Algo análogo ocurrirá con en la Teoría de la relatividad General en donde se hablará de invariantes.

[1647] Es decir, en la expresión [5] la fuerza centrífuga es de signo negativo aunque –o, mejor dicho, precisamente por eso– el signo que le precede sea positivo.

[1648] Es decir, terminaremos sumando al vector para la fuerza de atracción con otro que tiene su misma dirección –el vector que, bajo el esquema [8], hemos denominado fuerza centrífuga y que, después de la ilegítima substitución, lleva el nombre de vector de la fuerza centrípeta– obteniendo así que la fuerza de la gravedad aumenta por la acción de la fuerza centrípeta.

[1649] El error de Hegel se puede localizar en esta única frase: “nihil obstat, quin illum minoren sinum versum pro vis centripetae efficacia sumamus et gravitati addamus, auctamque illa parte gravitatem non diminutam, causam penduli sub Aequatore retardati et pondera corporum sub minoribus latitudinibus crescere non diminui dicamus” (en Hegel [1998] p. 244). La primera parte de esta proposición es verdadera, la segunda falsa. Es verdadero que, partiendo de *N*) Fuerza de la gravedad = Fuerza de atracción + Fuerza centrífuga, si pasamos la expresión "Fuerza centrífuga" al otro lado obtenemos una expresión en la que añadimos a la fuerza de la gravedad la fuerza centrípeta (no se olvide que en *N*) la Fuerza centrífuga es negativa): *G*) Fuerza de la gravedad+Fuerza centrípeta = Fuerza de atracción. Lo que no es cierto es, sin embargo, la interpretación de ello que se hace en la segunda parte. Si a lo que hacemos mediante la expresión *N*) lo denominamos, con Hegel, "disminuir la gravedad", a aquello que hacemos con la expresión *G*) no podemos denominarlo, en contra de Hegel, "aumentar la gravedad", sino más bien, "aumentar la fuerza de atracción".

9. CAPÍTULO

ESPACIO, TIEMPO, MATERIA Y MOVIMIENTO EN HEGEL

A lo largo de este trabajo ha sido habitual contemplar la manera en la que los matemáticos hacían uso del movimiento de, por ejemplo, un punto, para producir con ello la línea. Este recurso al movimiento, cuyo mayor exponente es, probablemente, Newton, permitía el paso de conjuntos finitos de puntos a conjuntos que pretendían dar cuenta del continuo expresado en una recta. Debido a que esta continuidad puede ser tanto racional como real[1650], la cardinalidad de los conjuntos que se alcanzaba mediante el movimiento pasaba a ser, por decreto, igual a $\aleph_0$, en el primer caso, e igual a $\aleph_1$, en el segundo caso. Con ello se pretendía pasar de un plumero del cálculo algebraico al análisis, del tratamiento discreto de la cantidad a su tratamiento continuo[1651]. Habíamos visto[1652] que este recurso al movimiento no era aceptado por Hegel. Y no lo era, podríamos decir, por las mismas razones por las que tampoco Diógenes de Sinope aceptaba las refutaciones facilonas de los argumentos contra el movimiento dadas por Zenón. Según la versión de Sexto Empírico[1653], Diógenes reprochaba la ingenuidad de aquellos pupilos suyos que se daban por satisfechos cuando éste presentaba un paseo suyo como la refutación misma de los argumentos de Zenón. La lección de Diógenes es unívoca: los argumentos sólo se refutan con argumentos o, en términos de Hegel[1654], la certeza sensible es incapaz de refutar –ni de demostrar[1655]– a la razón.

Lo mismo cabría decir del recurso[1656] al movimiento del que hacían uso algunos matemáticos para poder salvar la distancia entre la discreción y la continuidad. Las

[1650] Es decir, lo mismo que en una recta que representa a los números racionales siempre es posible encontrar un número racional entre cualesquiera dos números racionales, lo mismo ocurre, con más razón si cabe, en una recta que representa a los números reales.
[1651] "Discreto" y "Continuo" aquí en su sentido vulgar.
[1652] Veíamos en particular que el autor en el que más claro se veía esto era Spehr.
[1653] Cf. Diogenes Laertios, *Vitae Philosophorum* VI. 39 (en Diogenes Laertius [1999] pp. 398-399).
[1654] Cf. el texto de Hegel (Hegel [XVIII] p. 306) ya citado en la nota 321: "Diogenes ihn prügelte, aus dem Grunde, daß, da der Lehrer mit Gründen gestritten, er ihm auch nur eine Widerlegung mit Gründen gelten lassen dürfe. Ebenso hat man sich nicht mit der sinnlichen Gewißheit zu begnügen, sondern zu begreifen"
[1655] En el texto citado Hegel habla únicamente de "refutación" pero podría utilzarse el mismo argumento en contra de las pretensiones de demostrar algo mediante la certeza sensible. De hecho, los dos lados, la refutación y la demostración, van de la mano. Por ejemplo, el paseo pretende refutar el argumento zenoniano en contra del movimiento para, con ello, demostrar el movimiento.
[1656] Recurso que, cabría decir, cumple las mismas funciones que aquél infinito del que decía Aristóteles en su *Física* (cf. 20729-30) que a los matemáticos no les era necesario. Lo que sí necesitarán los matemáticos es el infinito *potencial* en base al cual pueden disponer de una línea con una extensión siempre aumentable. Esto explica la aparente incongruencia de la afirmación de la *Física* (cf. 203b17-18) en donde se afirma que los matemáticos sí utilizan lo infinito.

matemáticas, siendo un discurso por construcción de conceptos, no pueden hacer uso de la certeza sensible en tal discurso. El problema consiste en que si entendiéramos por “certeza sensible” el movimiento y, por consiguiente, el tiempo y el espacio, entonces, las posturas de Kant y Hegel estarían en abierta oposición. La razón de ello está en que, por un lado, para Kant un discurso que es “por construcción de conceptos” es un discurso que construye los conceptos en el espacio y el tiempo, mientras que tal posibilidad estaría proscrita por Hegel.

Este problema se resuelve segregando dos aspectos de lo que se entiende por movimiento y, por consecuencia, del espacio y el tiempo. El movimiento puede ser, por un lado, el movimiento de la certeza sensible, el movimiento que uno puede –o pretende poder– señalizar allí fuera o incluso, como Diógenes, ilustrar el movimiento de su propio cuerpo. Este movimiento es aquél que es rechazado por Hegel. Pero el movimiento puede también recibir la bendición del concepto y ser así producto mediado, no inmediato. Con ello, se abriría la posibilidad de que la matemática pudiese recurrir en Hegel al espacio y el tiempo y, por ende, al movimiento[1657].

Para ello, como se ha dicho, el movimiento tendrá que adquirir la forma del concepto. Esto requiere en Hegel que el movimiento no sea algo que se acepte como dado, sino que ha de ser ganado. Al igual que en la *Wissenschaft der Logik*, la tarea de obtención del concepto es un camino de mediaciones en el que se parte de algo inmediato. El concepto de movimiento y, por ende, la labor de su obtención no son parte, sin embargo, de la empresa de la *Wissenschaft der Logik*. Tal y como apuntábamos en el comienzo del primer capítulo, la tarea de presentar el contenido “Naturaleza” desde su inmediatez pertenece a la *Naturphilosophie*. Para poder acercarnos a esta parte de la filosofía de Hegel será necesario que nos ocupemos del único escrito publicado en la obra de Hegel en donde se ofrece una exposición sistemática de su *Naturphilosophie*, a saber, la *Enciclopedia de las Ciencias Filosóficas* o *Enzyklopädie*. Ofrecer, pese a la aridéz del texto, un comentario coherente de los primeros momentos de la *Naturphilosophie* será la labor de este último capítulo[1658]. Comenzaremos con la figura inmediata que toma la naturaleza en Hegel, el espacio, para, de ahí, pasar al tiempo y al movimiento. Dado que, como veremos, no es posible exponer el concepto de movimiento en Hegel sin decir algo sobre el concepto de materia, será necesario que nuestra exposición llegue hasta este punto si es que queremos ofrecer una reproducción del texto cuyo final no sea demasiado abrupto. Por ello, los momentos que recorreremos en los siguientes apartados serán cuatro: el espacio, el tiempo, la materia y el movimiento.

En cierto sentido, lo característico del tratamiento hegeliano del tiempo frente a Kant ya ha sido adelantado en el apartado 3.1.1 de este trabajo. Podríamos resumir lo ahí dicho diciendo que en Hegel, frente a Kant, se trataba obtener el concepto de espacio y tiempo sin que para ello se recurra a la finitud o intuición. Esto significaba que la pluralidad no podía ser admitida como dada, sino que tenía que poder ser generada. Esta generación formará parte del proyecto sistemático denominado *Naturphilosophie*. Por esta razón, no habrá, por un lado, generación del tiempo y, por otro lado, generación del espacio etc., sino que la generación del espacio dará lugar a la generación del tiempo que a su vez etc. El objetivo se enmarca así

[1657] Queda abierta la pregunta de si, en Hegel, la justificación del recurso es sólamente con respecto al tiempo y al espacio o si es, también, con respecto al movimiento, además de si tal división –por un lado el recurso al tiempo y al espacio, por el otro el recurso al movimiento– es sostenible. Lo que queda fuera de cualquier duda es que la fundamentación de los conceptos de la matemática no puede hacerse más que en el terreno de lo lógico. En este sentido, veíamos que los términos que aparecían al hablar del cociente diferencial o del continuo no remitían a conceptos como el del movimiento a no ser que por “movimiento” se entienda algo parecido a cuando se dice que el proceso entero de la *Wissenschaft der Logik* es también un movimiento.

[1658] Recurriremos en la exposición a los apuntes de las lecciones impartidas por Hegel sobre la *Naturphilosophie* que han sido publicados por Bonsiepen, G. Marmasse y T. Posch. Cf. Bonsiepen [1985] Hegel [2002].

dentro de la tarea de la filosofía y consiste en combatir el "y" de la representación vulgar que sólo llega a ver un "algo" y "otro algo" y "otro algo" etc[1659]. Veamos cómo tiene lugar este combate.

9.1. EL ESPACIO

El espacio y el tiempo son, para Hegel, la Cantidad pura tal y como ésta es en la naturaleza[1660]. Debido a que la naturaleza, a diferencia de lo lógico, no comienza con la Cualidad, la Cantidad tal y como se da en la naturaleza no estará de entrada mediada por ella sino que será completamente abstracta[1661]. En la medida en que cada parte del espacio tiene fuera de sí un otro que es él mismo, el espacio es un Algo inmediato, por lo tanto, indiferenciado que consiste en Ser-afuera-de-sí (*Außersichsein*)[1662]. Y es que, la cuantitativa indiferencia no es otra cosa que el ser-afuera-de-sí de la Unidad[1663] que, como veremos, en el caso del espacio resulta ser el punto.

Los dos, tanto el espacio como el tiempo, son formas distintas de la indiferencia o del Ser-afuera-de-sí[1664]: el uno, el espacio, es el ser-afuera-de-sí como siendo el otro, el tiempo, el Ser-afuera-de-sí como deveniendo[1665]. En otras palabras, el espacio es el Ser-afuera-de-sí quieto (*ruhig*) mientras que el tiempo es el ser-afuera-de-sí inquieto (*unruhig*). En el espacio cada aquí tiene su lugar al lado de otro. En el tiempo, por contrario, los ahora no se aguantan (*vertragen*) mutuamente[1666].

En tanto que Ser-afuera-de-si, en tanto que cantidad abstracta, el espacio es Universalidad (*Allgemeinhiet*) abstracta de indiferentes. El que sea una univesalidad significa que sus partes son todas iguales y por ello Uno. A su vez, el que sean indiferentes significa que estas partes iguales son, sin embargo, diferentes; las partes son igualmente diferentes. De este modo resurgen los momentos de la continuidad y la discreción: la continuidad con el que nos habíamos encontrado en la *Wissenschaft der Logik* corresponde a la Universalidad del espacio, mientras que la discreción se llama ahora indiferencia. La continuidad es la perfecta unidad del espacio[1667], la discreción la exterioridad y la indiferencia de las partes[1668]. En efecto, la discreción subraya la diferencia de los igualmente diferentes decretando un límite arbitrario en la continuidad en un átomo que, en el caso del espacio, resulta ser el punto. Por

---

[1659] Cf. Hegel [IX] p. 48: "In der Vorstellung ist Raum und Zeit weit auseinander, da haben wir Raum und dann *auch* Zeit; dieses "Auch" bekämpft die Philosophie".

[1660] Cf. Hegel [IX] § 254: "Er [der Raum] ist überhaupt reine *Quantität*". Cf también Hegel [V] p. 214: "Bestimmtere Beispiele der reinen Quantität, wenn man deren verlangt, hat man an Raum und Zeit".

[1661] Cf. Hegel [2002] p. 29: "Das Erste ist also das Außersichsein, ganz abstrakt. Dies ist die vermittlunglose Gleichgültigkeit, und dies ist der Raum".

[1662] La exterioridad (*Äußerlichkeit*) del espacio se refleja en el hecho de que ningún espacio es último. Por esta razón, el espacio esta fuera de sí. Cf. Hegel [XI] p. 43: "Stelle ich den Stern auch noch so weit, so kann ich darüber hinausgehen […]. Dies ist die vollkommene Äußerlichkeit des Raumes".

[1663] Cf. Hegel [V] p. 454: "die quantitative Indifferenz ist vielmehr das Außersichsein der Einheit".

[1664] Cf. Bonsiepen [1985] p. 40: "Es sind zwei Weisen des Außersichseins. Die eine Weise ist der Raum, die andere die Zeit".

[1665] Y no, como cabría esperar, no-siendo. Efectivamente, hemos visto ya en el capítulo primero dedicado al comienzo de la lógica que debido a su falta de mediación, el Ser no es otra "cosa" que la Nada. De ahí que definir el tiempo como "el ser-afuera-de-si como no siendo" sería igualarlo al espacio. En Hegel el tiempo es la verdad del espacio y por ello tiene que venir "después" de él.

[1666] Cf. Hegel [2002] p. 30: "Hier, hier und hier. Alle haben Platz nebeneinander, tun einander nichts. Anders ist es bei den Zeitpunkten, diese vertragen sich nicht mieteinander".

[1667] Cf. Bonsiepen [1985] p. 63.

[1668] Cf. Bonsiepen [1985] p. 63.

otra parte, la continuidad subraya la igualdad de los igualmente diferentes llegando así al resultado de la unidad, es decir, la igualdad de los mismos[1669]. La unidad de los momentos de la continuidad y la discreción es el "concepto del Espacio determinado objetivamente"[1670].

Vemos con ello que la afirmación unilateral de la discreción consiste en afirmar, en el caso del espacio, la existencia del punto. La falsedad derivada del hecho de la unilateralidad conduce así a afirmar la falsedad del punto como constituyente del espacio. El espacio no esta constituido por unos supuestos elementos positivos denominados puntos[1671]. Para que ello fuese así, los puntos deberían ser consistentes[1672] y ya hemos visto que únicamente tienen sentido como uno de los momentos del par Discreción/Continuidad. No hay puntos sino puntualidades (*Puntualität*)[1673], o puntos provisionalmente puntos[1674]. El término "Puntualidad" pretende responder a las exigencias que se le plantean al espacio en tanto que es pura cantidad: las distinciones, en tanto que abstractas, no son ninguna distinción[1675]. Un punto, para que tenga sentido debe de ser espacial. Esto último implica que el punto no era tal, que el punto tiene en sí un arriba, un abajo, etc. En definitiva para que el punto sea espacial debe de estar constituido a su vez por puntos. Un átomo que no es tal átomo, un algo discreto que, en su caso, es también continuo, esto no es otra cosa que la puntualidad. La puntualidad es lo discreto que es potencialmente continuo, lo indivisible que es potencialmente divisible. La puntualidad es el un compromiso provisional en la superación de la contradicción entre lo discreto y lo continuo[1676].

En definitiva, frente al espacio que ha sido definido como lo "unmittelbare unterschiedlosse Außersichsein"[1677], el punto supone la introducción de un elemento negativo, distinguidor, en este fondo indistinto. La aparición del punto no era, sin embargo algo caprichoso, sino que resultaba de esta misma definición; no hay posibilidad de hablar de Ser-fuera-de-si (*Außersichsein*) sin tener algo que es Uno-afuera-de-otro (*Außereinandersein*), es decir, sin tener puntos. Esta negación del *espacio*[1678], es una negación *del* espacio[1679]; los puntos, elementos discretos, son a su vez divisibles, tienen un arriba, abajo,... en sí. Es más, el

[1669] Es en este marco donde sitúa Hegel la paradoja zenoniana de la flecha. Según la lectura de Hegel, la flecha no se moverá por que todos los lugares por donde pasa son uno y el mismo lugar; todos son "aquí". Cf. al respecto Hegel [IX] p. 58, Bonsiepen [1985] p. 63 y 24: "Insofern nund die verschiedenen Hier nicht durch Unräumlichkeiten vonendander getrennt sind, gehen sie ineinander über, bilden sie eine Einheit".

[1670] Cf. Hegel [IX] p. 43: "Die Einheit dieser beiden Momente, der Diskretion und Kontinuität, ist der objektiv bestimmte Begriff des Raums". Cf. también Bonsiepen [1985] p. 63: "Diese zwei entgegengesetzten Bestimmungen [la Discreción y la Continuidad], welche im Raum enthalten sind, machen den Begriff deselben aus".

[1671] Cf. Hegel [IX] p. 42: "Von *Raumpunkten* zu sprechen, als ob sie das positive Element des Raums ausmachten, ist unstatthaft". En este sentido se expresa también Bonsiepen en Bonsiepen [1985] p. 24: "Ebenfalls abzulehnen ist die Auflößung des Raumes in Punkte […] da hier das eine Moment des Raumes, seine Diskretheit, verselbständig wird".

[1672] Y es que, decir que Algo 1 está constituido de Algo 2 presupone que este último Algo tiene consistencia propia –e.d., subsistencia– independientemente del primero. Seguimos aquí la lectura de Wandschneider [1982] p. 49: "Weder ‚gibt' es Raum noch ‚gibt' es Punkte je für sich, sondern es *gibt* beides nur in ihrer räumlichen *Beziehung* zueinander".

[1673] Cf. Hegel [IX] p. 43: "Der Raum ist also Punktualität".

[1674] "Provisionalemente puntos" o puntos meramente posibles. Cf. Hegel [IX] p. 42: "um seiner [del espacio] Unterschiedlosigkeit willen nur die Möglichkeit, nicht das *Gesetzsein* des Außereinanderseins und Negativen [a saber, del punto], daher schlechthin kontinuierlich ist".

[1675] Ibid.: "Die Hier sind auch unterschieden; aber der Unterschied ist ebenso kein Unterschied, d.h. es ist der abstrakte Unterschied".

[1676] Ya hemos visto en el segundo capítulo que un compromiso equivalente tenía lugar en Arisóteles cuando proponía un concepto del ahora con el que se enfrentaba a los argumentos de Zenón.

[1677] En Hegel [IX] p. 44.

[1678] Lo negado es el espacio.

[1679] Lo que niega es el espacio. Cf. Hegel [IX] p. 44: "Die Negation ist aber Negation *des Raumes*".

punto tendrá fuera de sí otros puntos que le son igualemente diferentes[1680]. El punto tiene así fuera de sí un algo, un punto, que es él mismo: los dos puntos son él mismo[1681], es decir, la discreción fracasa en su intento de hacerse unilateral. El equilibrio[1682] entre estos dos momentos, la superación del punto que, en tanto discreto, tiene un otro fuera de sí pero que, en tanto que continuo, lo que tiene fuera de sí no es mas que sí mismo, la superación del punto, decíamos, como siendo superándose (*als sich aufhebend*) de estos dos momentos es la línea[1683]. La línea lleva en sí la misma contradicción que se mostraba en el punto: está remitida al espacio sin que ella misma sea espacial. Si hacer del punto algo espacial tenía como resultado la línea[1684], la *espacialización* de la línea tendrá a su vez como resultado la superficie: la superficie (*Fläche*) es el hacerse otro (*Anderswerden*)[1685] de la línea. Si la línea era la negación del punto, la superficie será la negación de la negación del punto y con ello la verdad del espacio[1686] o la supresión de la dimensión[1687] o el límite del espacio[1688]. La superficie, en la medida en que es negación de la línea, es límite del espacio, un algo determinado. Sin embargo, en la medida en que es la negación superada o negación de la negación, es retorno a la inmediatéz de partida con un contenido más rico. En definitiva, la negación de la negación es la superficie, es decir, la reproducción (*Wiederherstellung*) de la totalidad espacial o una superficie envolvente cerrada[1689] (*umschließende Oberfläche*)[1690].

[1680] Cf. Hegel [IX] p. 43: "Der Punkt hat nur Sinn, insofern er räumlich ist, also gegen sich und anderes äußerlich ist".

[1681] Lo mismo ocurría con el "Dasein überhaupt" en la *Wissenschaft der Logik* (Hegel [1985] pp. 114 y 115): "Ferner aber ist das Etwas, wie es außer der Grenze ist, das unbegrenzte Etwas, nur das Dasein überhaupt. So ist es nicht von seinem Anderen unterschieden; es ist nur Dasein, hat also mit seinem Anderen dieselbe Bestimmung, jedes ist nur Etwas überhaupt, oder jedes ist Anderes; beide sind so dasselbe".

[1682] Un equilibrio (*Gleichgewicht*) que remite al equilibrio que alcanzaban los momentos de la Atracción y la Repulsión con el que inaguraban la categoría de la Cantidad.Cf. Hegel [1985] p. 144: "Das Fürsichsein ist […] die Wechselbestimmung der Repulsion und Attraction, in welcher sie in das Gleichgewicht zusammensinken, und die Qualität, die sich im Fürsichsein auf ihre Spitze trieb, in Quantität übergeht".

[1683] El hecho de que el punto traspase a la línea tiene como consecuencia el que el punto no sea efectivamente real en el espacio sino que, como veremos, lo sea únicamente en el tiempo. Cf. al respecto Bonsiepen [1985] p 25: "Die Negativität erscheint im Raum als Punkt, der aber als solcher keine Wirklichkeit hat, da er räumlich werdend in die Linie übergeht. Erst in der Zeit hat der Punkt Wirklichkeit". Sobre la deducción de la línea que tiene lugar en la *Lógica*, cf. Carlson [2007] p. 85: "[...] *if* the point is Limit, it must limit *something* [...] Something must be beyond Limit. The very idea of Limit compels a transcending. Hence, the geometric point, *when conceived as Limit*, necessarily produces the line *spontaneoulsy*".

[1684] Cf. Bonsiepen [1985] p. 48: "Der Punkt soll räumlich sein; indem er das ist, hört er auf, Punkt zu sein, wird er ein Ausgedehntes: die Linie".

[1685] Cf. Bonsiepen [1985] p. 25.

[1686] Cf. Wandschneider [1982] p. 62: "Die Fläche in ihrer Bestimmtheit als Negation der Negation des Punkts ist mithin als *affirmatives* Prinzip des *Raums* bestimmt, und das flächenhaft begrenzte Außereinandersein ist seinerseits *nicht* mehr als Negation des Raums zu versehen". Según Wanschneider, el concepto del espacio (que en su inmediatez es Universal) se singulariza en este silogismo que tiene como elemento mediador a la línea y a la superficie.

[1687] Cf. Hegel [1976] p. 8: "Fläche ist […] in der That die Dimension, welche das Aufheben der Dimension ist".

[1688] Cf. Hegel [2002] p. 33: "Die Fläche ist einerseits Negation der Negation, ein Besonderes gegen die Linie, und so ist sie selbst Grenze des Raums".

[1689] Seguimos la traducción de Ramón Valls Plana en Hegel [1997] p. 314.

[1690] Cf. Bonsiepen [1985] p. 67: "Die Fläche ist einerseits Negation der Negation, ein Besonderes gegen die Linie, und so ist sie selbst Grenze des Raums. Ihrem wahrhaften Begriffe nach ist die Fläche die Negation der Negation und damit Totalität; so ist die Fläche wesentlich Oberfläche".

9.2 EL TIEMPO

Hemos visto ya que el punto es la primera negación del espacio. Decir esto no es otra cosa que decir que el punto es el primer límite en el espacio[1691]. El punto es la negatividad que el espacio, en tanto que concepto[1692], tiene en sí. Esta negatividad, en la medida en que es puesta para-sí, es el tiempo[1693]. En él, el límite no es ya un indiferente subsistir (*bestehen)* uno al lado del otro[1694], sino que se supera a sí mismo: el límite del tiempo es la negación que se refiere a sí mismo. En el espacio la distinción que era establecida por el punto no producía ninguna diversidad (*Verschiedenheit*)[1695] en el mismo; un punto era igual de punto que otro. Ahora, en el tiempo, la distinción es para-sí[1696], la Negación lo es en sí y no en otro, como en el espacio. Que la distinción sea por sí sólo significa que se hace presente sin recurrir a otro Algo que no sea el Algo mismo que se pretende distinguir: el otro ahora del que se distingue el Ahora de ahora será o ha sido ya este mismo Ahora. Es decir, el Ahora se distingue, en principio, del "Ahora ya no" y del "Ahora todavía no", pero resulta que el primero ha sido ya lo mismo que el Ahora de ahora y el segundo será lo mismo que ahora: la distinción es una distinción que se supera de inmediato[1697]. A esto, es decir, al tiempo tal y como ahora lo estamos presentando, lo llama Hegel "el devenir intuido" (*das angeschaute Werden*)[1698].

Ya hemos visto que el devenir es el paso del Ser a la Nada o de la Nada al Ser. Dependiendo de que se ponga como fundamento el Ser o la Nada, tendremos las dos dimensiones del tiempo denominadas "pasado" y "futuro". Si ponemos el Ser como fundamento para, acontinuación, poner la Nada tendremos la dimensión denominada "pasado". A su vez, si empezamos con la determinación de la Nada para luego pasar a la determinación del Ser, tendremos como resultado la dimensión del tiempo denominada

---

[1691] Cf. Bonsiepen [1985] p. 46: "Die Beziehung des Punktes auf den Raum ist die Linie. Sie ist die erste positive Bestimmung: Grenze im Raume".

[1692] Cf. Hegel [1992] p. 71: „Weil das Sein an sich der Begriff ist, so ist es sogleich das Sein mit der Negativität oder Schranke, also die Bestimmtheit oder Qualität".

[1693] Cf. Bonsiepen [1985] p. 69: "Die Zeit ist zunächst das Negative des Raums: aber nicht nur das Negative, sondern diese Negativität, die wir am Raume gesehen haben als für sich".

[1694] Tal y como ocurría, por ejemplo, con el punto como límite en la línea. Este subsistir de los límites es para Hegel el defecto (*Mangel*) del espacio que hay que superar. Cf. Hegel [IX] p. 48: "Der Raum ist die unmittelbare daseiende Quantität, worin alles bestehen bleibt, selbst die Grenze die Weise eines Bestehens hat; das ist der Mangel des Raums". Nótese que Hegel, algo cauto en este punto, no habla aquí de contradicción del espacio.

[1695] Cf. Bonsiepen [1985] p. 58: "Die Raumpunkte sind einer was der andere, es ist keine Verschiedenheit zwischen ihnen".

[1696] O mejor, *für sich* en el sentido que dábamos en el Capítulo 1 de "Ser por si solo".

[1697] Cf. Hegel [IX] p. 48: "die Zeit ist [...] [die] unmittelbar sich aufhebende Unterschiede".

[1698] Ibid. No podemos no reproducir, al menos de pasada, la dialéctica del "ahora" con el que comenzaba el capítulo "Die sinnliche Gewißheit; oder das Diese und das Meinen" de *die Phänomenologie des Geistes*. En él (cf. Hegel [1980] pp. 63-70), el "ahora" tenía su verdad en su superación (*Aufhebung*) o negación de la negación. El momento de la afirmación en el ahora es su inmediato ponerse idéntico a sí. Sin embargo, ésta inmediatez suya es una y otra vez negada en cada momento en el que se dice "ahora" debido a que "ahora" ya no es "ahora". Hegel entiende por la primera negación aquella que niega cada nuevo "ahora", es decir, los sucesivos "ahora" no son el "ahora" que al principio se había puesto. Este momento de la primera negación es el momento de la diferencia o de la no-identidad de la fórmula "identidad de la identidad y la no-identidad" de la *Glauben und Wissen* (cf. Hegel [1968] p. 64). La primera negación no es otra cosa que el sucesivo no ser del "ahora" puesto primero, por parte de los "ahora" que le siguen. Sin embargo los "ahora" que siguen al primer "ahora" son también "ahoras", y de hecho, cuando se estaba diciendo que el "ahora^0 ya no es ahora^1" se estaba afirmando que de alguna manera lo era, por que ámbos eran ahora. Llegamos así al momento de la identidad de la identidad y de la no-identidad o negación de la negación en el que se recogen los dos momentos previos: el "ahora" es siempre igual a sí mismo y siempre distinto a sí mismo. Esta identidad de la diferencia y de la igualdad es la verdad del "ahora" a la que en el comienzo del parágrafo nos referíamos. El "ahora" es ahora igual a sí y para sí.

"futuro"[1699]. Esta distinción entre el pasado y el futuro no es, sin embargo, algo que tenga subsistencia en la naturaleza[1700]. En ella, la distinción entre el pasado y el futuro desaparece: la desaparición inmediata de esta distinción entre el pasado y el futuro es el presente como Ahora[1701]. En el Ahora del presente se unen el pasado y el futuro. Este Ahora es la verdad del pasado y el futuro[1702].

El ahora es, por un lado, el ahora singular, es decir, el ahora desapareciente (*verschwindend*)[1703] que el *meinen* de la *Phänomenologie* pretende decir[1704]. Esta pretensión es una y otra vez negada por el ahora de cada caso: ahora (1) ya no es ahora (1), sino ahora (2). El ahora (1) es negado por el ahora (2). Como resultado de esta negación obtenemos un ahora que no es ni el ahora (1) ni el ahora (2), un ahora que no es singular sino que es universal. Esta universalidad del ahora es lo que constituye la continuidad del tiempo[1705]. La universalidad del ahora es lo que permite hablar de subsistencia del tiempo. La universalidad del ahora da lugar a la duración[1706].

El verdadero ahora recoge estos dos momentos del ahora, es decir, el verdadero ahora es la negación de la negación del ahora singular o la negación del ahora universal[1707]. Este ahora es el mismo ahora verdadero del que antes hablábamos: el ahora del presente[1708] o el ahora particular.

9.3 LA MATERIA Y EL MOVIMIENTO

El indiferente Ser-afuera-de-otro del espacio no es otra cosa que la indistinguible continuidad del mismo. Sobre este carácter del espacio se fundamenta la aporía zenoniana de

---

[1699] Cf. Hegel [XI] p. 54: "in der Vergangenheit ist das Sein dir Grundlage, von der angefangen wird [...]. Das andere Mal ist es umgekehrt; in der Zukunft ist das Nichtsein die erste Bestimmung, das Sein die spätere, wenngleich nicht die Zeit nach".

[1700] Es únicamente en la representación subjetiva donde las dimensiones del tiempo denominadas "futuro" y "pasado" adquieren subsitencia en forma de "temor" y "recuerdo" respectivamente. Cf. sobre este punto Hegel [IX] p. 52.

[1701] Cf. Hegel [IX] p. 52: "Das unmittelbare Verschwinden diser Unterschiede in die *Einzelheit* ist die Gegenwart als *Jetzt*".

[1702] Y es que la afirmación unilateral de uno de los polos, sea el Ser o sea la Nada, es algo arbitrario que corre a cargo del entendimiento que en Hegel, por definición, es finito.

[1703] Cf. Bonsiepen [1985] p. 53.

[1704] Esta pretensión frustrada es también expresada en la Enzyklopädie (véase *Zus.* al §258): "Das Jetzt hat ein ungeheures Recht, -es *ist* nichts als das einzelne Jetzt; aber dies Ausschließende in seiner Aufspreizung ist aufgelöst, zerflossen, zerstäubt, indem ich es ausspreche".

[1705] Los dos momentos de la "singularidad" y de la "universalidad" eran ya expresados en el fragmento del "rio" de Heráclito. Cf. A.G. Calvo [1985] p. 184 y sig: "ποταμοῖσι τοῖσιν αὐτοῖσιν ἐμβαίνομέν τε καὶ ἐμβαίνομεν, εἶμέν τε καὶ οὐκ εἶμεν". Es decir, nos bañamos (universalidad) y no nos bañamos (singularidad) en el mismo rio.

[1706] Cf. Bonsiepen [1985] p. 26: "Das Jetzt der Gegenwart ist ein gedoppeltes. Es ist zunächst das vergehende; als allgemeines vorgestellt ist es aber die Dauer, die der Zeit, der Veränderung entgegengesetzt ist". Esta cita encaja así con la nota anterior. Para ello téngase en cuenta que lo "vergehende" no es otra cosa que lo que antes denominábamos "el momento de la singularidad". La duración, la "universalidad", es lo que, al estar contrapuesto al cambio (*der Veränderung entgegengesetzt*), da cuenta de la posibilidad de bañarnos en el mismo rio.

[1707] Recuérdese que el ahora universal había tenido lugar como resultado de la negación sucesiva de la pretensión de cada ahora singular.

[1708] Este vedadero ahora tiene que ser, según Hegel, "die Einzelheit *ausschließend* [singular] und zugleich schlechthin *kontinuierlich* [universal]" (en Hegel [IX] p. 52).

la flecha[1709] según Hegel. Al ser todos los "aquí" del espacio continuamente indistinguibles, la flecha no conseguirá salir fuera de este "aquí" y, con ello, la flecha no se moverá. Con el recurso al tiempo podremos romper este hechizo de la inmobilidad. Un "aquí" será el "aquí" que se haya de tomar, otro "aquí" será el "aquí" que se ha dejado atras y otro "aquí" el "aquí" en el que ahora se está[1710]. El tiempo es el elemento con el que se distinguen los aquís[1711]. Estos aquí distintos, estos ahora espaciales, esta unión de los ahora y de los aquí, son el lugar (*der Ort*)[1712]. Un lugar es el que es, a diferencia del "aquí", en referencia a un lugar que se ha de tomar –un aquí del futuro– y otro lugar que ya se ha tomado –un aquí del pasado–[1713]. Sin esta remisión de un lugar a otros dos lugares, no podría decirse más que "cada cosa tiene su lugar", es decir, no habría posibilidad de afirmar el movimiento[1714].

Pero el lugar no recoge únicamente el regreso (*das Zurückgehen*) del espacio en el tiempo sino, a su vez, el del tiempo en el espacio[1715]. Este regreso del tiempo en el espacio es el "aquí" temporal o el lugar como duración[1716]. Efectivamente, los "aquí" de la unión de los "aquí" y "ahora" que dan lugar al lugar son todos un "aquí", una universalidad de *aquís*[1717]. El tiempo se hace así subsistente (*bestehend*) y dura por mediación del espacio[1718].

Este "perecer y regenerarse del espacio en el tiempo y del tiempo en el espacio"[1719] es, bajo la perspectiva del tiempo, el movimiento[1720], y bajo la perspectiva del espacio, la

---

[1709] Nótese que nuestra lectura de las aporías de Zenón del capítulo 2 se desvía en este punto de la lectura que propone Hegel. La nuestra era una lectura sistemática y hegeliana de las aporías la que se echaba de menos en la propuesta de Hegel y lo que nos llevó a alejarnos de esta propuesta. Sobre este punto véase la nota 1669 del presente capítulo.

[1710] Cf. al respecto Hegel [IX] p. 58.

[1711] Cf. Hegel [IX] p. 58 y 59: "[…] die Bewegung […] ist die […] durch die Zeit erst wahrhaft unterschiedene Raum". Cf. también Hegel [IX] p. 55: "Der Raum ist [...] das *Übergehen zunächst in die Zeit*".

[1712] Cf. Hegel [IX] p. 56: "Diese Einheit des Hier und des Jetzt ist der Ort" y "Der Ort ist die räumliche, somit gleichgültige *Einzelheit* und ist dies nur als *räumliches Jetzt*, als Zeit, so daß der Ort unmittelbar gleichgültig gegen sich als *diesen*, sich äußerlich, die Negation seiner und ein *anderer* Ort ist". Cf. también Wahsner [1996] p. 31: "Im Ort steckt so die (oder eine?) Synthese von Raum und Zeit oder „die *gesetzte* Identität des Raumes und der Zeit", der Ort ist der Punkt ihrer Einheit. Punkt wovon aber ist der Ort? er ist Punkt der Bewegung".

[1713] Cf. Hegel [1976] p. 16: "Er [el lugar] ist ein Itzt, das nur so ist, daß es Zukunft hat, einen andern Ort, und ebenso eine Vergangenheit, einen dritten. Erst durch zwey andre ist der Ort bestimmt". Cabe recordar que ya en Kant se presentaba una triple síntesis que daba cuenta de toda aprehensión de la pluralidad. En la exposición kantiana, lo que hemos llamado un "aquí" sin referencia al pasado ni al futuro sería un ejemplo de Unidad absoluta (cf. *absolute Einheit* de la *KrV* A99). El que la unidad sea absoluta indica que no es una unidad de una pluralidad, no es ella misma síntesis de una pluralidad, en definitiva, que no es intuición. En Kant la síntesis de la aprehensión se desdobla en una síntesis de la reproducción y en una síntesis de la recognición. La primera, la síntesis de la reproducción, es la encargada de mantener presente la pluralidad que sin ella habría desaparecido en el pasado. Esta síntesis remite el presente al pasado. La segunda síntesis, la síntesis de la recognición, proyecta la síntesis de la aprehensión en el futuro, abre la posibilidad de que la aprehensión no sea meramente aprehensión de un algo siempre distinto (es decir, la aprehensión de una unidad Absoluta que en su absoluta distinción sería absoluta identidad, la noche en el que todos los gatos son pardos), para que haya así la posibilidad del reencuentro de la pluralidad, de pronosticar la igualdad del porvenir dentro de la pluralidad, de la diferencia.

[1714] Es decir, nos encontraríamos con la paradoja de Zenón de la que hablábamos en la nota 1669.

[1715] Cf. Hegel [IX] p. 56: "worein die Zeit zurückgegangen [ist] […] ist der Raum".

[1716] Cf. Hegel [1976] p. 15: "Das Dauernde ist die Sichselbstgleichheit worein die Zeit zurückgegangen; sie ist der Raum, denn dessen Bestimmtheit ist das gleichgültige Daseyn überhaupt".

[1717] Es decir, "ein Allgemeines jener Örter" (en Hegel [IX] p. 58).

[1718] Cf. Hegel [IX] p. 58: "die Bewegung ist die [...] durch den Raum reale, bestehende Zeit".

[1719] Cf. Hegel [1997] p. 320.

[1720] La distinción entre el movimiento en general y el movimiento como cambio de lugar no tiene relevancia en la *Enzyklopädie*, siendo así que el primero puede reducirse al segundo. No ocurre así en el Sistema de Jena en donde se distinguen el movimiento en general y el movimiento simple o cambio de lugar. Cf. al respecto Hegel [1971] p. 207: "Die einfache Bewegung am Raume als Orstveränderung, die sich wieder aufhebt, ist dauernde materia[1721]. Tanto en el movimiento como en la materia adquieren el tiempo y el espacio la verdad[1722], es decir, la realidad efectiva[1723].

La manifestación del traspaso (*Übergang*) de la idealidad del espacio-tiempo a la realidad de la materia alcanza en la palanca una forma tal que Hegel pretenderá concluir de ella la identidad de los respectivos polos: el espacio por una lado y la materia por el otro. Como se sabe, en la palanca se define el equilibrio como la proporcionalidad de las magnitudes intensivas "masa" con las magnitudes extensivas "espacio". De este modo se consigue reducir una magnitud intensiva al espacio y, con ello, medirlo[1724]. Basándose en dicha proporcionalidad, una aumento/diminución del espacio –la longitud de uno de los brazos de la palanca- puede ser compensado por un proporcional disminución/aumento de la masa que pende de ese brazo. Hegel pretende interpretar el instrumento de la palanca como un ejemplo paradigmático en el que se materializa el traspaso lógico desplegado en la *Enzyklopädie* de la idealidad –tiempo y espacio– a la realidad –la materia.

Del mismo modo, en el caso del impulso[1725], de la intercambiabilidad entre la masa y la velocidad Hegel parece querer ilustrar la necesidad de que haya un traspaso de lo real a lo ideal debido a que, uno de los polos –lo ideal o lo real–, tomado aisladamente, no es capaz de exteriorizarse[1726].

Bewegung, oder es ist die Zeit so am Raume erscheinend, nur als Veränderung des Raumes, und sie selbst als sich verändernd ist aufgehoben, sie ist absolute Dauer".

[1721] Cf. Bonsiepen [1985] p. 77: "Beide [el espacio y el tiempo] sind ein und dasselbe, die Veschiedenheit beider besteht nur darin, daß die Materie eben die Wahrheit des Raums und der Zeit ist, und zwar gesetzt auf einfache, unmittelbar ruhende Weise, in der Weise des Raums selbst. Dies Resultat nun gesetzt in der Form des Prozesses oder der Zeit ist die Bewegung". Cf. también Hegel [IX] p. 60: "Die Bewegung ist der Prozeß, das Übergehen von Zeit in Raum und umgekehrt; die Materie dagegen die Beziehung von Raum und Zeit als ruhende Identität".

[1722] Cf. Bonsiepen [1985] p. 60: "Die Wahrheit des Raums ist […] daß die Negativität gesetzt werde an ihm, die er enthält […] ebenso, daß in der Zeit ein Etwas gesetzt wird, was sich aufhebt". Es decir, la diferencia que está contenida en el concepto de espacio es establecida en él por el tiempo ("das Negative des Raums ist die Zeit" dice Hegel en [IX] p. 56). Al mismo tiempo, en el fluir del tiempo falta algo que se pueda suprimir (cf. Bonsiepen [1983] p. 59: "In der Zeit ist kein Beharren, kein Verweilen, keine Ruhe vorhanden, nichts, was aufgehoben werden könnte"), esta falta es corregida por el espacio. De ahí que "das Positive, das Sein der Unterschiede der Zeit ist der Raum" (en Hegel [IX] p. 56).

[1723] Cf. Hegel [IX] p. 59 "Erst in der Bewegung hat nun Raum und Zeit Wirklichkeit".

[1724] Es decir, la balanza no es más que un acuerdo de proporcionalidad de dos magnitudes medibles (las magnitudes extensivas) con respecto a dos magnitudes no medibles (las magnitudes intesivas). Las primeras vienen dadas por la longitud de los brazos, las segundas por la masa de los objetos que penden de los brazos. De este modo, la palance consigue medir, volver extensiva, una magnitud que era intensiva. En el lenguaje de Hegel –y el de Kant–, en la palanca son intercambiables (proporcionales) la idealidad (la magnitud extensiva) y la realidad (magnitud intensiva). Esta última denominación utilizada por Hegel –el de la realidad– encuentra su fundamento en Kant si tenemos en cuenta que las magnitudes intensivas son la forma de todo *quid*, es decir, de toda realidad. Un prodedimiento análogo a este es, por ejemplo, el que se utiliza en la construcción tradicional de un termómetro.

[1725] El impulso es definido como el producto de la masa inercial por la velocidad. Hegel no hablará en este punto expresamente de impulso, sino de la cantidad de movimiento. Cf. Hegel [IX] p. 58: "Beim Hebel z. B. kann Entfernung an die Stelle der Masse und umgekehrt gesetzt werden, und ein Quantum vom ideellen Moment bringt dieselbe Wirkung hervor als das entsprechende Reelle. - In der Größe der Bewegung vertritt ebenso die Geschwindigkeit, welche das quantitative Verhältnis nur von Raum und Zeit ist, die Masse, und umgekehrt kommt dieselbe reelle Wirkung hervor, wenn die Masse vermehrt und jene verhältnismäßig vermindert wird".

[1726] De ahí que, haciendo uso de un ejemplo de Hegel, una teja que golpea en la cabeza de alquien no lo mate por sí misma, sino que tiene que haber caído a una velocidad determinada. Es la teja –su masa– junto con su velocidad de caída –el espacio y el tiempo– lo que terminan por matar al individuo.

CONCLUSIONES O RECAPITULACIÓN

Del mismo modo que hemos provisto las partes de nuestro comentario del texto de Hegel que mayores dificultades de comprensión presentaban de apartados de recapitulación, vamos a ofrecer ahora una recapitulación general de la entera tesis que servirá para conquistar una perspectiva dificil de recuperar tanto para el que se ha encargado de redactarla como para el que se ha tomado el trabajo de leerlo. Esta recapitulación se alejará con respecto al texto principal en dos aspectos. Por un lado, en esta recapitulación evitaremos que el proceso generativo se vea interrumpido por cuestiones que no formen parte del texto mismo de la *Wissenschaft der Logik*. Esto significa que vamos a ofrecer una exposición liberada de las paradojas de Zenón o del diálogo con Kant por un lado. Después de ello, nos ocuparemos de trazar los paralelos necesarios entre el texto de la *Logik* y los temas relevantes para nuestro proyecto de tesis. La segunda desviación de esta recapitulación con respecto al texto principal de la tesis se debe a las limitaciones propias de una recapitulación: no podemos pretender sintetizar el texto principal sin que parte del contenido vaya a perderse por el camino. En aquellos casos en los que este contenido resulta especialmente relevante remitiremos al texto principal mediante una nota. En cualquier caso, no podemos pretender hacer demasiada justicia al texto en esta recapitulación y de ahí que, como no podía se menos, la lectura del texto principal no resulte substituible.

El objetivo de la *Wissenschaft der Logik* es la manifestación de lo absoluto. Esta manifestación no podía ser una manifestación en algo distinto de él porque, en tal caso, habría algo distinto al absoluto y, con ello, éste perdería su caracter de tal. De ahí que lo absoluto de la *Logik* tiene que manifestarse en sí mismo, tiene que interiorizarse. Lo absoluto es algo que no deja nada fuera. Si no deja nada fuera, entonces es algo que no está mediado –negado– con algo que tenga fuera de él. El absoluto es así un muñon previo a la escisión "algo de algo", algo cuya negación tendrá que ser inmanente. Este muñon indeterminado o abstracto es el puro Ser. Dado que este muñon no tiene ninguna determinación[1727] no puede ser algo. El Ser es por ello Nada. Esta Nada, a su vez, al ser lo indeterminado mismo, no es otra cosa que el Ser. Y con ello se inicia la *Wissenschaft der Logik*. En efecto, el devenir del Ser a la Nada y de la Nada al Ser es la verdad del Ser y la Nada[1728]. Con esto nos encontramos ante la primera mediación interna del absoluto. Tenemos así un Ser con una negación[1729] o determinidad. Este Ser con una determinidad es el Ser-ahí o la Cualidad inmediata. Estos dos polos del Ser-ahí –el Ser y la determinidad– cuando se los considera abstractamente, inmediatamente,

[1727] Toda determinación necesita la estructura "algo de algo".

[1728] Digamoslo así: que la Nada es el Ser y el Ser la Nada es el momento dialéctico. Que la verdad, la unidad o totalidad, de este movimiento es el devenir en la forma de Ser, es lo especulativo.

[1729] Un ser que puede Ser, visto desde el comienzo, tanto el Ser como la Nada, y una negación que no es otra cosa que el traspaso del Ser a la Nada y de la Nada al Ser –es decir, una negación que no es otra cosa que mediación–.

unilateralmente, dan lugar al Ser-en-sí y al Ser-para-otro, respectivamente. En su remisión mútua son Algo y Otro. El proceso infinito consistente en que un Algo remite a Otro y el Otro a Algo. Este es el momento dialéctico de esta etapa. La superación o negación de la negación de esta contradicción es el Ser-para-sí. Con ello se cierra el retorno consistente en las etapas: 1) Ser (infinitud abstracta, inmediatez), 2) Ser-ahí (negación de la infinitud abstracta, finitud), 3) Ser-para-sí (negación de la negación, retorno mediado a la infinitud, infinitud de veras).

El Ser-para-sí es aquello cuya mediación dará lugar a la categoría de la Cantidad. Los momentos inmediatos del Ser-para-sí eran –del lado del Ser– el Uno y –del lado de la Nada– el Vacio. La referencia negativa del Uno a sí o Repulsión era la que pondrá los muchos Uno. En esta repulsión los muchos Uno son todos Uno con lo que se refieren a sí: la Repulsión da lugar así a la Atracción. El equilibrio o traspaso mutuo de la Atracción en la Repulsión y de la Repulsión en la Atracción es la Cantidad. La Cantidad es la negación de la determinidad del Ser y con ello su emancipación. Esto significa que la determinidad será indiferente o exterior al Ser[1730]. La manifestación inmediata de la Atracción y la Repulsión en la Cantidad son, respectivamente, la Continuidad y la Discreción. Esto implica que la Cantidad es, de una forma inmediata y en contra de la *unilateralización* de uno de estos dos momentos por el entendimiento[1731], Continuidad y Discreción. La Cantidad se distinguía del Cuanto en que en la primera la unidad de la Continuidad y la Discreción era algo inmediato mientras que en el segundo es algo puesto. El Cuanto será la primera negación que tiene lugar en la Cantidad, del mismo modo a que el Ser-ahí era la primera negación dentro de la Cualidad. Dentro del Cuanto los momentos de la Discreción y la Continuidad adquirían la forma del Valor numérico y de la Unidad, respectivamente. La unidad de ambos era el Número. Dentro del número el que el límite sea interno o externo distinguirá, respectivamente, a la magnitud extensiva e intensiva. El primero corresponde al Ser-en-sí de la categoría del Ser-ahí, el segundo al Ser-para-otro. En efecto, el que el límite o, en el caso del Ser-ahí, la determinidad sea algo diferente al Algo o no distinguirá a la magnitud extensiva de la intensiva, por un lado, y al Ser-en-sí del Ser-para-otro, por el otro lado. El problema del límite del Grado consistía en que no era capaz de cumplir sus pretensiones. Estas pretensiones consistían en que, por un lado el límite era algo externo y, por ende, cualitativo y, por otra parte, el límite era algo cuantitativo. El proceso de continuado fracaso de la delimitación al que se ve sometido el límite del grado es el proceso al infinito cuantitativo o el así denominado infinito malo. En el caso en el que el infinito cuantitativo toma la forma de disminución –y no de aumento– obteníamos lo infinitamente pequeño, una de las expresiones de la contradicción recogida en la mala infinitud. La figura que superaba esta contradicción de lo infinitamente pequeño mediante un movimiento de retorno –como el Ser-para-sí en el caso de la Cualidad– era el cociente diferencial. En efecto, del mismo modo a que el Ser-para-sí era el retorno del movimiento que empezaba con el Ser, la relación Cuantitativa y, en concreto, el cociente diferencial[1732], es el retorno del movimiento que comenzó con la Cantidad. Lo que ocurre es que el retorno dentro de la Cantidad es ahora, al mismo tiempo, retorno de la Cantidad –es decir, retorno del movimiento que comenzaba con la Cualidad–. La puesta de este retorno será lo que tendrá lugar en la categoría de la Medida[1733].

[1730] Es decir, como diría Hegel, el aumento en la intensidad del rojo siempre dará un rojo. Nosotros deberíamos decir más bien, el aumento de la longitud de onda de una onda da siempre radiación.

[1731] Algo que, como sabemos ya, da lugar a las paradojas de Zenón o, en su caso, a la segunda de las antinomias kantianas.

[1732] La relación cuantitativa es la superación de la contradición de la infinitud cuantitativa cuando el progreso es hacia lo infinitamente grande, mientras que el cociente diferencial es la superación de la contradicción cuando el progreso al infinito era hacia lo infinitamente pequeño. En cualquier caso, veíamos a lo largo de esta tesis la vinculación en la que se econtraban estas dos figuras, siendo así que la segunda proporcionaba la ley de la variación de la primera.

[1733] Hemos ofrecido un resumen del capítulo de la Medida en el apartado 5.4.

El texto principal había sido interrumpido por un capítulo en el que nos ocupábamos de una contradicción especialmente relevante para nuestro tema. De este modo, habíamos dedicado el segundo capítulo de la tesis a ofrecer una lectura sistemática de las paradojas de Zenón. La sistematicidad de las mismas consistía en que las cuatro paradojas eran ordenadas en base a dos criterios:

1) Continuidad o Discreción del medio *espaciotemporal* en el que se definen.

2) Paradojas del movimiento en general y paradojas del movimiento en relación a otro móvil[1734].

El cuadro que recoge esquemáticamente esta partición es el siguiente:

	Movimiento en general	Movimiento relativo
Discreción	*Aporía de la flecha*	*Aporía del Estadio*
Continuidad	*Aporía de la Dicotomía*	*Aporía de Aquiles*

En él, hemos denominado “Aporía de la flecha” a la aporía en la que Zenón parte de la pregunta por el estado de movimiento o reposo de una flecha que se mueve cuando lo consideramos en un instante[1735]. La “Aporía del Estadio” es aquella en la que dos cuerpos se mueven antiparalelamente entre sí y paralelamente en relación a un tercer cuerpo que se encuentra en reposo[1736]. La “Aporía de la Dicotomía” es la que se basa en la necesidad de llegar a la mitad de un trecho antes de recorrer el trecho entero[1737]. Por último, la “Aporía de Aquiles” es la que afirma la imposibilidad de que un móvil alcance a otro móvil con menor velocidad si a ésta se le concede una ventaja en el tiempo o en el espacio[1738].

Lo más importante para nosotros había sido mostrar que la raíz de las aporias se debía a la unilateralización del aspecto doble –continuo y discreto– de la Cantidad. Las paradojas eran así incorporadas al movimiento de la *Wissenschaft der Logik*. De este modo, la unilateralidad era identificada con un estadio propio del entendimiento que la razón exigía superar. Esta superación vendrá dada, en última instancia, por el cociente diferencial, en el que los lados continuo y discreto del espacio y del tiempo son recogidos –bajo la figura del infinitesimal– y asimilados –bajo la figura de la relación–.

La manera aristótelica de hacer frente a estas aporias consistía en postergar la fecha de darse la contradicción *ad calendas graecas*. Es decir, la tesis unilateral de la discreción del tiempo y del espacio era rechazado por Aristóteles en base a su definición del continuo[1739]. Pero Aristóteles no toma partido pura y simplemente a favor de la continuidad. El

[1734] Es decir, paradoja de la aceleración.
[1735] Cf. el apartado 2.1.1.2.1.
[1736] Cf. el apartado 2.1.1.2.2.
[1737] Cf. el apartado 2.1.1.1.1.
[1738] Cf. el apartado 2.1.1.1.2.
[1739] En efecto, si lo continuo (συνεχὲς) es aquello cuyos extremos son una sola cosa, entonces no puede estar constituido por partes discretas porque, en tal caso, estar en un punto de tiempo significaría estar en todos los ahoras habidos y por haber.

compromiso aristótelico con lo discreto y lo continuo consiste en afirmar la indivisibilidad de las partes de, en general, toda magnitud continua, pero afirmarlo sólo provisionalmente, es decir, hasta que ello no implique una contradicción. Esta forma de superar[1740] la *unilateralización* dialéctica de las paradojas de Zenón consistirá en afirmar la divisibilidad en potencia de la magnitud. La magnitud está *de facto* por dividir y es, en este sentido, indivisible, pero es siempre divisible y es, en este sentido, continua. Para Hegel, este compromiso no supondrá propiamente superar la contradicción, sino que equivaldrá a expresar, más bien, en qué consiste la contradicción[1741]. El resto de nuestra exposición de la reacción aristotélica ante las paradojas de Zenón consistió en mostrar la solidaridad entre el infinito potencial y que algo fuese para el entendimiento y el infinito en acto y que algo fuese por sí.

Habíamos comenzado el apartado[1742] dedicado a la diferencia entre la noción de número en Hegel y Kant defendiendo una lectura de número en Hegel que no se restringiese a los números naturales. Veíamos que la diferencia fundamental entre la noción de número en Kant y en Hegel consistía en algo *kantianamente* tan imposible como que el concepto de Número en Hegel no remitía[1743] al tiempo. Esto lo explicábamos diciendo que la infinitud puesta por el momento del Ser-para-sí, infinitud que era la base de la Cantidad, era una infinitud que, en la medida en que era resultado del equilibrio entre la Atracción y la Repulsión, era presente o actual. Veíamos además que si teníamos en cuenta el significado con el que Kant y Hegel utilizaban los términos "analítico" y "sintético", la postura de estos dos filósofos resultaba menos enfrentada de lo que se suele creer. La diferencia entre los dos autores consistiría en que, para el primero, el número es siempre este u otro número, mientras que para el segundo será posible hablar de, por así decir, el número total[1744] o fondo sobre el que se definen este u otro número.

Dentro de las observación al momento intensivo de la Cantidad en Hegel, nos habíamos enfrentado con una tesis que se remontaba a H. Cohen y que identificaba las magnitudes intensivas en Kant con el diferencial. Demostrábamos la inconsistencia de esta tesis e indicábamos la necesidad de situar dentro de la tercera tríada de las categorías kantianas el concepto del cociente diferencial. Debido a que mostrar esta tesis habría supuesto salirse del marco de este trabajo, nos habíamos conformado con dar alguna aclaración al respecto en la introducción. Con todo, el carácter relacional puesto en juego por el cociente diferencial adelantaba el contenido del apartado 3.4 en el que se trazaba la analogía entre este cociente y un instrumento con carácter estrictamente relacional: la estructura. Dentro de este apartado conseguíamos distinguir el tipo de relación del que hacían uso los antiguos frente a la relación moderna, formulada matemáticamente por Lagrange, con la que nos habíamos ocupado, *in extenso*, en el capítulo 7. Siguiendo un trabajo de Deleuze, habíamos denominado a las primeras relaciones imaginarias y a las segundas simbólicas. Esto último enlazaba además con la distinción entre la relación mediante el que se expresa un número y la relación del cociente diferencial –la relación simbólica–, diferencia con la que nos ocupábamos en el apartado 4.1.1.

[1740] "Superar" aquí, no en el sentido dado a este término por Hegel, sino en el sentido de "encontrar un acuerdo o compromiso".

[1741] De una forma análoga, para Hegel, los infinitesimales eran la expresión de la contradicción, no su superación.

[1742] Cf. el apartado 3.1.1.1.

[1743] De hecho, habíamos visto en qué consistía en particular en Kant eso de "remitir al tiempo" a raíz del ejemplo "7+5=12".

[1744] Y no, simplemente, del concepto de número.

Comenzábamos la parte[1745] dedicada al diálogo mantenido por Hegel con los matemáticos fundadores del Cálculo haciendo una distinción entre la forma con la que éstos se enfrentaban a la contradicción expresada por el infinitesimal. Frente a aquellos[1746] que, más o menos expresamente, recurrían al cociente diferencial para evitar las dificultades, se situaban aquellos que pretendían superar la contradicción del infinitesimal llevando al extremo –a la totalidad– la definición de ésta[1747]. De este modo, mientras que los primeros aceptaban –sea para hacer uso de él, sea para posicionarse frente a él– la contradicción expresada por la expresión "aquello que es menor que cualquier magnitud dada", los segundos llevaban esta definición, digamos, al límite convirtiéndola en esta otra: "aquello que es menor que toda magnitud". Dentro de esa división, habíamos situado a Hegel dentro del primer grupo. Con ello identificábamos en la filosofía de Hegel un elemento que quedaba fuera del proyecto moderno y que hacía que ésta se acercara a la filosofía crítica[1748].

En la parte dedicada al diálogo de Hegel con Newton[1749], el primer apartado[1750] exponía algo técnicamente un error cometido por Newton en los *Principia*. Este error había sido utilizado por Hegel para reprochar el recurso a la omisión de los ínfinitesimales de orden superior en el Cálculo. El segundo apartado[1751] estaba dedicado a exponer una acertada crítica de Hegel a Newton en la que se veía cómo se servía éste de una falsa representación gráfica del producto de diferenciales $(x+dx)(y+dy)$ para evitar tener que omitir el infinitesimal de orden superior $dx \cdot dy$. En la parte[1752] dedicada a la noción de evanescente en Newton, habíamos subrayado la simpatía de Hegel con respecto al carácter de *devenir* de la misma, si bien tenía que quedar claro que este *devenir* era estrictamente lógico en Hegel. Es por ello que pudimos afirmar que el *devenir* del evanescente era algo más concreto que el *devenir* del comienzo de la *Wissenschaft der Logik* y que, por esta razón, era puesta *después* de ella. La noción hegelianamente especulativa que encontrábamos en Newton era la de "razón primera y última" y de ella nos ocupábamos en el siguiente apartado[1753]. El comienzo de éste lo dedicábamos a mostrar la diferencia –fundamental para la comprensión del Cálculo– entre la igualdad entre dos magnitudes que se aproximan y la proporción última de igualdad. Será la segunda la que Newton, a veces con ciertas vacilaciones, utilizará en los *Principia* y la que expresa la importancia de considerar los procesos de evanescencia dentro de una relación. Además de ello, mostrábamos la estructura de reducción al absurdo que subyacía en el primer y fundamental Lemma de la sección en el que Newton presenta su método de primeras y úlimas razones. Con ello interpretábamos el argumento de Newton como una invesión del argumento *zenoniano* de la dicotomía. El último apartado dedicado a Newton se ocupaba de un error de interpretación de Hegel en el que el filósofo alemán atribuye a Newton la igualdad entre el *sinus versus* de una trayectoria curva con la tangente, la diagonal así como con un segmento de la misma. Veíamos que la razón de esta falsa atribución de Hegel era más

---

[1745] Cf. el capítulo 4.
[1746] En este grupo reuníamos a la mayoría de los matemáticos estudiados.
[1747] En este grupo situábamos a Euler y a los matemáticos del "non-standard Analysis". No hay que olvidar, sin embargo, que Euler, al no poder ser capaz de formalizar su planteamiento, recurrirá a una distinción propia del primer grupo –a saber, la distinción entre la comparación geométrica y la comparación aritmética– para explicar el cálculo con nadas.
[1748] La posición de la moderna teoria de conjuntos era ambigua al respecto. Por un lado esta teoría se negaba a aceptar entidades como el "mayor de los números naturales". Por el otro lado, esta teoría permitía hablar de la cardinalidad de conjuntos infinitos haciendo uso para ello de una *relación* –la de la coordinabilidad biunívoca–.
[1749] Cf. el apartado 4.2.3.
[1750] Cf. el apartado 4.2.3.1.1.
[1751] Cf. el apartado 4.2.3.1.2.
[1752] Cf. el apartado 4.2.3.2.
[1753] Cf. el apartado 4.2.3.3.

conceptual que técnica[1754] y remitíamos al apartado 8.4 al lector. En este mismo apartado nos ocupábamos de ver en qué sentido la crítica de Hegel no resultaba del todo desacertada[1755]. Esto nos permitía trazar una reveladora analogía entre el método de últimas razones de Newton y un pasaje del *Parménides* de Platón con el que intentábamos mostrar en qué sentido era correcto hablar de "devenir" cuando se hacía uso de los evanescentes.

El apartado dedicado a Carnot[1756] había sido dividido en dos partes. En la primera se presentaban los fundamentos de la interpretación que consideraba el Cálculo como un método de compensación de errores. Esta lectura, presente también en Leibniz y Lagrange, será justamente criticada por Hegel en su máximo exponenete, Lazaré Carnot. Concluíamos el apartado ofreciendo una traducción de la lectura compensacionista en términos de desplazamientos virtuales mostrando con ello el fondo especulativo en el que cabía transformar la equivocada lectura de Carnot. En la segunda parte del apartado dedicado a Carnot nos ocuapábamos del "instrumento de legitimación" con el que se fundamentaban, desde Leibniz, los procesos al límite entre magnitudes homógonas. Veíamos que la denominada "ley de continuidad"[1757] exigía una relación de continuidad entre las causas –los diferenciales– como condición para afirmar la continuidad de los efectos entre magnitudes homógonas[1758].

Será Lagrange el matemático con cuyo trabajo en mayor medida se identificará Hegel. Éste alabará la decisión del matemático italiano de eliminar los infinitesimales del Cálculo. Veíamos que para ello Lagrange partía de la definición analítica de función en la que los términos de la serie de potencias son incorporados dentro de un algoritmo en donde una parte depende del incremento dado a la función y la otra no. La independencia de esta última parte con respecto al incremento dado a la función es lo que aseguraba en Lagrange la no anulación de la derivada cuando –expresado en términos de, por ejemplo, Newton– los lados del cociente *evanescian*. A su vez, la forma algorítmica que daba Lagrange a la función hacía posible interpretar las funciones diferenciales en términos de funciones derivadas de la función originaria. El análisis de Lagrange era un análisis *algebraizado* en el que los infinitesimales de orden superior no se omitían en base a su relativa pequeñez –es decir, en base a argumentos cuantitativos–, sino en base a si formaban o no parte en ciertas relaciones –es decir, en base a argumentos cualitativos–. Ésta será una de las razones por las que Hegel simpatice con el método de Lagrange. El segundo gran logro[1759] de Lagrange consiste en haber separado dentro del Cálculo la semántica de la sintaxis. Con ello se evitaba la intromisión de elementos intuitivos o representacionales dentro de un cálculo que debía ser estrictamente formal. Por último, veíamos también la derivación del denominado "resto de Lagrange" y subrayábamos que se hacía uso de este resto para representar a la función y no, como algún comentarista llegará a defender, para calcular la derivada. Con ello, el Cálculo de las funciones derivadas de Lagrange quedaba a salvo de pesudo-argumentos cuantitativos de cuya crítica se había ocupado Hegel en la *Wissenschaft der Logik*. Terminábamos el apartado dedicado a Lagrange viendo el modo en el que conseguía llenar de contenido –geométrico y físico– al Cálculo presentado en la primera parte de la *Théorie des Fonctions Analytiques*[1760].

[1754] En efecto, Hegel consideraba que Newton identificaba el *sinus versus* con la fuerza centrípeta y la tangente con la fuerza centrífuga con lo que la igualdad de estas dos fuerzas exigía la igualdad de estos dos vectores.
[1755] Es decir, veíamos en qué sentido era cierto eso de que en Newton "de noche todas las vacas son negras".
[1756] Cf. el apartado 4.2.4.
[1757] Ley que, todo hay que decirlo, recibirá el beneplácito de Hegel.
[1758] De este modo, el cociente diferencial era un caso más del cociente de diferencias finitas, con lo que no había razón para temer su evanescencia cuando sus lados tendían a cero.
[1759] Cf. el apartado 4.2.5.3.
[1760] Tal vez sea necesario observar aquí que esta separación entre lo que hemos denominado sintáxis y semántica en el formalismo de Lagrange no implica defender el carácter tautológico de las verdades matemáticas. Este

Dedicábamos la última parte de este capítulo cuarto a poner a prueba las formulaciones infinitesimalistas posteriores a Hegel con el concepto de cociente diferencial hegeliano. Para este fin habíamos considerado la obra de los dos máximos exponentes del trabajo de fundamentación del análisis desde Hegel: Cauchy[1761] y Weierstraß[1762]. Habíamos visto en qué medida la definición *epsilóntica* de Cauchy del diferencial había supuesto una *descinematización* del concepto básico del Cálculo. Veíamos además que esta conceptualización de la definición del cociente diferencial era algo exigido por el programa definido en la *Wissenschaft der Logik* en donde, en contra de la opinión de algún crítico, se rechazaban del Cálculo las aproximaciones que recurrían a la representación vulgar del movimiento. Terminábamos el capítulo[1763] mostrando los malentendidos en los que se basaba la crítica del más célebre de estos críticos de Hegel: B. Russell.

La segunda parte de esta tesis parte del concepto de cociente diferencial obtenido en la primera parte. En el primer capítulo recorríamos las principales etapas del nacimiento de los conceptos de integración y derivación en Newton. La selección de los textos de Newton –y de Wallis– que presentábamos allí buscaba iluminar el concepto de cociente diferencial. Ya en la *Arithmetica Infinitorum* de Wallis encontrábamos las primeras expresiones con un irreductible carácter relacional. La forma descarnada con la que Newton atacaba la cuestión de la cuadratura nos permitía apreciar la importancia del principio de la homogeneidad en la misma. Era este principio el que permitía expresar volúmenes mediante superficies o superficies mediante rectas. El problema de la cuadratura surgía precisamente cuando se intentaban cuadrar superficies limitadas por curvas en dos dimensiones. La función de una parábola, por ejemplo, ponía en juego tres dimensiones con lo que, si no fuese por la ley de homogeneidad, habría sido necesaria la representación en tres dimensiones. La cuadratura de una curva polinómica de una dimensión mayor o igual a la dimensión del espacio en el que era representado consiste precisamente en obtener la función dependiente de esta curva en la que su representación tenga lugar en un espacio con las mismas dimensiones que la curva. La ley de homogeneidad era la que permitía afirmar que tanto el volumen con el que se cuadraba –el volumen de la parábola expresada por una pirámide– como la superficie que se cuadraba –la superficie que delimitaba la parábola representada en dos dimensiones– tenían algo en común: a saber, el ser ambas magnitudes[1764]. Veíamos también la importancia que tenía en el Cálculo la introducción del tiempo como variable independiente. Este tiempo uniforme es el que permitirá afirmar que encontrar la cuadratura de un volumen es encontrar el ritmo de llenado de este volumen en relación a este tiempo uniforme. En el apartado 6.3.5 localizábamos las raíces de esta idea en Barrow. El marco o relación dentro del cual se determinaba el ritmo de llenado –en el caso del Cálculo integral– o el ritmo de aumento –en el caso del Cálculo diferencial– era aquél que venia a ser marcado sobre el fondo de uniformidad de la variable independiente tiempo. Esto último expresaba la necesidad de contar con algo cuya variación se presuponía uniforme para medir todas las difomidades en el ritmo de variación recogidas en las distintas funciones. Mostrábamos también[1765] la forma en la que Newton, en una aproximación cinemática de la tangente, hacía uso de un instrumento particularmente relacional: el paralelogramo. Veíamos, en particular, que los problemas asociados a este instrumento para calcular las tangentes se debían más a la incapacidad de los

carácter tautológico vendría a defender una absoluta transparencia del lenguaje en el que habla la ciencia frente a lo empírico –que, por ello mismo, podría identificarse con lo "en sí"–. Es decir, es necesario no confundir el proyecto de Lagrange con el denominado "proyecto logicista".

[1761] Cf. el apartado 4.3.1.

[1762] Cf. el apartado 4.3.2.

[1763] Cf. el apartado 4.3.3.

[1764] Cf. el apartado 6.2.3.

[1765] Cf. el apartado 6.3.7.

matemáticos que a la falta de potencial del instrumento mismo. Terminábamos el capítulo mostrando cómo ya desde las primeras formulaciones de la fluxión, ésta estaba siempre puesta en relación con otra fluxión. Las fluxiones aparecían siempre en un contexto en el que adquirían sentido.

En el capítulo 7 nos habíamos ocupado de la formulación analítica de la mecánica de Lagrange. Habíamos visto cómo esta formulación resultaba impensable sin el cociente diferencial deducido en la primera parte de este trabajo. Veíamos en qué sentido el principio que subyacía al proyecto analítico, el principio de desplazamiento virtual, remitía a distinciones hechas por Aristóteles y Kant: distinción entre la causa como presente y como ausente, en el primero, distinción entre la oposición real y lógica, en el segundo. Habíamos mostrado que Galileo –en su formulación más inmediata– y Lagrange –en su formulación rigurosa– fueron los primeros en expresar este principio[1766]. El núcleo del capítulo se dedicaba a mostrar la forma en la que este principio permitía superar los estados de equilibrio dentro de los estados de desequilibrio[1767]. Terminábamos el capítulo enlazando este principio con el principio de d'Alembert. Con ello preparábamos el terreno para el siguiente capítulo.

El capítulo 8 enlazaba con el capítulo 7 haciendo ver la equivalencia entre el contenido de la *Gedankenexperiment* de Einstein que derivó en la Teoría General de la Relatividad y el principio de d'Alembert. Para entender esta equivalencia resultó necesario analizar la diferencia con la que Huygens y Newton se aproximaban al movimiento circular. Veíamos así que, en base al diferente sistema de referencia adpotado, los dos autores terminaban por hablar de dos fuerzas distintas –la fuerza centrífuga, en el primer autor, la fuerza centrípeta, en el segundo– y que esta distinción no tenía nada que ver con que uno errara y el otro no[1768]. Veíamos que cada sistema de referencia utilizado para describir los fenómenos implicaba el uso de una u otra fuerza y que ignorar esta regla había llevado a Hegel a afirmar, esta vez erróneamente, la absoluta *reemplazabilidad* de estas dos fuerzas. Esto implicaba que el carácter relacional del cociente diferencial no era únicamente interno al cociente sino que éste, en su manifestación de "fuerza centrípeta" y "fuerza centrífuga", estaba también en relación con el sistema desde el que se describían fenómenos.

El problema del movimiento había tenido una considerable importancia a lo largo de esta tesis. Por un lado, habíamos visto mediante las paradojas de Zenón que el entendimiento entraba en contradicciones cuando intentaba dar cuenta del movimiento y que el Cálculo permitía, en un sentido muy particular, superar estas contradicciones. Por el otro lado, resultaba que en la exposición de los conceptos fundamentales de este mismo Cálculo, algunos matemáticos recurrían a nociones cinemáticas censuradas por Hegel. Estos dos puntos hacían que resultara necesario ver cuál era el concepto de movimiento con el que Hegel operaba. Veíamos que este concepto se oponía tanto a la noción cinemática utilizada en el Cálculo como a la noción del que hacía uso el entendimiento. Todo ello hacía que el capítulo 9 hiciese una pequeña incursión en la *Filosofía de la Naturaleza* de Hegel, para ver así la deducción de las categorías de espacio, tiempo, materia y movimiento. Veíamos que el espacio era la naturaleza inmediata y que su mediación interna daba lugar al tiempo. A su vez, la unión del tiempo y el espacio –unión cuya forma inmediata resultaba ser el lugar– en el

[1766] Y no, en contra de lo que afirmaban algunos historiadores, Jordanus Nemorarius. El interés por el problema de saber quién fue el primero en formular el principio no se debía meramente a la curiosidad, sino que –como ocurre en estos casos– respondía a la importancia de saber qué se entiende por "principio de desplazamiento virtual".

[1767] Es decir, los estados estáticos dentro de los dinámicos.

[1768] Ni siquiera con que uno hablara de fuerzas reales y el otro de aparentes.

sentido de devenir el tiempo el espacio y el espacio el tiempo daba lugar al movimiento –desde la perspectiva del tiempo– y a la materia –desde la perspectiva del espacio–.

ZUSAMMENFASSUNG UND ABSCHLUSS

So wie wir diejenigen Teile unseres Kommentars des hegelschen Textes, welche die größten Schwierigkeiten für ihr Verständnis zeigten, mit zusammenfassenden Abschnitten versehen haben, bieten wir im folgenden eine allgemeine Zusammenfassung, die zur Erfassung eines sowohl für den Verfasser als auch für den Leser schwer zu gewinnenden Überblicks taugt. Diese Zusammenfassung weicht vom Haupttext in zwei Hinsichten ab: Einerseits werden wir nicht die jetzige Darstellung mit Betrachtungen unterbrechen, die nicht direkt zur *Wissenschaft der Logik* gehören. Das bedeutet aber, dass nachfolgende Zusammenfassung von den zenonischen Paradoxien und von unserem Dialog mit Kant gereinigt ist. Erst nach der Zusammenfassung werden wir die für diese Arbeit notwendige Parallele zwischen dem Text der *Logik* und den anderen relevanten Themen ziehen können. Andererseits ist die zweite Abweichung dieser Zusammenfassung vom Haupttext der Tatsache zuzuschreiben, dass wir nicht beanspruchen können den Haupttext zusammenzufassen ohne dass ein Teil des Inhalts verloren geht.

Das Ziel der *Wissenschaft der Logik* ist die Darstellung des Absoluten. Diese Darstellung kann nicht etwas von dem Absolute Unterschiedenes sein, weil es andernfalls etwas dem Absoluten unterschiedenes gäbe und demzufolge das Absolute nicht mehr absolut wäre. Aus diesem Grund muss sich das Absolute der *Wissenschaft der Logik* sich selbst darstellen, dass heißt, es muss sich erinnern. Das Absolute ist das, was nichts außer sich hat. Das Absolute ist daher wie ein Block, welcher der Teilung „Etwas als Etwas“ vorangeht und wessen Negation ihm immanent ist. Dieser unbestimmte oder abstrakter Block ist das reine Sein. Da dieser Block keine Bestimmungen[1769] hat, kann er nicht Etwas sein. Das Sein ist daher Nichts. Dieses Nichts wiederum, da es das Unmittelbare ist, ist nichts anderes als das Sein. Und damit fängt die *Wissenschaft der Logik* an. Tatsachlich, das Werden des Sein in das Nichts und des Nichts in das Sein ist die Wahrheit des Seins und des Nichts[1770]. Hiermit steht man vor der ersten internen Vermittlung des Absoluten. Man hat jetzt ein Sein mit einer Negation[1771] oder Bestimmtheit. Dieses Sein mit seiner Bestimmtheit ist das Dasein oder die unmittelbare Qualität. Diese zwei Pole des Daseins, das Sein und die Bestimmtheit, wenn sie abstrakt, unmittelbar, einseitig betrachtet werden, ergeben das Ansichsein, beziehungsweise das Sein-für-Anderes. Diese beiden sind in seiner gegenseitigen Beziehung Etwas und Anderes. Der unendliche Prozess besteht darin, dass sowohl ein Etwas zu einem Anderen sich bezieht als auch ein Anderes zu einem Etwas sich bezieht. Dies macht das Dialektische dieser

[1769] Jede Bestimmung benötigt die Struktur „Etwas als Etwas“.

[1770] Sagen wir so: Dass das Nichts das Sein ist und das Sein das Nichts, darin besteht das dialektische Moment. Dass die Wahrheit, die Einheit oder Totalität dieser Bewegung das Werden in der Form von Sein ist, darin besteht das Spekulative.

[1771] Ein Sein das, aus dem Anfang betrachtet, sowohl das Sein als auch das Nichts sein kann, und eine Negation, die nichts anderes ist als der Übergang des Seins in das Nichts und des Nichts in das Sein. –das heißt, eine Negation, die nichts anderes ist als Vermittlung.

Etappe aus. Die Aufhebung oder Negation der Negation dieses Widerspruchs ist das Fürsichsein. Hiermit schließt sich die aus den folgenden Etappen bestehende Rückkehr: 1) Sein (abstrakte Unendlichkeit, Unmittelbarkeit), 2) Dasein (Negation der abstrakten Unendlichkeit, Endlichkeit), 3) Fürsichsein (Negation der Negation, vermittelte Rückkehr zu der Unendlichkeit, wahre Unendlichkeit).

Die Vermittlung des Fürsichseins ergibt die Kategorie der Quantität. Die unmittelbaren Momente des Fürsichseins sind – aus dem Blickwinkel des Seins betrachtet– das Eins und – aus dem Blickwinkel des Nichts betrachtet– das Leere. Die negative Beziehung des Einen zu sich –nämlich, die Repulsion– ist das, was die vielen Eins setzen wird. In dieser Repulsion ist jedes der vielen Eins Eins, und daher sind sie auf sich bezogen: die Repulsion entwickelt sich in Attraktion. Das Gleichgewicht oder der gegenseitige Übergang der Attraktion in die Repulsion und der Repulsion in die Attraktion ist die Quantität. Die Quantität ist die Negation der Bestimmtheit des Seins und demzufolge, seine Emanzipation. Das bedeutet aber, dass jetzt die Bestimmtheit dem Sein gleichgültig oder äußerlich sein wird[1772]. Die unmittelbare Manifestationen der Attraktion und der Repulsion in der Quantität sind Kontinuität und Diskretion. Das impliziert aber, dass die Quantität Unmittelbarerweise und gegen den einseitigen Betrachtungen des Verstandes[1773] Kontinuität und Diskretion ist. Die Quantität unterscheidet sich von dem Quantum darin, dass in der ersten die Einheit der Kontinuität und der Diskretion etwas Unmittelbares ist, während in der zweiten diese Einheit schon gesetzt ist. Das Quantum ist die erste Negation der Quantität, so wie das Dasein die erste Negation der Qualität war. Innerhalb des Quantums nehmen die Momente der Kontinuität und der Diskretion Form, beziehungsweise Anzahl und Einheit an. Die Einheit dieser beiden Formen ist die Zahl. Innerhalb der Zahl kennzeichnet die interne oder externe Grenze die extensive beziehungsweise intensive Größe. Die erste ist das Korrelat dem Ansichsein in der Kategorie des Daseins, die zweite wiederum ist das Korrelat dem Sein-für-Anderes. Die Tatsache dass die Grenze –im Dasein, die Bestimmtheit– von Etwas von diesem Etwas unterschieden ist oder nicht wird die extensiven von den intensiven Größen –im Dasein, das Ansichsein von dem Sein-für-Anderes– unterscheiden. Das Problem der Grenze in der intensiven Größe lag darin, dass sie nicht ihren Ansprüchen genügen konnte. Diese Ansprüche bestanden darin, dass einerseits, die Grenze etwas Äußerliches und daher etwas Quantitatives ist, und andererseits, dass die Grenze etwas Qualitatives ist. Der Prozess des fortdauernden Scheiterns der Begrenzung, welche die Grenze der intensiven Größe erfuhr, ist der quantitative unendliche Progress oder die so genannte schlechte Unendlichkeit. Wenn die quantitative Unendlichkeit die Form der Verkleinerung (und nicht der Vergrößerung) annimmt, gelangt man zum Unendlichkleinen, eine Erscheinung des Widerspruchs, der in dem schlechten Unendlichen einbezogen war. Die Figur, die diesen Widerspruch durch eine Rückkehrbewegung aufzuheben vermag –wie das Fürsichsein in der Quantität– war der Differentialquotient. In der Tat, so wie das Fürsichsein die mit dem Sein angefangene Rückkehr war, ist das quantitative Verhältnis und in Besonderem der Differentialquotient[1774] die mit der Quantität angefangene Rückkehr. Das Neue ist aber, dass jetzt die Rückkehr innerhalb der Quantität gleichzeitig die Rückkehr der Quantität ist –das heißt, Rückkehr der

[1772] Das heißt, so wie Hegel sagen würde, die Steigerung in der Intensität des Roten ergibt immer wieder Rot. Wir sollten aber vielmehr sagen: die Steigerung der Wellenlänge einer Welle ergibt immer Ausstrahlung.
[1773] Dies führt, wie wir schon wissen, zu den zenonischen Paradoxien, beziehungsweise zu den kantischen Antinomien.
[1774] Das quantitative Verhältnis ist die Aufhebung des Widerspruchs der quantitativen Unendlichkeit, wenn der Prozess in die unendliche Größe führt, während der Differentialquotient die Aufhebung des Widerspruch ist, wenn der Prozess zum Unendlichkleinen führt. Auf jedem Fall haben wir in dieser Arbeit den Zusammenhang zwischen den beiden Figuren gesehen, indem die zweite das Gesetz der Änderung der ersten Figur bestimmte.

mit der Qualität angefangenen Bewegung. Das Setzen dieser Rückkehr findet in der Kategorie des Maßes statt[1775].

Der Haupttext unserer Arbeit wurde zur Darstellung eines für unser Thema sehr relevanten Widerspruchs unterbrochen. Wir haben zwar in Kapitel 2 eine systematische Darstellung der zenonischen Paradoxien erbracht. Diese Systematisierung der vier Paradoxien bestand darin, dass diese auf Grund der folgenden zwei Kriterien geordnet wurden:

1) Die Kontinuität oder Diskretion des raumzeitlichen Mediums, in welchem die Paradoxien überhaupt erst definierbar sind.

2) Paradoxien der Bewegung überhaupt oder Paradoxien der Bewegung in Bezug auf andere Bewegte[1776].

Diese Einteilung der Paradoxien wird in folgender Tabelle zusammengefasst:

	Bewegung überhaupt	relative Bewegung
Diskret	*Paradoxon des Pfeils*	*Paradoxon des Stadiums*
Kontinuum	*Paradoxon der Dichotomie*	*Paradoxon von Achilles*

In dieser Tabelle bezeichnen wir mit „Paradoxon des Pfeils“ das Paradoxon, in welchem Zenon nach dem *Zustand* der Bewegung oder Ruhe eines Pfeils in einem Augenblick fragte[1777]. Das „Paradoxon des Stadiums“ war dasjenige, in welchem zwei Körper antiparallel gegen sich und parallel gegen einen in Ruhe befindenden dritten Körper bewegen[1778]. Das „Paradoxon der Dichotomie“ beruht auf der Notwendigkeit, dass erst die halbe Strecke durchlaufen werden muss, bevor man die ganze Strecke durchläuft[1779]. Endlich, das „Paradoxon von Achilles“ behauptet die Unmöglichkeit für den Verfolger, den langsameren Verfolgten einzuholen, wenn diesem ein beliebiger räumlicher oder zeitlicher Vorteil zugestanden wird[1780].

Das Wichtigste für uns war es zu zeigen, dass die Wurzel der Paradoxien die Einseitigkeit des doppelten –Kontinuums- und Diskretion– Aspekt der Quantität lag. Die Paradoxien wurden so in die Bewegung der *Wissenschaft der Logik* miteinbezogen. Auf dieser Weise wurde die Einseitigkeit als ein dem Verstand eigenes Stadium identifiziert. Die Vernunft verlangte gerade die Aufhebung dieser Einseitigkeit. Diese Aufhebung wird, im letzten Instanz, durch den Differentialquotient ermittelt. In dieser Figur wird die diskrete und kontinuierliche Seite sowohl des Raumes als auch der Zeit verwahrt -unter der Figur des Unendlichkleinen– und unter der Figur des Verhältnisses aufgehoben.

Die aristotelische Reaktion auf diese Paradoxien bestand in der Verschiebung auf den Tag, an dem der Widerspruch stattfinden sollte auf *calendas graecas*. Das heißt erstens, dass die einseitige Hypothese der Diskretion des Raumes und der Zeit auf Grund der

[1775] Wir haben eine Zusammenfassung des Kapitels über das Maß im Abschnitt 5.4 dargelegt.
[1776] Das heißt, Paradoxien der Beschleunigung.
[1777] Siehe den Abschnitt 2.1.1.2.1.
[1778] Siehe den Abschnitt 2.1.1.2.2.
[1779] Siehe den Abschnitt 2.1.1.1.1.
[1780] Siehe den Abschnitt 2.1.1.1.2.

aristotelischen Definition des Kontinuums zurückgewiesen wurde[1781]. Aristoteles nimmt aber nicht einfach und allein Partei für das Kontinuum. Aristoteles' Kompromiss zwischen Diskretion und Kontinuität besteht darin, dass die Unteilbarkeit aller kontinuierlichen Größen behauptet wird, aber nur solange diese Behauptung zu keinem Widerspruch führt. Die Form[1782], mit der Aristoteles die dialektische Einseitigkeit der zenonischen Paradoxien aufhebt, ist die Behauptung der unendlichen Teilbarkeit jeder Größe *in potentia*. Die Größe ist *de facto* immer wieder teilbar, aber eben faktisch *noch* nicht geteilt. Die Größe ist andererseits in potentia grenzenlos teilbar und ist in diesem Sinn, kontinuierlich. Für Hegel bedeutet dieser aristotelischen Kompromiss nicht, dass bei Aristoteles der Widerspruch aufgehoben worden ist, sondern die Unendlichkeit *in potentia* ist vielmehr der bloße Ausdruck des Widerspruchs[1783]. In dem übrigen Teil des zweiten Kapitels, haben wir zu zeigen versucht, in welchen Sinn einerseits die Unendlichkeit in potentia mit der Tatsache, dass Etwas für den Verstand ist und, andererseits, die Unendlichkeit in actu damit, dass Etwas für sich ist, verbunden sind.

Der Abschnitt[1784] über den Vergleich des kantischen und hegelschen Zahlbegriff war mit einem Lesevorschlag eröffnet worden, indem wir einen Zahlbegriff bei Hegel verteidigten, der sich nicht auf die natürlichen Zahlen beschränkt. Wir sahen, dass der Hauptunterschied zwischen dem kantischen und dem hegelschen Zahlbegriff in etwas für Kant Unmögliches bestand, nämlich darin, dass der Zahlbegriff bei Hegel nicht auf die Zeit verweist[1785]. Wir haben diesen Unterschied dadurch zu erklären versucht, dass die durch das Moment des Fürsichseins gesetzte Unendlichkeit[1786], indem diese in dem Gleichgewicht zwischen der Attraktion und der Repulsion bestand, bei Hegel einen aktualen Charakter hatte. Wir sahen auch, dass wenn wir die verschiedenen Bedeutungen berücksichtigten, unter denen Kant und Hegel die Begriffe "analytisch" und "synthetisch" benutzen, die Stellungnahme dieser beiden Philosophen sich als weniger voneinander abweichend erwies, als es in der Literatur gerne dargestellt wird. Der Unterschied zwischen den beiden Autoren besteht vielmehr darin, dass für Kant die Zahl immer diese oder jede Zahl ist, während es für Hegel möglich sein wird, über die „totale" Zahl[1787] zu sprechen, das heißt, über den Grund, auf dem diese oder jene Zahl sich allererst definiert.

Innerhalb unseres Kommentar des intensiven Moments der Quantität bei Hegel haben wir eine auf H. Cohen zurückgehende These widerlegt, welche die intensiven Größen Kants mit dem Differential identifiziert. Wir haben die Haltlosigkeit dieser These bewiesen und deuteten auf die Notwendigkeit hin, den Differentialquotienten der dritten Kategoriengruppe Kants zuzuordnen. Da diese unsere These ausführlich zu beweisen außerhalb vorliegender Arbeit lag, haben wir uns in der Einleitung mit einer kurze Andeutung zufrieden gegeben. Der durch den Differentialquotienten ins Spiel gebrachte Verhältnischarakter hat zu dem Inhalt des Abschnitts 3.4 geführt, der von der Analogie zwischen dem Differentialquotienten und dem Strukturbegriff handelt. Innerhalb dieses Abschnittes haben wir unterschieden zwischen dem Verhältnisbegriff der Alten und dem von Lagrange formulierten modernen

---

[1781] Tatsachlich, wenn das Kontinuum (συνεχὲς) dasjenige ist „was die Enden seiner Stücke zur Einheit verschmelzen" (*Phys*. 231a22), dann es kann nicht aus diskreten Teilen bestehen, da sonst „in einem Zeitpunkt sein" „in alle vergangenen und zukünftigen Zeitpunkten sein" bedeuten würde.
[1782] „Aufheben" hier nicht in dem Sinn Hegels, sondern in dem Sinn von „einen Kompromiss finden".
[1783] Entsprechend sind die Unendlichkleinen für Hegel Ausdruck des Widerspruchs, nicht aber dessen Aufhebung.
[1784] Siehe den Abschnitt 3.1.1.1.
[1785] Wir haben, in der Tat, auf Grund des Beispiels "7+5=12"gesehen, was dieses „Verweisen" auf die Zeit bei Kant bedeutete.
[1786] Diese Unendlichkeit war die Basis der Quantität.
[1787] Und nicht einfach der Zahlbegriff.

Verhältnisbegriff, mit dem wir uns in Kapitel 7 *in extenso* beschäftigt haben. Einer Arbeit von Deleuze folgend, wir haben die ersten "imaginäre Verhältnisse" und die von Lagrange "symbolische Verhältnisse" genannt. Dieser Unterschied knüpfte außerdem an den im Abschnitt 4.1.1 behandelten Unterschied zwischen dem Verhältnis, mit dem man ein Zahl ausdrückt, und dem Differentialverhältnis, dem symbolischen Verhältnis, an.

Der Abschnitt über den Dialog zwischen Hegel und den Begründern der Analysis eröffneten wir[1788] mit einer Studie, in welcher wir zu zeigen versuchten, wie die verschiedenen Mathematikern auf den Widerspruch reagierten, der durch die Unendlichkleinen evoziert worden war. Denjenigen Mathematikern[1789], welche, um sich gewissen Schwierigkeiten zu entziehen, Zuflucht zu den Differentialquotienten nahmen, standen die gegenüber, welche den Widerspruch der Unendlichkleinen damit zu überwinden trachteten, dass sie den Grenzübergang vollzogen[1790]. Während erstere Mathematiker den Widerspruch akzeptierten –sei es, um die Unendlichkleinen anzuwenden oder sei es, um sich gegen sie zu positionieren–, der sich in der Formel: „Das, was kleiner als jede gegebene Größe ist" ausdrückt, vollzog die zweite Gruppe von Mathematikern den Grenzübergang des Differentials, indem sie es in diese Formel umformten: „Das, was kleiner als alle Größen ist". Innerhalb dieser Zweiteilung ist Hegel der ersten Gruppe zuzuordnen. Hiermit haben wir in der Philosophie Hegels ein Element gefunden, dass außerhalb des Modernitätsprojekts lag, und das die hegelsche Philosophie der kritischen Philosophie näher brachte[1791].

Der erste Abschnitt[1792] handelte von dem Dialog zwischen Hegel und Newton[1793] und von einem von Newton in den *Principia* begangenen Fehler. Dieser Fehler wird von Hegel benutzt, um im Calculus die Vernachlässigung der Unendlichkleinen höherer Ordnung zu kritisieren. Der zweite Abschnitt[1794] war einer triftigen Kritik Hegels an Newton gewidmet, wo dieser eine unrichtige Darstellung des Produkts $(x+dx)(y+dy)$ benutzte, um die Unendlichkleinen höherer Ordnung $dx\cdot dy$ nicht vernachlässigen zu müssen. In dem Teil[1795], in dem wir uns mit dem Begriff der verschwindenden Größe beschäftigten, hoben wir die Gedankenstellung von Hegel mit dem *Werdenscharakter* derselben hervor, obwohl unser Text klar gemacht haben sollte, dass bei Hegel dieses *Werden* etwas streng Logisches bezeichnete. Wir könnten daher behaupten, dass das *Werden* der verschwindenden Größen etwas Konkreteres war als das *Werden* am Anfang der *Logik*, und aus diesem Grund war jenes nach diesem gesetzt worden. Der in Hegels Sinne spekulative Begriff, den wir in der Arbeit von Newton fanden, war der von den „letzten und ersten Verhältnissen". Der nächste Abschnitt handelte von diesem Begriff[1796]. Am Anfang dieses Abschnitts haben wir die für das Verständnis des Calculus wichtige Unterscheidung zwischen der Gleichheit zweier sich nähernder Größen, und das letzte Verhältnis der Gleichheit skizziert. Diese letzte Gleichheit wird diejenige sein, die Newton, mit einigem Wanken, in den *Principia* benutzt und die die Wichtigkeit ausdrückt, die darin besteht, verschwindende Prozesse innerhalb eines

[1788] Siehe den Kapitel 4.
[1789] Zu dieser Gruppe gehörten die meisten der betrachteten Mathematiker.
[1790] Zu dieser Gruppe gehörten Euler und die Mathematiker der "Non- Standard- Analysis". Es ist wahr, dass Euler, insofern er unfähig war seinen Entwurf zu formalisieren, zu einer Unterscheidung Zuflucht nahm – nämlich zu der Unterscheidung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Vergleich–, die der ersten Gruppe eigentümlich ist, um den Calculus mit „Nichtsen" verständlich zu machen.
[1791] Die Stellungnahme der modernen Mengenlehre ist in dieser Hinsicht nicht eindeutig. Einerseits leugnet diese Wesen wie „die größte der natürlichen Zahlen". Andererseits spricht diese Theorie über die Mächtigkeit unendlicher Mengen, indem sie dafür eine Relation, die bijektive Abbildung, benutzt.
[1792] Siehe den Abschnitt 4.2.3.1.1.
[1793] Vgl. den Abschnitt 4.2.3.
[1794] Siehe den Abschnitt 4.2.3.1.2.
[1795] Siehe den Abschnitt 4.2.3.2.
[1796] Siehe den Abschnitt 4.2.3.3.

Verhältnisses begreifen zu müssen. Wir zeigten ferner die *reductio ad absurdum*, die in dem ersten und grundlegenden Lemma des ersten Abschnitts über die Methode der ersten und letzten Verhältnisse vorausgesetzt war. Hiermit haben wir das newtonsche Argument als eine Umkehrung der zenonischen Argumentation für die Dichotomie interpretiert. Der letzte Teil dieses Abschnitts über Newton war einem Fehler Hegels gewidmet, in welchem dieser Newton zu Unrecht die Behauptung der Gleichheit zwischen der *Sinus versus* einer Bahn, der Tangente, die Diagonale und eines Segments dieser Bahn zuschrieb. Wir sahen, dass der Grund dieser falschen Zuschreibung nicht ein technischer[1797] sondern ein begrifflicher war und verweisen den Leser dazu auf Abschnitt 8.4. vorliegender Arbeit. In jenem Abschnitt 8.4 sahen wir außerdem, warum die Kritik Hegels trotzdem nicht völlig von der Hand zu weisen war[1798]. Diese Tatsache bot uns die Gelegenheit, eine interessante Analogie zwischen der Methode der letzten Verhältnisse Newtons und einer Stelle in Platons *Parmenides* zu zeichnen, mit deren Hilfe wir zu zeigen versuchten, inwiefern es richtig ist, über „Werden“ zu sprechen, wenn man die verschwindende Größen vor Augen hat.

Der Abschnitt über Carnot[1799] teilten wir in zwei Teile. In dem ersten wurde die Grundlage der Interpretation des Calculus als einer Art von Fehlerkompensation dargestellt. Hegel bekämpft diese Interpretation, die bereits bei Leibniz und Lagrange angedeutet ist, indem er als Gefechtspartner Lazare Carnot wählte, bei welchem jene Interpretation in Reinkultur vorlag. Wir beendeten diesen Teil mit einer Transformation der Fehlerkompensationsinterpretation in die Sprache des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten. Mit dieser Umformung kam der spekulative Grund der carnotschen Fehlerkompensationsinterpretation zum Vorschein. In dem zweiten Teil des Abschnitts über Carnot haben wir uns mit dem Legitimationswerkzeug beschäftigt, das seit Leibniz die Grenzübergänge zwischen den homogonen Größen zu rechtfertigen hatte. Wir sahen, dass das „Kontinuitätsgesetz“[1800] eine Kontinuität der Ursachen –der Differenzen– erforderte, um so die Kontinuität der Wirkungen –der Differentialen– in den homogonen Größen behaupten zu können[1801].

Lagrange war derjenige Autor, mit dessen Arbeit Hegel sich am meisten identifizieren ließ. Hegel begrüßt das Projekt eines von den Unendlichkleinen befreiten Calculus des italienischen Mathematikers. Wir sahen, dass Lagrange vom Begriff der analytischen Funktion ausging. In diesem Begriff wurden die Glieder der Potenzreihe in einem Algorithmus aufgenommen, in dem ein Teil von dem Zuwachs abhing, und der andere Teil nicht. Die Unabhängigkeit dieses letzten Teils von dem Funktionszuwachs gewährleistete, dass die Ableitungsfunktion ungleich Null sein könnte wenn –in den Worten von Newton ausgedrückt– die Seiten des Quotienten verschwanden. Die algorithmische Form, die Lagrange seiner Funktion gab, befähigte ihn außerdem dazu, die Differentialfunktion als eine von der ursprünglichen Form abgeleitete Funktion zu betrachten. Die Analysis von Lagrange zeigte sich als eine *algebraisierte* Analysis, in welcher die Unendlichkleinen höherer Ordnung nicht aufgrund ihrer relativen Kleinheit –das heißt, aufgrund quantitativer Argumente–, sondern aufgrund der Tatsache, dass sie Teil gewisser Verhältnisse sind oder nicht –das heißt, aufgrund qualitativer Argumente– weggelassen werden könnten. Dies ist einer der Gründe

[1797] Tatsachlich dachte Hegel, dass Newton den *Sinus versus* mit der Zentrifugalkraft und die Tangente mit der Zentripetalkraft identifizierte und demzufolge verlangt die Gleichheit dieser beiden Kräfte die Gleichheit dieser beiden Vektoren.

[1798] Das heißt, wir sahen, in welchen Sinne bei Newton „bei Nacht alle Kühe schwarz sind“.

[1799] Siehe den Abschnitt 4.2.4.

[1800] Dieses Gesetz wird von Hegel akzeptiert.

[1801] Auf dieser Weise war der Differentialquotient ein weiterer Fall des Quotienten mit endlichen Differenzen, und daher gab es keinen Grund, das Verschwinden der Seiten zu befürchten.

sein, warum Hegel mit der Methode von Lagrange sympathisiert. Der zweite große Erfolg[1802] von Lagrange lag in der Trennung des Calculus in einen Syntaxteil und in einen Semantikteil. Damit vermied Lagrange, Elemente mit anschaulichen Inhalt in den Calculus hineinzutragen, und stellte stattdessen den Calculus rein formal dar. Zum Schluss zeigten wir die Ableitung des lagrangeschen Restgliedes. Da haben wir hervorgehoben, dass dieser Rest in der Darstellung der Funktionen benutzt wird, und nicht, wie einige Autoren behaupten, dazu gedacht war, die Ableitung selbst zu berechnen. Hiermit blieb der lagrangesche Kalkül der abgeleiteten Funktionen von Hegels Kritik quantitativer Argumente in der *Wissenschaft der Logik* unberührt. Am Ende des Abschnitts über Lagrange haben wir gesehen, wie den die im ersten Teil der *Théorie des Fonctions Analytiques*[1803] dargestellten Kalkül mit geometrischem und physikalischem Inhalt füllte.

Der letzte Teil dieses Kapitels stellte dem hegelschen Begriff des Differentialquotienten den nach Hegel entwickelten Auffassungen entgegen. Zu diesem Zweck haben wir die Werke der zwei wichtigsten nachhegelianischen Begründer der Infinitesimalrechnung, Cauchy[1804] und Weierstraß[1805], einer Betrachtung unterzogen. Wir haben gesehen, in welchem Maße die *epsilontische* Definition des Differentials bei Cauchy eine *Entkinematisierung* der Grundbegriffe der Calculus mit sich brachte. Wir sahen auch, dass es möglich war, diese Auffassung des Differentialquotienten und das in der *Wissenschaft der Logik* entwickelte Programm miteinander in Einklang zu bringen. Wir haben sogar gezeigt, wie Hegel –hier von einigen Kritiker falsch interpretiert– die Vorstellungen der Bewegung aus dem Calculus ablehnte. Am Ende dieses Kapitels[1806] haben wir die Missverständnisse gezeigt, auf denen die Kritik des berühmte von diesen Kritikern, nämlich Bertrand Russells, beruhte.

Der zweite Teil dieser Arbeit ging von dem in dem ersten Teil erlangten Begriff des Differentials aus. In dem ersten Kapitel haben wir die wichtigsten Etappen der Entstehung des Integral- und Ableitungsbegriffs bei Newton überschaut. Die Auswahl der Stellen von Newton und Wallis warf ein neues Licht auf den Differentialquotienten. In der *Arithmetica Infinitorum* benutzt Wallis zum ersten Mal Ausdrücke mit Verhältnischarakter. Die rohe Form, in welcher Newton sich mit dem Quadraturproblem auseinandersetzte, ermöglichte uns die Wichtigkeit des Prinzips der Homogenität für den Calculus einzuschätzen. Dieses Prinzip machte es möglich, Volumina durch Flächen und Flächen durch Strecken auszudrücken. Das Problem der Quadratur entstand immer dann, wenn die durch eine Kurve begrenzte zweidimensionale Fläche zu quadrieren war. Die Funktion einer Parabel beispielsweise brachte drei Dimensionen ins Spiel, und würde, wenn es kein Homogenitätsprinzip gäbe, die Darstellung im dreidimensionalen Raum erforderlich machen. Die Quadratur eines Polynoms eines bestimmten Grades, der gleich oder größer als die Dimension des Raumes ist, in welcher es dargestellt wird, besteht gerade darin, die von diesem Polynom abhängige Funktion zu finden, deren Darstellung sich in einem Raum der gleichen Dimension vollzieht wie der Grad der Kurve. Das Homogenitätsprinzip ermöglichte die Behauptung, dass sowohl das Volumen womit man quadrierte –etwa das durch eine Pyramide ausgedrückte Volumen einer Parabel–, als auch die quadrierte Fläche –das heißt die in zwei Dimensionen dargestellte

[1802] Siehe den Abschnitt 4.2.5.3.
[1803] Es ist vielleicht wichtig, hier darauf aufmerksam zu machen, dass diese Trennung zwischen Syntax und Semantik bei Lagrange nicht mit der Behauptung gleichbedeutend ist, dass die Aussagen der Mathematik tautologisch seien. Dieser tautologische Charakter impliziert eine absolute Durchsichtigkeit der Sprache der Wissenschaft gegen die Empirie, die sich daher mit der „Sache an sich“ identifizieren ließe. Das heißt, es ist wichtig das Projekt von Lagrange nicht mit dem „logizistischen Programm“ zu verwechseln.
[1804] Siehe den Abschnitt 4.3.1.
[1805] Siehe den Abschnitt 4.3.2.
[1806] Siehe den Abschnitt 4.3.3.

Fläche der Parabel– etwas Gemeinsames haben: dass beide Größe waren[1807]. Wir sahen auch, wie wichtig die Einführung der Zeit als unabhängiger Variable für den Calculus war. Diese uniforme Zeit erlaubte es zu behaupten, dass die Quadratur einer Fläche nichts anderes als das Finden des Nachfüllungstakts ihres entsprechenden Volumens in dieser uniformer Zeit war. Im Abschnitt 6.3.5 haben gesehen, dass die Spüren dieser Idee nach Barrow führten. Der Rahmen oder das Verhältnis, worauf den Nachfüllungstakts (im Falle der Integralrechnung) oder die Geschwindigkeitsänderung (im Falle der Differentialrechnung) Bezug nahm, war auf der Basis einer uniformen Zeit aufgebaut. Diese Tatsache drückte die Notwendigkeit aller Änderungen aus, auf etwas zu bezogen zu sein, dessen Änderung uniform war. Auf der Basis dieser uniformen Änderung bestimmte sich sowohl die Funktion als auch ihre Quadratur und ihre Änderungseigenschaften. Wir betrachteten[1808] auch, auf welche Weise Newton sich innerhalb seiner kinematischen Auffassung des Tangenteproblems eines besonderen relationalen Werkzeugs bediente, nämlich des Parallelogramms. Wir sahen im besonderen, dass die mit diesem Werkzeug verbundenen Probleme den Unfähigkeiten der Mathematiker und nicht der Unfähigkeit des Werkzeugs selbst zuzuschreiben waren. Am Ende dieses Abschnitts zeigten wir, dass schon seit die erste Formulierungen die Fluxion immer in Verbindung mit einer anderen Fluxion ins Leben kam. Die Fluxion tauchte immer innerhalb eines Fluxions- Kontextes, in welchem sie ihren Sinn bekam.

In Abschnitt 7 haben wir uns mit der analytischen Formulierung der Mechanik von Lagrange beschäftigt. Wir sahen insbesondere, dass diese Formulierung ohne den in dem ersten Teil unserer Arbeit deduzierten Begriff des Differentialquotienten undenkbar gewesen wäre. Wir betrachten, in welchem Maß das in dem analytischen Projekt unterstellte Prinzip – nämlich das Prinzip der virtuellen Verrückungen- auf von Aristoteles und Kant gezogene Unterscheidungen Bezug nahm: Der Unterscheidung zwischen der Ursache als anwesend und abwesend bei Aristoteles die Unterscheidung zwischen logischer und realer Entgegensetzung bei Kant. Wir zeigten, dass Galilei –in der unmittelbare Formulierung– und Lagrange –in der strengen Formulierung– als Erste dieses Prinzip ausgesprochen hatten[1809]. Der Kern dieses Kapitels zeigte, inwiefern dieses Prinzip Gleichgewichtszustände in Ungleichgewichtszustände aufzuheben vermag. Wir beendeten dieses Kapitel mit dem Prinzip von d'Alembert[1810]. Hiermit hatten wir den Boden für das nächste Kapitel bereitet.

Kapitel 8 war mit Kapitel 7 in Beziehung gesetzt worden, indem es die Äquivalenz zwischen dem Inhalt eines *Gedankenexperimentes* von Einstein, das zur Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie führte, und dem Prinzip von d'Alembert zeigte. Um diese Äquivalenz zu verstehen, war es erforderlich, die unterschiedliche Problemstellung einerseits der huygensschen, andererseits der newtonschen Behandlung der Kreisbewegung zu analysieren. Wir sahen mithin, dass auf Grund verschieden vorausgesetzter Bezugsystems, die beiden Autoren mit verschiedenen Kräfte arbeiten – Huygens mit der Zentrifugalkraft, Newton mit der Zentripetalkraft–, und dass dieser Unterschied mit dem Irrtum oder Erfolg dieser oder jener Theorie nichts zu tun hatte[1811]. Wir sahen auch, dass das in der Beschreibung der Phänomene benutzte Bezugsystem die Anwendung der einen oder der anderen Kraft erforderte. Es war gerade die Verkennung dieser Tatsache, die Hegel zu der falschen Behauptung einer „absoluten" Vertauschbarkeit dieser Kräfte führte. Dies implizierte

[1807] Siehe den Abschnitt 6.2.3.
[1808] Siehe den Abschnitt 6.3.7.
[1809] Und nicht, wie einige Wissenschaftshistoriker behaupten, Jordanus Nemorarius. Das Interesse an dem Problem der Urheberschaft des Prinzip ist nicht in bloßer Neugier begründet, sondern war, was in solchen Fällen oftmals viel wichtiger ist, mit dem Verständnis eines Begriffs, in unserem Fall des „Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten", verbunden.
[1810] Das heißt, die statischen Zustände innerhalb der dynamischen.
[1811] Auch nicht damit, dass der eine über „wirkliche" Kräfte, der andere aber über Scheinkräfte sprach.

wiederum, dass der Verhältnischarakter der Differentialquotienten nicht nur etwas Innerliches war, sonder dass dieser Charakter –in seinen Erscheinungsformen „Zentrifugalkraft“ und „Zentripetalkraft“– auch dem Bezugsystem zuzusprechen war, mit dem die Phänomene beschrieben worden waren.

Das Problem der Bewegung spielte eine notorische Rolle in unserer Arbeit. Einerseits sahen wir anhand der Paradoxien von Zenon, dass der Verstand sich in Widersprüche verfing, wenn er die Bewegung zu verstehen versuchte. Erst der Calculus ermöglichte diese Widersprüche in einem ganz bestimmten Sinne aufzuheben. Andererseits kam es vor, dass einige Mathematikern in der Darstellung der Fundamentalbegriffe dieses Calculus zu von Hegel kritisierten kinematischen Ideen Zuflucht nahmen. Diese beide Punkten machten es notwendig, den Bewegungsbegriffs, mit dem Hegel operierte, genauer zu analysieren. Wir sahen mithin, dass dieser Begriff sowohl dem im Calculus benutzten kinematischen Begriff als auch dem durch den Verstand benutzten Bewegungsbegriff genau entgegensetzt war. Aus diesem Grund haben wir im Kapitel 9 eine Exkursion in die *Naturphilosophie* Hegels gemacht, wo wir der Deduktion der Kategorien von Zeit, Raum, Materie und Bewegung folgten.

BIBLIOGRAFÍA

A. FUENTES

d'Alembert, J.

[1758]: *Traité de Dynamique*, Paris, 1758.

Apollonius

[1990]: *Conics*. *Books V to VII. The Arabic translation of the lost Greek original in the version of the Banū Mūsā*, New York, 1990.

Aristóteles

[1936]: *Physics*, (Texto, introducción y comentario de W.D. Ross), Oxford, 1936.

[1949]:*Categoriae et Liber de Interpretatione*, (edición de L. Minio-Paluello), Oxford, 1949.

[1966a]: *Metaphysics*, (Texto, introducción y comentario de W.D. Ross), Vol. 1, Oxford, 1966.

[1966b]: *Metaphysics*, (Texto, introducción y comentario de W.D. Ross), Vol. 2, Oxford, 1966.

[1970]: *Aristotelis Opera*, Vol. 2, Berlín, 1970.

[1987]: *Physik*, (traducción, introducción y notas de Hans Günter Zekl), Vol 1, Hamburg 1987.

[1996]: *Física*, (trad. de J. L. Calvo Martínez), Madrid, 1996.

Arquímedes

[1972]: *Opera Omnia*, Vol. 2, (editado por L. Heibert), Stuttgart, 1972.

[2002]: *The Works of Archimedes*, (editado por T. L. Heath), New York, 2002.

Barrow, I.

[1674]: *Lectiones Opticae & Geometricae*, London, 1674.

[1916]: *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, (trad. introducción y notas de J.M Child), Chicago y London, 1916.

Cantor, G.

[1883] : *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.

[1890] : *Zur Lehre vom Transfiniten*, Halle, 1890.

Carnot, L.

[1813] : *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, Paris, 1813.

Cauchy, A.L.

[1899] : *Résumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul infinitesimal*, en Œuvres Serie 2 Vol. 4, Paris, 1899.

[1899]: *Leçons sur le Calcul différentiel*, en Œuvres Serie 2 Vol. 4, Paris, 1899.

[1958]: *Sur le développement des fonctions en séries et sur l'intégration es équations différentielles ou aux différences partielles*, en Œuvres Serie 2 Vol. 2, Paris, 1958.

Dedekind, R.

[1965] : *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Berlín, 1965.

Descartes, R.

[1637] : *Discours de la méthode* [...]. *Plus la Dioptrique. Les météores. Et la Géométrie qui sont des essaies de cette Méthode*, Leyde, 1637.

[1644]: *Principia Philosophiæ*, Amsterdam, 1644.

[1659-1661]: *Geometria*, Amsterdam, 1659-1661.

[1668] : *Traite de la Mechanique*, Paris, 1668.

[1975] : *Correspondance,* en *Oeuvres* Vol. II, Paris,1975.

Diogenes Laertios

[1999] : *Vitae Philosophorum*, Stuttgart,1999.

Einstein, A.

[1916] : "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" in *Annaler der Physik*, Vol. 49, 1916.

[1917] : *Über die spezielle und die allgemeiene Relativitätstheorie. (Gemeinverständlich)*, Braunschweig, 1917.

[1969] : *Grundzüge der Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1969.

[1996] : *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 6, Princeton, 1996.

[2002] : *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 7, Princeton, 2002.

Euclides

[1996] : *Elementos,* (traducción y notas de M.L. Puertas Castaños), Madrid, 1996.

Euler, L.

[1748] : *Introduction in Analysin Infinitorum*, Lausanne, 1748.

[1755] : *Institutiones Calculi Differentialis,* St. Petersburg, 1755.

[1770]: *Institutiones calculi integralis,* Vol. 3, St. Petersburg, 1770.

[1913] : *Opera Mathematica*, Serie 1, Vol. 10, Berlin, 1913.

Fermat, P.

[1891] : *Methodus ad Disquirendam maximam et minimam*, en Œuvres Vol. 1, Paris, 1891.

Fichte, J.G.

[1981] : *Die Bestimmung des Menschen*, en Gesamtausgabe I.6, Stuttgart-Bad Cannstatt, 1981.

Fourier, J.

[1822] : *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

[1890] : *Mémoire sur la statique contenant la Démostration du Principe des vitesses virtuelles et la Théorie des Moments*, in *Œuvres* Vol. 2, Paris, 1890.

Galileo, G.

[1898] : *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze*, in *Opere*, Vol. 8, Firenze, 1898.

[1943]: *Mecanica*, in *Opere* Vol. 2, Milano, 1943.

Gauss, C. F.

[1900] : *Werke*, Vol. 8, Göttingen, 1900.

Hegel, G.W.F.

[II] : *Jenaer Schriften 1801-1807*, en Werke 2, Frankfurt am Main, 1986.

[V] : *Wissenschaft der Logik I*, en Werke 5, Frankfurt am Main, 1986.

[VII] : *Grundlinien der Philosophische des Rechts*, en Werke 7, Frankfurt am Main, 1986.

[VIII] : *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften 1830 Erster Teil*, en Werke 8, Frankfurt am Main, 1986.

[IX] : *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften 1830 Zweiter Teil*, en Werke 9, Frankfurt am Main, 1986.

[X] : *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften 1830 Dritter Teil*, en Werke 10, Frankfurt am Main, 1986.

[XI] : *Berliner Schriften 1818-1831*, en Werke 11, Frankfurt am Main, 1986.

[XII] : *Vorlesungen über die Philosophie der Geschichte*, en Werke 12, Frankfurt am Main, 1986.

[XVIII] : *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie I*, en Werke 18, Frankfurt am Main, 1986.

[XIX] : *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie I*, en Werke 19, Frankfurt am Main, 1986.

[XX] : *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie II*, en Werke 20, Frankfurt am Main, 1986.

[1956] : *Grundlinien der Philosophie des Rechts*, (editado por J. Hoffmeister), Berlin, 1956.

[1968] : *Jenaer kritische Schriften*, en Gesammelte Werke IV, Hamburg, 1968.

[1970] : *Vorlesungen über die Philosophie der Geschichte*, en Werke 12, Frankfur am Main, 1970.

[1971] : *Jenaer Systementwürfe II*, en Gesammelte Werke VII, Hamburg, 1971.

[1976] : *Jenaer Systementwürfe III*, en Gesammelte Werke VIII, Hamburg, 1976.

[1978]: *Wissenschaft der Logik. Das Sein (1812)*, en Gesammelte Werke XI, Hamburg, 1978.

[1979] : *Les Orbites des Planètes (Dissertation de 1801)*, (Traducción, introducción y comentario a cargo de F. De Gandt), Paris, 1979.

[1980] : *die Phänomenologie des Geistes*, en Gesammelte Werke IX, Hamburg, 1980.

[1981] : *Wissenschaft der Logik. Die Lehre vom Begriff (1816)*, en Gesammelte Werke XII, Hamburg, 1981.

[1985] : *Wissenschaft der Logik. Die Lehre vom Sein (1832)*, en Gesammelte Werke XXI, Hamburg, 1985.

[1986] : *Dissertatio Philosophica de Orbitis Planetarum*, (traducción, introducción y comentario de W. Neuser), Weinheim, 1986.

[1992] : *Vorlesungen über Logik und Metaphysik*, en Vorlesungen Vol. 11, Hamburg, 1992.

[1994] : *La théorie de la mesure*, (traducción y comentario de A. Doz), Paris, 1994.

[1997] : *Enciclopedia de las Ciencias Filosóficas en compendio*, (edición, introducción y notas de Ramón Valls Plana), Madrid, 1997.

[1998] : *Schriften und Entwürfe (1799-1808)*, en Gesammelte Werke V, Düsseldorf, 1998.

[1999] : *Fenomenología del Espíritu*, (traducción de W. Roces), Madrid, 1999.

[2000] : *Enzyklopädie der Philosophischen Wissenschaften im Grundrisse (1817)*, en Gesammelte Werke XIII, Hamburg, 2000.

[2001] : *Vorlesungen über die Logik*, en Vorlesungen Vol. 10, Hamburg, 2001.

[2002] : *Vorlesung über Naturphilosophie Berlin 1821/22*, (editado por G. Marmasse y T. Posch), Frankfurt am Main, 2002.

Heine, E.

[1872] : "Die Elemente der Functionenlehre" in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 74, Berlin, 1872.

Hobbes, T.

[1656] : *Six lessons to the professors of mathematiques, one of geometry, the other of astronomy: in the chaires set up by Sir Henry Savile in the University of Oxford*, London, 1656.

[1845] : *The English Works*, Vol. 7, London, 1845.

Hölderlin, J.C.F.

[1998] : *Theoretische Schriften*, Hamburg, 1998.

Huygens, C.

[1929] : *de Vi Centrifuga*, in *Oeuvres* Vol. 16, La Haye, 1929.

Jacobi, C.G.

[1996] : *Vorlesungen über analytische Mechanik*, Braunschweig, 1996.

Kant, I.

[A] : *Kritik der reinen Vernunft*, 1ª Ed.

[B] : *Kritik der reinen Vernunft*, 2ª Ed.

[PM] : *Immanuel Kant´s Vorlesungen über die Metaphysik,* Erfurt, 1821.

[Ak.II] *Kant´s Werke*, Ed. *Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Vol. 2, Berlin, 1912.

[Ak.IV] *Kant´s Werke*, Ed. *Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Vol. 4, Berlin, 1911.

[Ak.VI] *Kant´s Werke*, Ed. *Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Vol. 6, Berlin, 1907.

[Ak.VIII] *Kant´s Werke*, Ed. *Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Vol. 8, Berlin, 1923.

Lagrange, J.

[1788] : *Méchanique Analitique*, Paris, 1788.

[1797] : *Théorie des fonctions analytiques,* Paris, 1797.

[1806] : *Leçons sur le Calcul des fonctions*, Paris, 1806.

[1869] : "Sur une nouvelle spèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables" in Œuvres Vol. 3, Paris, 1869.

[1877] : *Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, en Œuvres Vol. 7, Paris, 1877.

[1881] : *Théorie des Fonctions Analytiques*, en Œuvres Vol. 9, Paris, 1881.

[1884] : *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, en Œuvres Vol. 10, Paris, 1884.

[1888] : *Méchanique Analitique*, Paris, 1888.

Leibniz, G. W.

[1846] : *Historia et Origo calculi differentialis*, (editado por C.I. Gerhardt), Hannover, 1846.

[1858] : *Mathematische Schriften*, (editado por C.I. Gehardt), Vol. 5, Halle 1858.

[1859] : *Mathematische Schriften*, (editado por C.I. Gehardt), Vol. 4, Halle 1859.

[1863] : *Mathematische Schriften*, (editado por C.I. Gehardt), Vol. 7, Halle 1863.

[1887].: *Philosophische Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, (editado por C.I. Gehardt), Vol. 7, Berlin, 1887.

[1996] : *Haupschriften zur Grundlegung der Philosophie*, Vol. 1, Hamburg 1966.

[1982] : *Allgemeine Untersuchungen über die Analyse der Begriffe und Wahrheiten*, (edición bilingüe, traducción y comentario de F. Schupp), Hamburg, 1982.

[1989] : *Naissance du calcul différentiel. 26 articles des Acta eruditorum*, Paris, 1989.

[2004] : *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*, (traducción y notas a cargo de M. Parmentier, edición del texto a cargo de E. Knobloch), Paris, 2004.

[2008] : *Sämtliche Schriften und Briefe*, séptima serie, Vol. 4, 2008.

L'Huilier, S.

[1795] : *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*, Tubingae, 1795.

Marx, K.

[1969] : *Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie*, en MEW, Vol. 23, Berlin, 1969.

[1983] : *"Das Kapital" und Vorarbeiten*, en MEGA, Vol. 5, 2ª parte, Berlin, 1983.

[1987] : *"Das Kapital" und Vorarbeiten*, en MEGA, Vol. 6, 2ª parte, Berlin, 1987.

Newton, I.

[1686] : *Philosophiea naturalis* p*rincipia mathematica*, 1ª Ed., London, 1686.

[1714] : *Philosophiea naturalis* p*rincipia mathematica*, 2ª Ed., Amstaelodami, 1714.

[1726] : *Philosophiea naturalis* p*rincipia mathematica*, 3ª Ed., London, 1726.

[1736] : *A Treatise of the Method of fluxions and Infinites series*, London, 1736.

[1960] : *The correspondence of Isaac Newton*, Vol. 2, Cambridge, 1960.

[1967] : *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. I, Cambridge, 1967.

[1968] : *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. II, Cambridge, 1968.

[1969] : *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. III, Cambridge, 1969.

[1974] : *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. VI, Cambridge, 1974

[1981] : *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. VIII, Cambridge, 1981.

[1999] : *The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Traducción e introducción de I. B. Cohen y A. Whitman, London, 1999

Platón

[1991] : *Sophistes, Politikos*, en *Sämtliche Werke*, Vol. 7, edición bilingüe, basada en la traducción alemana de F. Schleiermacher, Frankfurt am Main, 1991.

Regiomontanus, J.

[1967] : *On Tringles*, Madison, 1967.

Riemann, B.

[1854] : Ü*ber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, in Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Vol. 13, Göttingen, 1854.

Roberval, G.P.

[1693] : "Observations sur la composition des Mouvements, et sur le moyen de trouver les Touchantes des lignes courbes", in *Divers Ouvrages de M. de Roberval*, pp. 67-111, Paris, 1693.

Robinson, A.

[1996] : *Non-standard Analysis*, Princeton, 1996.

Saussure, F.

[1972] : *Cours de linguistique générale*, (edición crítica de Tullio de Mauro), Paris, 1972.

Schelling, F.W.J.

[1859] : *Darstellung meines Systems der Philosophie*, en Sämmtliche Werke, Primera parte, Vol. 4, Stuttgart y Ausburg, 1859.

Stevin, S.

[1955] : *The Principal Works of Simon Stevin*, (Ed. por E.J. Dijksterhuis), Vol. I, Amsterdam, 1955.

Wallis, J.

[2004] : *The Arithmetic of Infinitesimals*, 2004.

Weierstraß, K.

[1894] : *Mathematische Werke*, Vol. 1, Berlin, 1894.

[1986] : *Einführung in die Theorie der Analytischen Funktionen. Nach einer Vorlesungsmitschrift von Wilhelm Killing aus dem Jahr 1868*, (Edición de R. Remmert), Münster, 1986.

[1988a] : *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionlehre*, (Edición, comentario y anexo a cargo de R. Siegmund-Schultze), Leipzig, 1988.

[1988b] : *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen. Vorlesung Berlin 1878*, (Edición de P. Ullrich), Braunschweig, 1988.

B. ESTUDIOS

Alonso, M y **Finn**, J.E.

[1970]: *Física*, Vol. 1, México, 1970.

Artmann, B.

[2001]: *Euclid. The Creation of Mathematics*, New York, 2001.

Artola, J.M.

[1972]: *Hegel. La filosofía como retorno*, Madrid, 1972.

Aubenque, P.

[2002]: *Le problème de l'être chez Aristote*, Paris, 2002.

Baron, M. E.

[1969]: *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, 1969.

Bashmarkova, I. G. y **Smirnova** G. S.

[2000] : *The Beginnings and Evolution of Algebra*, Washington, 2000.

Bergmann, L y **Schaefer** Cl.

[1954] : *Lehrbuch der experimentalphysik*, Berlin, 1954.

Berkeley, G.

[1901] : *The Analyst; or a Discourse addresed to an Infidel Mathematician. Wherein it is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis are more distinctly conceived, or* *more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith,* in The Works of George Berkeley, Vol. III, Oxford, 1901.

Berthollet, C.L.

[1802]: *Über die Gesetze der Verwandtschaft in der Chemie,* (trad. introducción, notas y resumen a cargo de E.G. Fischer), Berlin, 1802.

Bertoloni, D.

[1990]: „The Relativization of Centrifugal Force“ in *ISIS*, N. 81, 1990.

Bonsiepen, W.

[1985] : “Hegels Raum-Zeit-Lehre, dargestellt anhand zweier Vorlesungsnachscrifften” in *Hegel Studien*, Vol. 20, 1985.

Bos, H. J. M.

[1974] : “Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus”, in *Archive for History of Exact Sciences,* 11, 1974.

[2001]: *Redefining Geometrical Exactness. Descartes’ Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, New York, 2001.

Boyer, C.B.

[1959] : *The History of the Calculus and its conceptual developemt,* New York, 1959.

[2004]: *History of analytic Geometry,* New York, 2004.

Budó, A.

[1974]: *Theoretische Mechanik*, Berlin, 1974.

Burbidge, J.W.

[1996] : *Real Process: How Logic and Chemistry Combine in Hegel’s Philosophy of Nature,* Toronto, 1996.

Carlson, D. G.

[2007] : *A Commentary to Hegel´s Science of Logic*, New York, 2007.

Cassirer, E.

[1998] : *Leibniz' System in seinen Wissenschaftlichen Grundlagen*, in Gesammelte Werke, Vol. 1, Hamburg, 1998.

Clagett, M.

[1959] : *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, Madison, 1959.

[1968] : *Nicole Oresme and the medieval Geometry of Qualities and Motions*, Wisconsin, 1968.

Cohen, I. B.

[1985] : *The Birth of a new Physics*, London, 1985.

Cohen, H.

[1968] : *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte*, Frankfurt/M, 1968.

Courant, R.

[1969] : *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Berlin, 1969.

Courant, R., **John**, R.

[1989] : *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. 1, New York, 1989.

De Gandt, F.

[1981] : „Duratio, Fluxio, Aequatio: Trois aspects du Temps Newtonien“ in *Archives de Philosophie*, Vol. 44, 1981.

[1985] : „Temps Physique et temps Mathematique chez Newton“ in *Mythes et Represéntations du Temps*, Paris, 1985.

[1995] : *Force and Geometry in Newton´s Principia*, New Jersey, 1995.

Deleuze, G.

[1969] : *Logique du Sens*, Paris, 1969.

[2000] : "Quoi Reconnnait-on le Structuralisme?", en *Histoire de la Philosophie, Idées , Doctrines*, bajo la dirección de F. Châtelet, Vol. VIII, Paris, 2000.

Dieudonne, J.

[1968] : *Calcul Infinitésimal*, Paris, 1968.

[1978] : *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Vol. 1, Paris, 1978.

[1987] : *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Poitiers, 1987.

Dijksterhuis, E.J.

[1956] : *Die Mechanisierung des Weltbildes*, Berlin, 1956.

Dirksen, E.H.

[1827] : Recensión de *"Neue Principien des Fluentencalcüls..."* de W. Spehr y de *"Resumé des Leçons données..."* de L. Cauchy publicado en "Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik", (editado por la *Societät für wissenschaftliche Kritik zu Berlin*), Stuttgart y Tübingen, 1827.

Duhem, P.

[1992] : *L'évolution de la Mécanique*, Paris, 1992.

[1905] : *Les Origines de la statique*, Paris, 1905.

Duque, F.

[1998] : *Historia de la Filosofía Moderna. La era de la crítica*, Madrid, 1998.

[2002] : *La fuerza de la razón. Invitación a la lectura de la « crítica de la razón pura » de Kant*, Madrid, 2002.

Edwards, A.W.F.

[1987] : *Pascal's arithmetical triangle*, London, 1987.

Edwards, C.H.

[1979] : *The Historical Development of the Calculus*, New York, 1979.

Ferrini, C.

[1992] : "Logica e Filosofia della Natura nella *Dottrina dell'Essere* Hegeliana", in *Rivista di Storia della Filosofia*, Vol. 46, 4. Trimestre, Milan, 1991 y Vol. 47, 1. Trimestre, Milan, 1992.

Foucault, M.

[1976] : *Histoire de la sexualité 1. La volonté de savoir*, Ed. Gallimard, 1976.

[2004] : *Geschichte der Gouvernementalität I. Sicherheit, Territorium, Bevölkerung*, Frankfurt am Main, 2004.

Frege, G.

[1988] : *Die Grundlagen der Arithmetik*, Hamburg, 1988.

García Calvo, A.

[1985] : *Razón común. Edición crítica, ordenación, traducción y comentario de los restos del libro de Heráclito*, Madrid, 1985.

[1992]: *Lecturas Presocráticas*, Zamora, 1992.

Goldstein, H.

[2007] : *Classical Mechanics*, Delhi, 2007.

Gómez Pin, V.

[1984] : *Del Calculo diferencial como peldaño para la intelección de la categoría ontológica de Medida (tres notas de la Ciencia de la Lógica)*, San Sebastian, 1984.

Grabiner, J.V.

[1981] : "Changing Attitudes toward Mathematical Rigor: Lagrange and Analysis in the Eighteenth and Nineteenth centuries" in *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, H.N. Jahnke y M. Otte (Eds.), Holland, 1981.

[1990] : *The Calculus as Algebra. J.-L. Lagrange, 1736-1813*, New York & London, 1990.

[2005] : *The Origins of the Cauchy's Rigorous Calculus*, New York, 2005.

Guicciardini, N.

[1999] : *Reading the Principia. The Debate on Newton´s Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge, 1999.

Haas, A.E.

[1914] : *Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung*, Leipzig, 1914.

Heidegger, M.

[1951] : *Kant und das Problem der Metaphysik*, Frankfurt am Main, 1951.

[1984] : *Die Frage nach dem Ding*, Gesamtausgabe Vol. 41, Frankfurt am Main, 1984.

[2002] : *Grundbegriffe der Aristotelischen Philosophie*, Gesamtausgabe Vol. 18, Frankfurt am Main, 2002.

Heinrich, M.

[2005] : *Kritik der politische ökonomie. Eine Einführung*, Stuttgart, 2005.

Henrich, D.

[1978] : "Hegels Logik der Reflexion. Neue Fassung", in *Die Wissenschaft der Logik und die Logik der Reflexion*, (editado por D. Henrich), Bonn, 1978.

Herivel, J.

[1965] : *The Background to Newton´s Principia*, Oxford, 1965.

Hofmann, J.E.

[1949] : *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik*, München, 1949.

Holmes, F. L.

[1998] : *Antoine Lavoisier, the next crucial year, or The sources of his quantitative method in chemistry*, Princeton, 1998.

Hyppolite, J.

[1946] : *Genése et Structure de la Phénoménologie de l'esprit de Hegel*, Paris, 1946.

Ihmig, K. H.

[1989] : *Hegels Deutung der Gravitation*, Frankfurt am Main, 1989.

Jacob, F.

[1970] : *La logique du vivant*, Paris, 1970.

Juschkewitsch, A.P.

[1959] : "Euler und Lagrange über die Grundlage der Analysis" in *Sammelband der zu Ehren des 250. Gebustages Leonhard Eulers*, Berlin, 1959.

Klaucke, A.

[1990] : "Hegels-Lagrange-Rezeption" in *Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert*, Göttingen, 1990.

Klein, F.

[1933] : *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Vol. 1, Berlin, 1933.

Klein, J.

[1936] : "Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra" in *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung B: Studien,* Vol. 3, fascículo 1, pp. 18-105, Berlin, 1934, y fascículo 2, pp.122-235, Berlin, 1936.

[1968] : *Greek Mathematical Thought and the origin of Algebra*, New York, 1968.

Knobloch, E.

[1994] : "The Infinite in Leibniz´s Mathematics-The Historiographical method of comprehension in context" in *Trends in the Historiography of Science,* (Kostas Gavroglu et al. eds.), Dordrecht, 1994.

[1999] : "Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity" in *Archive for History of Exact Sciences,* 54, 1999.

Knopp, K.

[1922] : *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, 1922.

Knorr,W.R.

[1983] : "*La Croix des Mathématiciens": The Euclidean theory of irrational lines* in *Bulletin of the American Mathematical Society*, New Series 9, 1983.

Kopp, H.

[1966] : *Geschichte der Chemie*, Vol. II, Hildesheim, 1966.

Koyré, A.

[1965] : *Newtonian Studies*, Chicago, 1965.

[1971] : *Études d'histoire de la pensée philosophique*, Paris, 1971.

Labarriere, P-J.

[1979] : *La Phénoménologie de l'esprit de Hegel. Introduction à une lecture*, Paris, 1979.

Lacan, J.

[1966] : *Écrits*, Paris, 1966.

Lanczos, C.

[1986] : *The variational principles of mechanics*, New York, 1986.

Laugwitz, D.

[1986] : *Zahlen und Kontinuum*, Zürich, 1986.

Lebrun, G.

[1970] : *Kant et la fin de la métaphysique*, Paris, 1970.

Lévi-Strauss, C.

[1955] : "The Structural Study of Myth" in *Journal of American Folklore*, 78, 1955.

[1962] : *La pensée sauvage*, Paris,1962.

Mach, E.

[1912] : *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt*, Berlin, 1912.

Malet, A.

[1996] : *From Indivisibles to Infinitesimals. Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*, Barcelona, 1996.

Mancosu, P.

[1989] : "The Methaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706" in *Historia Mathematica* Vol. 16 n.3, 1989.

Mansfeld, J.

[2003] : *Die Vorsokratiker*, Vol. II , Stuttgart, 2003.

Marzoa, F.M.

[1973] : *Historia de la Filosofía*, Vol. II, Madrid, 1973.

[1976] : *De la Revolución*, Vigo, 1976.

[1989] : *Releer a Kant*, Barcelona, 1989.

[1991] : *Cálculo y ser (Aproximación a Leibniz)*, Madrid, 1991.

[1992] : *De Kant a Hölderlin*, Madrid, 1992.

[1994] : *Historia de la Filosofía*, Vol. II, Madrid, 1994.

[1995] : *Hölderlin y la lógica hegeliana*, Madrid, 1995.

[1999] : *Heidegger y su tiempo*, Madrid, 1999.

[2004] : "Kant y la mota de polvo", in *LOGOS. Anales del Seminario de Metafísica*, Vol. 37, 2004.

[2005] : *El saber de la comedia*, Madrid, 2005.

[2007] : *Muestras de Platón*, Madrid, 2007.

Masterton, W.L. y **Slowinski**, E.J.

[1997] : *Chemical Principles*, Philadelphia, 1977.

Miguez Barciela, A.

[2008] : *Problemas hermenéuticos en la lectura de la Ilíada*, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona, 2008.

Miller, M.

[1954] : "Isaac Newton- Über die Analysis mit Hilfe unendlicher Reihen" in *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Hochschule für Verkehrwesen Dresden*, 1954, Heft 2.

Moretto, A.

[1984] : *Hegel e la «matematica dell´infinito»*, Trento, 1984.

[1988] : *Questioni di filosofia della matematica nella "Scienza della logica" di Hegel. "Die Lehre vom Sein" del 1831*, Trento, 1988.

Panza, M.

[1989] : *La Statua di Fidia. Analisi filosofica di una teoria matematica: il calcolo delle flussioni*, Milán, 1989.

[1995] : *Da Wallis à Newton: una via verso il calcolo. Quadrature, serie e reppresentazione infinite delle quantità e della forme transcendenti*, en "Geometria, flussioni e differenziali. Tradizione e innovazione nella matematica del Seicento", (Editores: Panza, M. y Roero S.), Napoli, 1995.

[2005] : *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*, Paris, 2005.

Pardo, J.L.

[2001] : *Estructuralimso y Ciencias Humanas*, Madrid, 2001.

Pierobon, F.

[2003] : *Kant et les mathématiques*, Paris, 2003.

Pincherle, S.

[1880] : "Saggio di una introduzione alla Teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass" in *Giornale di Matematiche*, Vol. 18, Napoli, 1880.

Poincaré, H.

[1899] : "L'Oeuvre Mathématique de Weierstrass" in *Acta Mathematica*, Vol. 22, 1899.

Pourciau B.

[2001] : "Newton and the Notion of Limit" in *Historia Mathematica*, Vol. 28, 2001.

Pringsheim, A.

[1900] : "Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes" in *Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschischte der Mathematischen Wissenschaften*, Dritter Folge, Erster Band, Leipzig, 1900.

Pycior, H. M.

[1997] : *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements*, Cambridge, 1997.

Rehm, M.

[1963] : *Hegels spekulative Deutung der Infinitesimalrechnung*, Köln, 1963.

Rodriguez Fraile, J.J.

[2002] : "7+5=12 y Leibniz + Hegel = Kant", Artículo inédito, 2002.

Rosenberger, F.

[1887-1890] : *Geschichte der Physik*, Vol. III, Braunschweig, 1887-1890.

Ruschig, U.

[1997] : *Hegels logik und die chemie*, Bonn, 1997.

[2001] : "Logic and chemistry in Hegel´s philosophy", in *Hyle: an International Journal for Philosophy of Chemistry*, Vol. 7, Karlsruhe, 2001.

Russell, B.

[1920] : *Introduction to mathematical Philosophy*, London, 1920.

[1937] : *The Principles of Mathematics*, London, 1937.

Scholz, E.

[1990] : *Geschichte der Algebra*, Mannheim, 1990.

Schramm, M.

[1962] : *Die Bedeutung der Bewegungslehre des Aristoteles für seine beiden Lösungen der zenonischen Paradoxie*, Frankfurt am Main, 1962.

Schubert, F. T.

[1978] : *Theoretische Astronomie*, Vol. 2, St. Petersburg, 1978.

Schwyzer, E.

[1950] : *Grieschische Grammatik*, Vol. 2., München, 1950.

Sloterdijk, P.

[2000] : *Die Verachtung der Massen. Versuch über Kulturkämfe in der modernen Gesellschaft*, Frankfurt am Main, 2000.

Solis. C. y **Sellés**. M.

[2005] : *Historia de la Ciencia*, Madrid, 2005.

Sommerfeld, A.

[1944] : *Atombau und Spektrallinien*, Vol. 1, Braunschweig, 1944.

[1947] : *Vorlesungen über theoretische Physik*, Vol. 1, Leipzig, 1947.

Stallmach, J.

[1959] : *Dynamis und Energeia. Untersuchungen am Werk des Aristoteles zur Problemgeschichte von Möglichkeit und Wirklichkeit*, Meisenheim am Glan, 1959.

Stekeler-Weithofer, P.

[1992] : "Hegels Philosophie der Mathematik" in *Vernunftkritik nach Hegel*, (editado por C. Demmerling y F. Kambartel), Frakfurt am Main, 1992.

[1992a] : *Hegels analytische Philosophie*, Paderborn, 1992.

Theunissen, M.

[1994] : *Sein und Schein. Die kritische Funktion der Hegelschen Logik*, Frankfurt am Main, 1994.

Tugendhat, E. y **Wolf**, U.

[1983] : *Logisch-semantische Propädeutik*, Stuttgart, 1983.

Vogel, H.

[1977] : *Physik. Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen*, New York, 1977.

Vuillemin, J.

[1955] : *Physique et Métaphysique Kantiennes*, Paris, 1955.

Wahsner, R.

[1996] : *Zur Kritik der Hegelschen Naturphilosophie*, Frankfurt am Main, 1996.

Wandschneider, D.

[1982] : *Raum, Zeit, Relativität. Grundbestimmungen der Physik in der Perspektive der Hegelschen Naturphilosophie*, Frankfurt am Main, 1982.

Westfall, R.

[1972] : „Circular Motion in Seventeenth-Century Mechanics“ in *ISIS*, Vol. 63, Chicago,1972. .

Wiehl, R.

[1965] : “Platos Ontologie in Hegels Logik des Seins”, in *Hegel-Studien*, Vol. 3, Hamburg, 1965.

Wieland, W.

[1970] : *Die aristotelische Physik*, Göttingen, 1970.

Whiteside, D. T.

[1960-1962] : “Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century”, in *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 1960-1962, pp. 179-388.

[1966] : „Newtonian Dynamics“ in *History of Science* Vol. 5, Cambridge, 1966.

Wolff, M.

[1978] : *Geschichte der Impetustheorie*, Frankfurt am Main, 1978.

[1986] : *Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik*, in “Hegels Philosophie der Natur”, R.P. Horstmann y M.J. Petry (Eds.), Stuttgart, 1986.